



**LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI
“LUISS - GUIDO CARLI”**

**DIPARTIMENTO DI
ECONOMIA E FINANZA**

**Cattedra di
Economia dei Mercati Finanziari**

Il contenuto informativo delle opzioni su S&P500

**Relatore:
Emilio Barone**

**Laureando:
Carlo Ercolani**

**Correlatore:
Sara Biagini**

Anno Accademico: 2024/2025

Indice

INTRODUZIONE	4
CAPITOLO 1: IL CONTESTO DELLE OPZIONI SULL'S&P500: DALLE BASI DEGLI STRUMENTI DERIVATI ALLE CARATTERISTICHE DELL'INDICE	9
1.1 INTRODUZIONE ALLE OPZIONI	9
1.2 L'INDICE S&P500: CARATTERISTICHE E RILEVANZA NEI MERCATI FINANZIARI	14
1.3 LE OPZIONI SULL'S&P500	16
CAPITOLO 2: STIMA E PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE NEUTRALI AL RISCHIO NEI MERCATI DELLE OPZIONI.....	18
2.1 LE PROBABILITÀ NEUTRALI AL RISCHIO	18
2.1.1 Arrow-Debreu securities	18
2.1.2 La struttura di Base	18
2.1.3 Mercati completi	20
2.1.4 Mercati incompleti	22
2.1.5 Ipotesi con tasso di interesse diverso da zero	23
2.1.6 Conclusione	24
2.2 IL MODELLO DI BREEDEN-LITZENBERGER.....	25
2.2.1 Introduzione	25
2.2.2 Determinazione delle probabilità neutrali al rischio a partire dai prezzi delle opzioni	25
2.3 LA RELAZIONE TRA I PREZZI DELLE OPZIONI E LE FUNZIONI DI DENSITÀ NEUTRALI AL RISCHIO	29
2.3.1 Un primo approccio : “il modello di Breeden e Litzenberger”	30
2.3.2 La formula di Black Scholes (1973) e la sua funzione di densità neutrale al rischio (RND function)	31
2.3.3 La curva smile della volatilità implicita	33
2.4 TECNICHE ALTERNATIVE PER STIMARE LE FUNZIONI RND IMPLICITE	34
2.4.1 Un semplice approccio : istogrammi neutrali al rischio	35
2.4.2 Interpolazione della funzione di prezzo delle opzioni call: approcci diretti ed indiretti	35
2.4.3 Adattamento di una forma parametrica per la funzione RND implicita ai prezzi delle opzioni	37
CAPITOLO 3: EVIDENZE TEORICHE ED EMPIRICHE DELLE DISTRIBUZIONI NEUTRALI AL RISCHIO IMPLICITE NELLE OPZIONI.....	41
3.1 IL DATASET DELLA FED DI MINNEAPOLIS E COME VIENE COSTRUITO	41
3.2 REVIEW DELLA LETTERATURA	44
3.3 LE INFORMAZIONI IMPLICITE NELLE OPZIONI SI POSSONO CONSIDERARE “NUOVE” INFORMAZIONI?	47
3.4 UTILITÀ DELLE RND IMPLICITE NELLE OPZIONI PER I POLICYMAKER.....	51
3.5 ANALISI PRELIMINARE	54
3.5.1 Probabilità implicite: capacità predittive e limiti	54

3.5.2 modello OLS	56
3.5.3 modello LSTM	57
CAPITOLO 4: STRATEGIE DI TRADING BASATE SUI MOMENTI DELLA DISTRIBUZIONE NEUTRALE AL RISCHIO	60
4.1 UNA PRIMA INTEGRAZIONE DELLE RND IMPLICITE NELLE OPZIONI IN STRATEGIE DI TRADING	60
4.1.1 Ideazione e realizzazione della strategia	60
4.1.2 Risultati della strategia	62
4.2 STRATEGIA DI TRADING SKEWNESS-BASED	64
4.2.1 Ideazione e realizzazione della strategia	64
4.2.2 Risultati della strategia	67
4.3 RELAZIONE INVERSA TRA VIX E S&P500 E POSSIBILI STRATEGIE DI TRADING	69
4.3.1 Ideazione e realizzazione della strategia	70
4.3.2 Risultati della strategia	75
CAPITOLO 5: MODELLI E DATASET ALTERNATIVI PER LA CREAZIONE DI STRATEGIE DI TRADING.....	77
5.1 MIGLIORAMENTO DELLA STRATEGIA SKEWNESS-BASED ATTRAVERSO UN MODELLO DI ALBERO DECISIONALE	77
5.1.1 Creazione e addestramento del modello	78
5.1.2 Risultati	79
5.2 UTILIZZO DELLE RWDs IN STRATEGIE DI TRADING	80
5.2.1 Passaggio da una misura risk-neutral (Q) ad una real-world (P).....	81
5.2.2 Metodologia per il passaggio da distribuzioni neutrali al rischio a distribuzioni nel mondo reale.....	83
5.2.3 Preparazione dei dati e PCA	86
5.2.4 Sviluppo del modello Ensemble	88
5.2.5 Strategia di Trading.....	91
CONCLUSIONI	94
BIBLIOGRAFIA.....	96

Introduzione

Nel mondo finanziario, la capacità di prevedere i movimenti futuri dei prezzi degli asset rappresenta un elemento cruciale sia per gli investitori, desiderosi di massimizzare i loro rendimenti, che per i policymaker, impegnati a garantire la stabilità economica. La capacità di anticipare rendimenti, volatilità e inversioni di tendenza, si traduce non solo in un vantaggio competitivo per chi opera nei mercati, ma anche in uno strumento essenziale per guidare le politiche economiche in contesti complessi ed incerti.

Una delle metodologie più innovative per stimare le probabilità future è stata introdotta nel 1978 da [Doug Breeden e Bob Litzenberger](#)¹, che hanno proposto un framework per derivare le distribuzioni di probabilità future dai prezzi delle opzioni, note come probabilità neutrale al rischio. Queste probabilità, le quali offrono una rappresentazione sintetica delle aspettative collettive degli operatori di mercato sui futuri movimenti dei prezzi, sono diventate uno strumento fondamentale per l'analisi finanziaria.

Da oltre un decennio, la Federal Reserve di Minneapolis utilizza questa metodologia per calcolare e successivamente pubblicare stime delle probabilità neutrali al rischio su una serie di asset finanziari, tra cui l'indice S&P500. Questi dati offrono un'opportunità unica per analizzare il contenuto informativo delle opzioni e valutare se queste probabilità possano essere utilizzate per migliorare le strategie di investimento o supportare decisioni di policy.

L'obiettivo di questa tesi risulta essere esaminare il contenuto informativo delle opzioni sull'S&P500 attraverso una approfondita analisi delle probabilità neutrali al rischio e delle loro implicazioni per la previsione di rendimenti, della volatilità e dei reversals. Successivamente, verranno sviluppate e valutate strategie di trading basate su tali probabilità, andando a identificare approcci innovativi e potenzialmente capaci di generare un profitto. Conseguentemente, l'obiettivo di tale tesi risulta essere duplice: da un lato, comprendere se ed in che misura le distribuzioni di probabilità implicite contengano informazioni utili per anticipare i movimenti del mercato; dall'altro, sviluppare metodologie

¹ Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621–651. <http://www.jstor.org/stable/2352653>

che integrino tali informazioni con ulteriori dati per migliorare la precisione delle previsioni e la redditività delle strategie di trading.

La decisione di focalizzarsi sul contenuto informativo delle opzioni è motivata da una questione centrale nell'economia finanziaria: come si diffonde l'informazione nei mercati e quanto velocemente questa viene incorporata nei prezzi degli strumenti finanziari? Nello specifico, questa tesi si concentra sui prezzi delle opzioni in quanto derivati finanziari che non solo riflettono le aspettative del mercato, ma possono anche contenere informazioni cruciali per la previsione di rendimenti futuri del sottostante. La letteratura accademica ha esplorato ampiamente se le opzioni siano semplicemente asset ridondanti, come inizialmente suggerito da [Black e Scholes \(1973\)](#)² oppure contengano importanti informazioni ([Easley, O'Hara e Srinivas, 1998](#))³. La ricerca sulla funzione informativa delle opzioni si è evoluta nel corso degli anni, sviluppandosi lungo due principali filoni. Da un lato, vi è la convinzione che il mercato delle opzioni sia un ambiente privilegiato per i trader informati grazie a caratteristiche uniche come i bassi costi di transazione, la liquidità continua, l'elevata leva finanziaria e l'assenza di restrizioni alla vendita allo scoperto (e.g., [Black, 1975](#)⁴; [Diamond e Verrecchia, 1987](#))⁵. Dall'altro lato, alcuni studi mettono in discussione questa prospettiva, suggerendo che i mercati azionari possano comunque prevalere nel processo di incorporazione delle informazioni. Ad esempio, [Stephan e Whaley \(1990\)](#)⁶ mostrano che i cambiamenti nei prezzi delle azioni precedono quelli delle opzioni, indicando che il mercato azionario potrebbe essere il primo a riflettere nuove informazioni.

I primi contributi teorici alla valutazione delle opzioni risalgono ad un periodo a cavallo tra la fine del Diciannovesimo ed il Ventesimo secolo, con opere come quelle di [Castelli \(1887\)](#)⁷,

² Black, F., & M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637.

³ Easley, D., M. O'Hara, & P. S. Srinivas, 1998, Option volume and stock prices: Evidence on where informed traders trade, *The Journal of Finance* 53, 431-465.

⁴ Black, F., 1975, Fact and fantasy in the use of options, *Financial Analysts Journal* 31, 36-72.

⁵ Diamond, D. W., & R. E. Verrecchia, 1987, Constraints on short-selling and asset price adjustment to private information, *Journal of Financial Economics* 18, 277-311.

⁶ Stephan, J. A., & R. E. Whaley, 1990, Intraday price change and trading volume relations in the stock and stock option markets, *The Journal of Finance* 45, 191-220.

⁷ Charles Castelli: *The Theory of Options in Stocks and Shares* (1877).

[Bachelier \(1900\)](#)⁸ e [Bronzin \(1908\)](#)⁹, le quali fornirono le basi probabilistiche e matematiche su cui successivamente si sarebbe costruita la moderna teoria degli strumenti derivati. Tuttavia, solo dagli anni Sessanta del Novecento iniziarono a comparire i primi modelli teorici sul pricing delle opzioni (e.g., [Sprenkle, 1961](#)¹⁰; [Ayres, 1963](#)¹¹; [Boness, 1964](#)¹²), i quali però non riuscivano a fornire una rappresentazione completa del fenomeno, spesso includendo parametri arbitrari, limitandone l'applicabilità pratica. È il modello di [Black-Scholes e Merton \(1973\)](#)¹³ a introdurre una metodologia di valutazione basata esclusivamente su variabili osservabili, segnando un punto di svolta sia per la teoria che per la pratica dei mercati finanziari. Tuttavia, la principale problematica riguardante tale modello consiste nel fatto che esso si basa su ipotesi stringenti, come l'assenza di costi di transazione e di attriti di mercato, che raramente si verificano nella realtà.

Questa distanza tra teoria e pratica ha spinto i ricercatori a sviluppare modelli alternativi che tengano conto di imperfezioni di mercato (e.g., [Detemple e Selden, 1991](#)¹⁴; [Back, 1993](#)¹⁵; [Cao, 1999](#))¹⁶. Allo stesso tempo, sono emersi modelli basati sull'informazione, come quello di [Easley et al. \(1998\)](#)¹⁷, che suggeriscono che i trader informati possano scegliere il mercato delle opzioni per sfruttarne le caratteristiche distintive e incorporare informazioni più rapidamente rispetto ad altri mercati. In questo contesto, la letteratura recente ha fornito prove che rafforzano l'idea che i prezzi delle opzioni, in particolare attraverso la loro volatilità implicita, siano predittivi dei

⁸ Louis Bachelier: *Théorie de la spéculation* (1900).

⁹ Vinzenz Bronzin: *Theorie der Prämiengeschäfte* (1908).

¹⁰ Sprenkle, C. M., 1961, Warrant prices as indicators of expectations and preferences, *Yale economic essays* 1, 178-231.

¹¹ Ayres, H. F., 1963, Risk aversion in the warrant markets, (Massachusetts Institute of Technology).

¹² Boness, A. J., 1964, Elements of a theory of stock-option value, *The Journal of Political Economy* 72, 163-175.

¹³ Black, F., & M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637.

¹⁴ Detemple, J., & L. Selden, 1991, A general equilibrium analysis of option and stock market interactions, *International Economic Review* 32, 279-303.

¹⁵ Back, K., 1993, Asymmetric information and options, *Review of Financial Studies* 6, 435-472.

¹⁶ Cao, H. H., 1999, The effect of derivative assets on information acquisition and price behavior in a rational expectations equilibrium, *Review of Financial Studies* 12, 131-163.

¹⁷ Easley, D., M. O'Hara, & P. S. Srinivas, 1998, Option volume and stock prices: Evidence on where informed traders trade, *The Journal of Finance* 53, 431-465.

rendimenti futuri delle azioni (e.g., [Bali e Hovakimian, 2009](#)¹⁸; [Cremers e Weinbaum, 2010](#))¹⁹. Nonostante vi siano ancora studi, come quello di [Chan et al. \(2002\)](#)²⁰, che sottolineano come i volumi di negoziazione delle azioni possano contenere più informazioni rispetto a quelli delle opzioni.

Di conseguenza, è possibile affermare come, mentre il dibattito accademico continua, un elemento chiave emerge con chiarezza, ossia che il mercato delle opzioni offre vantaggi significativi ai trader in possesso di informazioni, rendendolo un potenziale precursore nella diffusione delle informazioni rispetto ad altri mercati. Questa tesi, quindi, si inserisce in questo dibattito, esaminando se e in che modo i prezzi delle opzioni sull'S&P500 possano fornire informazioni utili per prevedere i movimenti futuri di tale indice e migliorare la comprensione delle dinamiche informative su di esso.

La tesi è strutturata come segue. Nel primo capitolo verranno introdotti i concetti fondamentali legati alle opzioni, andando in particolare a trattare le opzioni su indici, di cui le opzioni su S&P500 fanno parte e le caratteristiche specifiche dell'indice stesso. Successivamente il secondo capitolo è dedicato alla stima ed alle proprietà delle distribuzioni neutrali al rischio (RND), con riferimento sia al modello teorico di Breeden-Litzenberger (1978), che ad approcci alternativi di inferenza delle RND implicite nei prezzi delle opzioni. Nel terzo capitolo, analizzerò le evidenze teoriche ed empiriche relative alle RND implicite, partendo dall'analisi del dataset della FED di Minneapolis. Porterò avanti poi una prima analisi del valore predittivo delle probabilità implicite e spiegherò la loro utilità per i policymakers. Nel quarto capitolo, la mia attenzione si focalizzerà sull'integrazione delle RND in strategie di trading. Svilupperò e testerò nei vari paragrafi diverse strategie operative, tra cui modelli statistici OLS, approcci basati sulla skewness e strategie fondate sulla relazione inversa tra VIX e S&P500. Infine, nel quinto ed ultimo capitolo, presenterò un'estensione dell'analisi attraverso l'introduzione di modelli di machine learning e dataset

¹⁸ Bali, T. G., & A. Hovakimian, 2009, Volatility spreads and expected stock returns, *Management Science* 55, 1797-1812.z

¹⁹ Cremers, M., & D. Weinbaum, 2010, Deviations from put-call parity and stock return predictability, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 45, 335-367.

²⁰ Chan, K., P. Chung, & W.-M. Fong, 2002, The informational role of stock and option volume, *Review of Financial Studies* 15, 1049-1075.

alternativi. In particolare, verrà proposto un miglioramento della strategia di trading basata sulla skewness e verrà esplorata l'utilità delle distribuzioni real-world in ambito operativo.

Questo lavoro mira ad offrire una comprensione approfondita delle dinamiche delle probabilità neutrali al rischio, con l'intento di colmare il divario presente tra teoria e pratica. Inoltre, questa tesi, combinando rigore analitico e applicazioni concrete, mira a fornire ad investitori e policymaker nuovi strumenti per affrontare l'incertezza e migliorare le decisioni in contesti finanziari complessi.

CAPITOLO 1: Il contesto delle opzioni sull'S&P500: dalle basi degli strumenti derivati alle caratteristiche dell'indice

1.1 Introduzione alle opzioni

Le opzioni appartengono alla categoria dei derivati finanziari, ossia strumenti finanziari il cui valore dipende da quello di una attività denominata “sottostante”, che può essere di varia natura (reale come nel caso di materie prime quali grano, oro o petrolio, oppure finanziaria come nel caso di azioni, obbligazioni, indici, ecc.).

Le opzioni possono essere definite come contratti finanziari che conferiscono all’acquirente, dietro pagamento di un prezzo (premio), il diritto (ma non l’obbligo), di acquistare o di vendere una attività sottostante ad un prezzo determinato che prende il nome di “prezzo di esercizio”, alla data stabilita nel contratto (nel caso in cui si trattasse di una opzione europea) oppure in un qualsiasi momento entro la data stabilita nel contratto (nel caso in cui si trattasse di una opzione americana).

Le due tipologie fondamentali di opzioni sono le call e le put. Un’opzione call conferisce al proprietario il diritto di acquistare il sottostante a un prezzo specifico ed entro un determinato periodo di tempo. Ovviamente, l’esercizio avrà senso (escludendo il costo pagato per acquistare l’opzione) solo se il prezzo del sottostante sarà superiore al prezzo di esercizio ed il valore finale del contratto sarà conseguentemente pari alla differenza tra il prezzo di mercato e quest’ultimo. Al contrario un’opzione put conferisce al proprietario il diritto di vendere l’attività sottostante ad un prezzo prefissato ed entro un determinato periodo di tempo. In questo caso l’esercizio avrà senso (sempre escludendo il costo pagato per acquistare l’opzione, il cosiddetto premio) soltanto se il prezzo del sottostante sarà inferiore al prezzo di esercizio. In questo caso il valore finale del contratto consisterà nella differenza tra il prezzo di esercizio ed il prezzo di mercato.²¹

Gli investitori, oltre a poter comprare le opzioni, possono anche venderle, nonostante non le abbiano precedentemente acquistate, questa attività prende il nome di “scrittura di una opzione” (writing an option). Di conseguenza, si possono distinguere quattro tipologie di traders: compratori di calls, venditori di calls, compratori di puts e venditori di puts. Le opzioni possono essere identificate in base alla loro “moneyness”. Il termine moneyness

²¹ Borsa Italiana. (n.d.). Le opzioni: definizione e funzionamento - Borsa Italiana. <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm>

si riferisce alla relazione tra il prezzo attuale dell'attività sottostante ed il prezzo di esercizio dell'opzione. Per le opzioni call, i termini *in the money*, *at the money* e *out of the money* identificano se il prezzo del sottostante è attualmente sopra, pari oppure al di sotto del prezzo di esercizio dell'opzione. Per quanto riguarda, invece, le opzioni put, i termini *in the money*, *at the money* e *out of the money* sono invertiti ed indicano rispettivamente se il prezzo del sottostante è attualmente al di sotto, pari o al di sopra del prezzo di esercizio dell'opzione. Un'altra caratteristica importante per le opzioni è la scadenza del contratto, che definisce il periodo di tempo entro cui un investitore può acquistare o vendere l'attività sottostante al prezzo di esercizio. Dopo tale data, l'opzione giunge a scadenza e non può più essere esercitata.

I contratti di opzione (sia call che put) si possono, quindi, distinguere in due tipologie principali: contratti che possono essere esercitati in qualunque momento antecedente la data di scadenza e contratti che possono essere esercitati solamente alla specifica data di scadenza. Un'opzione che può essere esercitata in anticipo prende il nome di opzione americana, mentre una che può essere esercitata solo alla data di scadenza prende il nome di opzione europea. In genere, le opzioni negoziate in borsa sono americane.²²

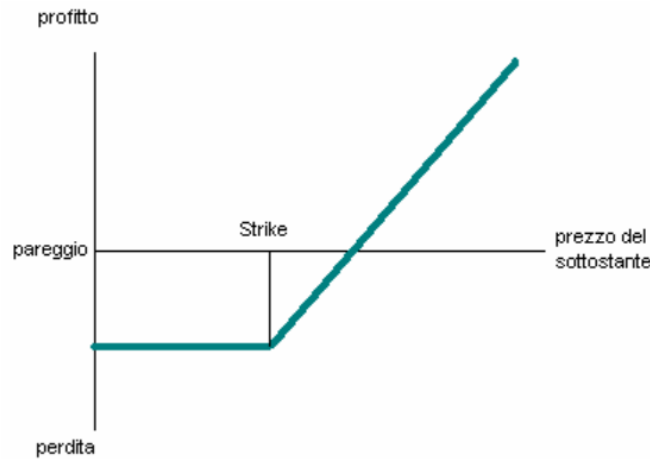
Considerando opzioni di tipo europeo, indicando con ST il prezzo del sottostante alla scadenza, con K il prezzo di esercizio dell'opzione e con c o p il premio pagato dall'acquirente, il P&L per chi acquista una call risulta essere pari a :

$$[\max(ST - K, 0) - c]$$

Da ciò possiamo comprendere come l'opzione viene esercitata soltanto nel caso i cui S_t è maggiore di K .

Tale P&L può essere descritto anche graficamente:

²² Fundamentals of Options - CFA Institute. (n.d.). <https://www.cfainstitute.org/sites/default/files/-/media/documents/book/rf-publication/2013/>



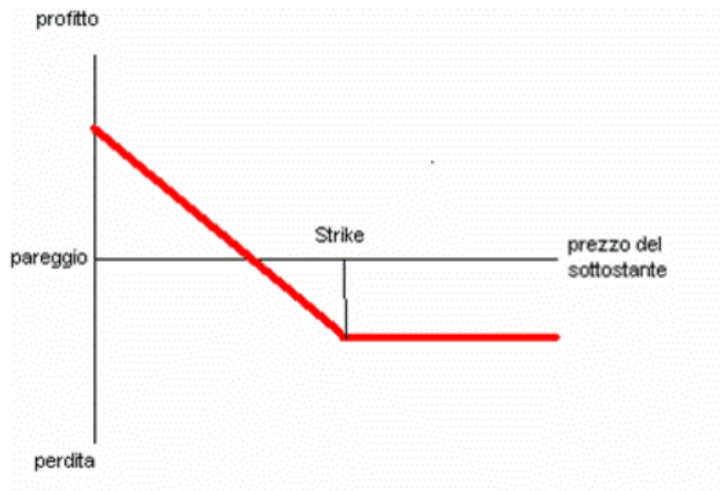
L'asse orizzontale del grafico indica il prezzo del sottostante: verso destra vi è un aumento del prezzo, mentre vi è una riduzione del prezzo verso sinistra. L'asse verticale, invece, indica i profitti (o le perdite) dell'acquirente dell'opzione call. Come già affermato in precedenza, l'esercizio dell'opzione avviene solo se il prezzo di mercato dell'attività sottostante è maggiore del prezzo di esercizio. Nonostante ciò, poiché acquisire il diritto di esercizio della call ha un costo (il premio), il grafico del P&L dell'opzione ha una partenza in territorio negativo. Conseguentemente, nel caso in cui a scadenza l'opzione risulti essere out of the money, il valore della call sarà zero e la massima perdita che l'investitore sosterrà sarà il premio pagato.

D'altro canto, la put è uno strumento che permette di guadagnare se il mercato scende. Il compratore di un'opzione put scommette sul ribasso del mercato, senza esporsi a possibili perdite nel caso in cui il mercato andasse nella direzione opposta a quella sperata.

Il P&L dell'acquirente di una opzione put sarà quindi:

$$[\max (K - S_T, 0) - p]$$

Graficamente è possibile esprimerlo nel seguente modo:

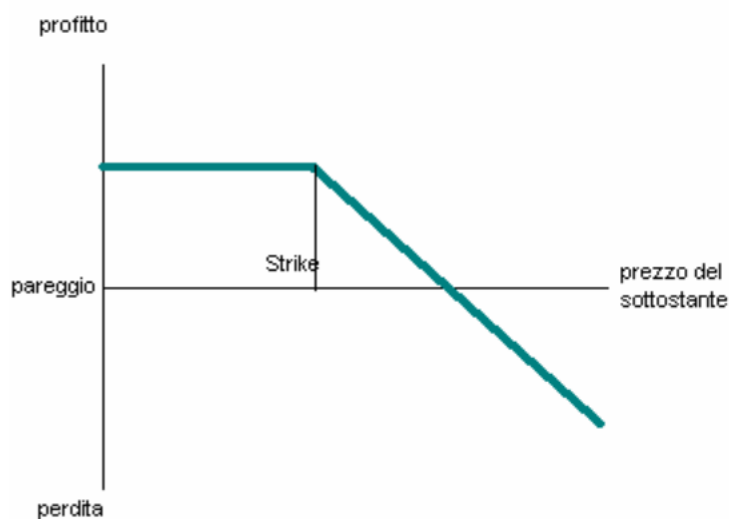


Mentre l'acquirente di opzioni ha la facoltà di non esercitare il proprio diritto a scadenza (o entro la scadenza per le opzioni americane), limitando così le perdite che può subire, al contrario, il venditore di opzioni ha sempre l'obbligo di onorare l'impegno previsto dall'opzione che ha concesso all'acquirente.

Nel caso del venditore di una call, il P&L sarà il seguente:

$$[\min (K - ST, 0) + c]$$

Graficamente:

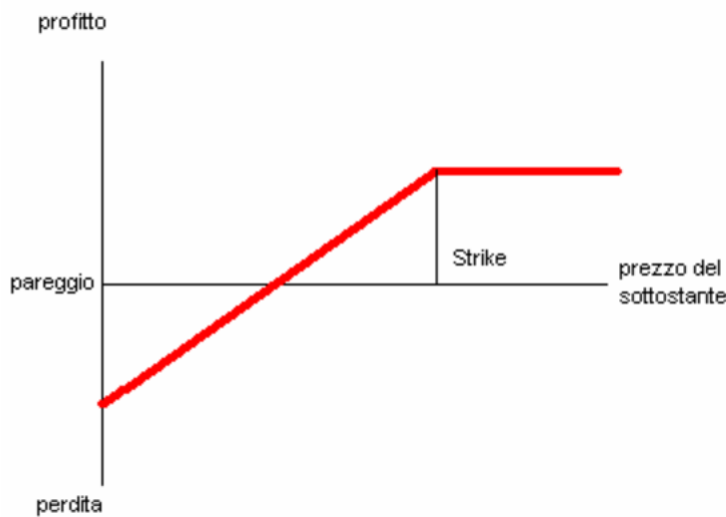


Il profitto fisso iniziale (ossia il premio incassato) si riduce all'aumentare del prezzo dell'attività sottostante al di sopra del prezzo di esercizio dell'opzione. Di conseguenza, la speranza del venditore dell'opzione è quella che il mercato resti fermo oppure che crolli. A fronte di un profitto immediato, la perdita è quindi potenzialmente illimitata.

D'altro canto, nel caso di un venditore di una opzione put, il P&L sarà il seguente:

$$[\min (ST - K, 0) + p]$$

Graficamente:



In questo caso, l'erosione del premio iniziale si ha se il prezzo del sottostante diminuisce al di sotto del prezzo di esercizio. Il massimo profitto per il venditore si avrà se il prezzo del sottostante resterà costante oppure salirà. Anche per il venditore della put il profitto sarà limitato, mentre la possibile perdita sarà quasi illimitata (il sottostante non può assumere un valore negativo, di conseguenza la massima perdita si avrà quando esso avrà un valore uguale a zero).²³

²³ Borsa Italiana. (n.d.). Le opzioni: definizione e funzionamento - Borsa Italiana. <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm>

1.2 L'indice S&P500: caratteristiche e rilevanza nei mercati finanziari

L'indice S&P500, anche conosciuto come Standard & Poor's 500 index, è ampiamente considerato la misura più rappresentativa del mercato azionario statunitense. L'indice include 500 aziende leader all'interno del mercato statunitense (quotate nel New York Stock Exchange oppure nel NASDAQ), rappresenta circa l'80% della capitalizzazione di mercato azionaria degli Stati Uniti e oltre il 50% del mercato azionario globale.²⁴

Questo indice è considerato un popolare (seppur non il più preciso) indicatore dello stato generale di salute del mercato azionario statunitense e del sentiment degli investitori, fornendo preziose informazioni sul panorama economico del paese. Rappresenta, inoltre, uno strumento fondamentale per gli investitori, essendo utile per valutare le tendenze di mercato, prendere decisioni informate e monitorare la performance delle principali aziende quotate negli Stati Uniti.

Come molti indici, l'S&P500 deve il suo nome ai suoi creatori. Nel 1941, la fusione tra Poor's Publishing e la Standard Statistics Company diede vita a tale "Composite Index". Il numero "500" fu successivamente aggiunto nel 1957, quando le 233 azioni inizialmente incluse, divennero 500.

L'S&P500 riflette il sentiment degli investitori. Quando l'indice sale, indica spesso un sentiment positivo verso le azioni a grande capitalizzazione e viceversa. Conseguentemente, monitorare l'S&P500 aiuta gli investitori a valutare il sentiment di mercato generale ed a prendere decisioni strategiche.

Molte aziende incluse nell'indice operano su scala globale e generano una parte significativa dei loro ricavi al di fuori degli Stati Uniti. Questa esposizione internazionale rende l'indice particolarmente interessante per chi cerca diversificazione e accesso ai mercati globali. In momenti di debolezza economica negli Usa, infatti, l'S&P500 potrebbe comunque registrare rendimenti solidi grazie a tale dimensione geografica. L'S&P500 è spesso utilizzato come benchmark per misurare la performance di un portafoglio. Confrontando i propri rendimenti con quelli dell'indice, gli investitori possono valutare l'efficacia delle loro strategie e identificare eventuali margini di miglioramento. Tale indice come precedentemente affermato, oltre ad essere usato come benchmark, è anche impiegato per valutare lo stato di salute complessivo dell'economia statunitense. Tuttavia, è

²⁴ S&P500 The gauge of the U.S. Large-Cap market. (n.d.). <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/additional-material/sp-500-brochure>

importante comprendere che, sebbene questo indice copra molto più rispetto ad altri indici, è comunque composto solo da azioni statunitensi a grande capitalizzazione, escludendo aziende di piccole dimensioni, obbligazioni, valute o materie prime. L'economia, infatti, è influenzata da numerosi fattori, come politiche governative, tassi di interesse, produttività e condizioni economiche globali. Sebbene l'S&P500 offra spunti sul mercato azionario, rappresenta solo un tassello del più ampio quadro economico.

Il prezzo di tale indice viene calcolato utilizzando una metodologia basata sulla capitalizzazione di mercato delle aziende che lo compongono. Il calcolo avviene moltiplicando il prezzo per azione di ciascuna azienda per il numero totale di azioni liberamente negoziabili sul mercato, ottenendo così il valore di mercato flottante di ciascuna azienda. I valori di mercato di ciascuna azienda vengono così aggregati per determinare il valore complessivo dell'indice.

Il “weighting scheme” utilizzato dall'S&P500 prevede che le aziende con capitalizzazione di mercato maggiore abbiano un impatto più significativo sui movimenti dell'indice in termini percentuali. Questo approccio garantisce che l'indice rifletta la dimensione relativa e l'importanza delle aziende che lo compongono. Di conseguenza, si avrà che variazioni nei prezzi delle azioni delle aziende più grandi influenzano maggiormente il valore complessivo dell'indice rispetto a quelle delle aziende più piccole. L'S&P500 viene controllato su base trimestrale, in un processo che prevede la revisione delle capitalizzazioni di mercato delle aziende componenti e la verifica del rispetto di tutti i requisiti di idoneità. Tale ricalibrazione garantisce l'aggiunta o la rimozione di aziende quando i criteri vengono rispettati per la prima volta o non soddisfatti più dalle aziende attualmente facenti parte dell'indice.

Uno dei criteri principali per l'inclusione di una azienda all'interno dell'S&P500 è la capitalizzazione di mercato dell'azienda. Questo valore si calcola moltiplicando il prezzo corrente delle azioni per il numero totale di azioni in circolazione. Inoltre, le azioni delle società ammesse all'indice devono raggiungere un certo livello di liquidità per garantire facilità di scambio. Ciò significa che le azioni di tali aziende devono essere attivamente acquistate e vendute sul mercato. Poiché l'S&P500 mira a rappresentare un ampio spaccato dell'economia statunitense, il comitato di selezione si impegna a garantire un equilibrio nella rappresentanza dei vari settori, conseguentemente aziende di diversi settori come tecnologia, sanità e finanza devono essere incluse per offrire una diversificazione adeguata. Infine, le

società incluse nell'indice devono mantenere elevati standard di governance aziendale. Ciò comprende aspetti come la trasparenza nella rendicontazione finanziaria, pratiche commerciali etiche ed una gestione responsabile.

In conclusione, l'S&P500 è un indice fondamentale per gli investitori che cercano esposizione al mercato azionario statunitense. Con le sue 500 aziende costituenti (attualmente 503), riflette le performance delle principali realtà economiche attraverso numerosi settori. Comprenderne la storia, il funzionamento ed i suoi criteri di selezione risulta essere essenziale per poter prendere decisioni d'investimento informate.²⁵

1.3 Le opzioni sull'S&P500

Le opzioni di cui tratterò in questa tesi sono le opzioni sull'S&P500, le quali fanno parte della categoria di opzioni su indici. Il mercato delle opzioni sull'indice S&P500 della Chicago Board Options Exchange è al secondo posto negli Stati Uniti quanto a volumi scambiati. Il sottostante di queste opzioni è rappresentato da un prezzo spot, può seguire un moto geometrico Browniano, non è soggetto alle operazioni di traders non competitivi ed infine è meno soggetto alle discontinuità che possono caratterizzare i prezzi delle azioni. Un'opzione su indice è un derivato finanziario che conferisce al detentore il diritto di acquistare o vendere il valore di un indice sottostante (come può essere ad esempio l'S&P500), ad un prezzo di esercizio prestabilito. In questa tipologia di opzioni, non vengono effettivamente comprate o vendute azioni. Esse sono, inoltre, "cash-settled", ossia il regolamento avviene sempre in contanti e sono in genere opzioni di tipo europeo, il che significa che possono essere esercitate solamente alla data di scadenza e non prevedono la possibilità di esercizio anticipato.

Le opzioni call e put su indice sono strumenti utilizzati per negoziare la direzione di un indice sottostante, mettendo a rischio una quantità minima di capitale. Il potenziale profitto per le opzioni call su indice è illimitato, a fronte di un rischio limitato al premio pagato per l'opzione. Per le opzioni put su indice, invece, il rischio è anch'esso limitato al premio pagato mentre il potenziale profitto è limitato al livello dell'indice al netto del premio pagato, considerando che l'indice non può mai scendere al di sotto di zero.

Oltre a potenzialmente generare profitti dai movimenti dell'indice, tali opzioni possono essere utilizzate per diversificare un portafoglio, quando un investitore non ha intenzione di

²⁵ Slack, S. (2024, August 21). What is the S&P500? A Comprehensive Guide. Investing.com. <https://www.investing.com/academy/trading/what-is-the-sp-500/>

investire direttamente nei titoli presenti all'interno dell'indice. Questo tipo di opzioni può anche essere impiegata per coprire rischi specifici di un portafoglio.

Per le opzioni sull'S&P500 il tick è rappresentato da 0,05 per quelle che quotano sotto 3,00 e da 0,10 per tutte le altre. Il valore di un tick è pari a 5\$ ($=100 \cdot 0,05$) o a 10\$ ($=100 \cdot 0,10$). La scadenza di tali opzioni ricade alle 10.59 p.m. (Central Time) del sabato immediatamente successivo al terzo venerdì del mese di scadenza. Inoltre, queste opzioni, come precedentemente affermato, sono di tipo europeo e possono essere esercitate solo nell'ultimo giorno lavorativo (in genere un venerdì) prima della scadenza. Le negoziazioni terminano il giorno lavorativo (in genere un giovedì) immediatamente precedente il giorno in cui le opzioni sono esercitabili. Il prezzo finale di liquidazione è pari al prodotto tra 100\$ e la differenza tra il livello di apertura dell'S&P500 nell'ultimo giorno di negoziazione ed il prezzo d'esercizio dell'opzione.

Poiché è improbabile che i trader detengano opzioni per più di un anno, questi strumenti sono tassati come guadagni in conto capitale a breve termine. Tuttavia, le opzioni su indici sono tassate secondo la regola del 60/40, ossia il 60% dei guadagni è considerato a lungo termine, mentre il restante 40% è considerato a breve termine, indipendentemente dal periodo di detenzione. Questa peculiarità fiscale conferisce alle opzioni su indici un vantaggio rispetto ad altri strumenti derivati.²⁶

²⁶ Chen, J. (2024, February 19). Index Option: Option contracts based on a benchmark index. Investopedia.
<https://www.investopedia.com/terms/i/indexoption.asp>

CAPITOLO 2: Stima e proprietà delle funzioni di distribuzione neutrali al rischio nei mercati delle opzioni

2.1 Le probabilità neutrali al rischio

Un titolo è considerato ridondante se il suo payoff può essere replicato detenendo altri titoli già esistenti sul mercato, noti come titoli primari. Il processo di creazione di un portafoglio con lo scopo di replicare il payoff di un titolo ridondante è detto replicazione. Il titolo ridondante ed il portafoglio di replicazione avranno esattamente lo stesso payoff. Due titoli che danno lo stesso payoff devono necessariamente avere anche lo stesso valore di mercato. Se i loro valori fossero diversi, questa differenza potrebbe essere sfruttata per ottenere un profitto privo di rischio tramite arbitraggio (vendendo allo scoperto il titolo col prezzo maggiore e conseguentemente acquistando il titolo col prezzo minore).

La matematica finanziaria cerca di stabilire relazioni precise tra diversi titoli assumendo che le opportunità di arbitraggio non esistano, determinando quindi i cosiddetti prezzi relativi, ossia il prezzo di un titolo espresso in funzione di altri titoli.

Nel suo approccio, la matematica finanziaria fa ampio uso del concetto di probabilità neutrali al rischio. Per sviluppare questo concetto e favorirne una comprensione più profonda, è necessario partire dall'analisi di esso dal punto di vista dell'economia finanziaria.

2.1.1 Arrow-Debreu securities

Kenneth Joseph Arrow, nel suo articolo scritto nel 1953, introduce per la prima volta il concetto di equilibrio competitivo in condizioni di incertezza e la dimostrazione della sua ottimalità. Arrow dimostra come generalizzare l'economia "certa" al caso dell'incertezza, ammesso che i consumatori siano (debolmente) avversi al rischio. Nella sua dimostrazione, Arrow si inventa il concetto degli "state-contingent claims" (anche noti come Arrow-Debreu securities), ossia titoli che pagano un'unità di numerario in un solo futuro stato di natura.²⁷

2.1.2 La struttura di Base

Per comprendere il concetto di probabilità neutrali al rischio è sufficiente creare un framework piuttosto semplice. Si immagini una economia, la quale si trova in uno stato noto al tempo 0 e che possa evolvere in una serie di stati possibili, mutualmente esclusivi, al tempo 1. Si considerino, per ora, solo due momenti: il tempo 0 ed il tempo 1. Si supponga,

²⁷ Gaia Barone, 2012, Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu, CreateSpace.

per esempio, che l'economia sia attualmente, al tempo 0, nello stato #3 (dove il numero 3 rappresenta il livello di attività economica) e che al tempo 1, possa passare allo stato #1, #2, #3, #4, #5, dove lo stato #5 corrisponde al livello massimo di attività economica, mentre lo stato #1 al minimo. L'economia, al tempo 1, potrà trovarsi in uno solo di questi cinque stati, ma al tempo 0 non sappiamo quale sarà quello che effettivamente si realizzerà (condizione di incertezza). Si supponga, inoltre, che esista una visione omogenea sulle probabilità associate a ciascuno di questi stati. Si hanno, quindi, cinque probabilità, una per ciascuno stato e la loro somma è pari ad 1.

Inizialmente, si assuma che il tasso d'interesse sia pari a zero, consentendo il trasferimento intertemporale di ricchezza senza alcun costo o beneficio in termini monetari.

In questo contesto, si definiscano ora cinque tipi di titoli. Per ogni stato, esiste un titolo che garantisce un payoff contingente di 1\$ se quello stato specifico si realizza, ed un payoff pari a 0\$ altrimenti. Questa tipologia, come visto in precedenza, prende il nome di titolo di Arrow. Se si possiedono tutti e cinque i titoli di Arrow, si ha la certezza di ricevere un payoff pari ad 1\$ al tempo 1, poiché esattamente uno di questi titoli avrà un valore positivo nello stato realizzato, mentre gli altri scadranno senza alcun valore. Il valore di un portafoglio che contiene tutti e cinque i titoli sarà dunque 1\$ al tempo 1. Si presuma ora l'esistenza di un conto bancario con la possibilità di scoperto. Poiché si assume che il tasso di interesse di equilibrio su tale conto sia pari allo 0%, il prezzo privo di arbitraggio dell'intero portafoglio di titoli di Arrow deve essere anch'esso pari ad 1\$ al tempo 0. Se il prezzo del portafoglio fosse superiore ad un 1\$, ad esempio $(1+d)$ \$, si potrebbe venderlo sul mercato ottenendo $(1+d)$ \$ e realizzando un profitto certo di d \$. Supponendo un tasso di equilibrio pari a zero, tali opportunità di arbitraggio faranno sempre convergere il prezzo dell'insieme completo di titoli di Arrow verso 1\$.

I prezzi dei singoli titoli di Arrow saranno determinati dall'equilibrio fra domanda ed offerta nel mercato. I fattori rilevanti per questa dinamica includono: le preferenze degli operatori di mercato riguardo la detenzione di liquidità in uno stato rispetto ad un altro al tempo 1; le preferenze sulla detenzione di liquidità al tempo 0 rispetto al tempo 1; la probabilità stimata di realizzazione di ciascuno stato al tempo 1.

Se ad esempio, non ci importasse di avere un dollaro in più nello stato #5 rinunciando a un dollaro nello stato #4, e viceversa, ma la probabilità che si verifichi lo stato #4 è doppia rispetto a quella dello stato #5, allora saremmo disposti a vendere titoli relativi allo stato #5

per acquistare più titoli relativi allo stato #4. Pertanto, la probabilità percepita di ciascuno stato ha un impatto positivo sul prezzo del Arrow-Debreu security corrispondente, al tempo 0.

Tuttavia, non è necessario calcolare direttamente i singoli prezzi, poiché è possibile semplicemente osservarli nel mercato e definire un vettore di prezzi “a” con i valori di mercato osservati. Il prezzo del titolo associato allo stato #1 al tempo 0, sarà indicato come $a(1)$, il prezzo del titolo associato allo stato #2 sarà $a(2)$, e così via.

Passo ora a considerare cosa è possibile dire in merito ad un mercato in cui vengono scambiati titoli ridondanti. È importante distinguere tra mercati completi ed incompleti, poiché nei primi è possibile riscontrare risultati più decisi.²⁸

2.1.3 Mercati completi

Un mercato è detto completo quando è possibile negoziare tutti i titoli di Arrow. Non è rilevante che tali titoli esistano effettivamente o che possano essere costruiti, ossia replicati attraverso una combinazione lineare di altri titoli negoziati. È possibile ora definire un particolare titolo ridondante. Un titolo è sempre identificato dal suo payoff, il quale può essere anche di natura stocastica. Con il termine stocastico, si intende che il payoff può dipendere dallo stato in cui si troverà l’economia al tempo 1. Ad esempio, una obbligazione zero coupon priva di rischio, garantisce con certezza un payoff pari al suo valore nominale n al tempo 1, indipendentemente dallo stato dell’economia. Per replicare questa obbligazione, è necessario acquistare n volte l’insieme completo dei Arrow-Debreu securities. Poiché è noto che l’insieme completo dei Arrow-Debreu securities ha un costo pari a 1\$ al tempo 0, la replicazione dello zero coupon bond avrà un costo pari ad n . Questo risulta essere l’unico prezzo privo di arbitraggio dell’obbligazione.

Se il prezzo dell’obbligazione fosse inferiore ad n , per esempio $(n-d)$ \$, si potrebbe ottenere un profitto certo pari a d acquistando l’obbligazione e vendendo allo scoperto n volte l’intero insieme dei titoli di Arrow. Se, al contrario, l’obbligazione costasse più di n , ad esempio $(n+d)$ \$, si potrebbe ottenere un profitto pari a d vendendola e acquistando n volte l’insieme dei Arrow-Debreu securities.

Come secondo esempio, si consideri una obbligazione zero coupon rischiosa, il cui payoff è

²⁸ Nicolas Gisiger, 2010, Risk-Neutral probabilities explained - Nicolas Gisiger. (n.d.). MAS Finance UZH ETHZ, CEMS MIM, M.A. HSG.

stocastico. Supponiamo che questa obbligazione paghi 1\$ in ogni stato, tranne nello stato #1 dove il suo valore è nullo a causa di un default. L'unico prezzo privo di arbitraggio per questa obbligazione sarà dato dalla somma dei prezzi dei titoli di Arrow relativi agli stati #2, #3, #4 e #5. Se il prezzo di questa obbligazione fosse inferiore a tale somma di un valore d , potremmo acquistarla e contemporaneamente vendere i Arrow-Debreu securities relativi a quegli stati, ottenendo così un profitto certo pari a d . Infatti, indipendentemente dallo stato che si realizzerà al tempo 1, le posizioni lunghe e corte si compensano perfettamente. Se, invece, l'obbligazione fosse più costosa, potremmo eseguire l'operazione inversa, bloccando il profitto già al tempo 0 grazie all'allineamento del payoff tra le posizioni lunghe e corte al tempo 1. Opportunità di arbitraggio come queste generano profitti privi di rischio; l'ipotesi sottostante è che tali opportunità scompaiano, perché il loro sfruttamento spinge il prezzo di mercato verso il livello privo di arbitraggio.

L'idea di base è molto intuitiva: qualsiasi payoff può essere replicato tramite una combinazione lineare di Arrow-Debreu securities, ed il portafoglio che lo replica impone un prezzo unico privo di arbitraggio. Questo prezzo è semplicemente la somma dei prezzi dei Arrow-Debreu securities, ponderati per il rispettivo payoff. Se θ è il prezzo privo di arbitraggio di un titolo al tempo 0 e $X(i)$ è il suo payoff nello stato i , allora vale la seguente relazione:

$$\theta = \sum a(i) * X(i)$$

Questi prezzi dei Arrow-Debreu securities sono detti probabilità neutrali al rischio.

Ma perché dovrebbero essere chiamati “probabilità”? Da un punto di vista matematico, una misura di probabilità soddisfa due condizioni:

1. La somma delle probabilità associate a tutti gli eventi disgiunti deve essere uguale ad 1: $\sum a(i) = 1$
2. La probabilità di un determinato evento non può essere negativa:
 $a(i) \geq 0, \forall i$

poiché i prezzi dei Arrow-Debreu securities rispettano queste condizioni, tecnicamente possono essere interpretati come una misura di probabilità.

Tuttavia, è fondamentale sottolineare che una probabilità neutrale al rischio non rappresenta la probabilità reale che un determinato evento si verifichi. Piuttosto, deve essere interpretata come un prezzo. Non è indipendente dalla probabilità reale degli eventi, poiché quest'ultima

influisce positivamente sul prezzo di un payoff condizionato a uno stato specifico. Inoltre, non assume che il mondo sia privo di rischio, anzi, presuppone che il futuro sia incerto. Allo stesso modo, non implica che gli operatori di mercato siano neutrali al rischio: possono avere preferenze diverse rispetto al rischio e valutare i payoff condizionali in base alla loro avversione, neutralità o propensione al rischio.

Le probabilità neutrali al rischio (ossia i prezzi dei Arrow-Debreu securities, chiamati anche state prices) servono semplicemente a garantire la coerenza della valutazione lineare fra tutti i titoli negoziati, sulla base dei loro payoff.²⁹

2.1.4 Mercati incompleti

In un mercato incompleto, non è possibile costruire tutti i Arrow-Debreu securities. Un titolo che sarebbe considerato ridondante in un mercato completo potrebbe non esserlo in un mercato incompleto.

Si supponga che venga introdotto un nuovo titolo nel mercato, il quale paga 1\$ se si verifica lo stato #2, #3 o #4 ma nulla negli stati #1 o #5. Questo titolo non è ridondante, poiché non è possibile eliminare tutti i suoi payoff attraverso un portafoglio di copertura. Il prezzo di questo titolo deve necessariamente essere superiore a $a(3) + a(4)$ ed inferiore a $(1 - a(5))$. Qualsiasi prezzo all'interno di questo intervallo sarà privo di arbitraggio. Detto in altri termini, il prezzo privo di arbitraggio del Arrow-Debreu security relativo allo stato #2 non è univoco; di conseguenza, la probabilità neutrale al rischio associata allo stato #2 non è determinata in modo univoco. Il mercato può quindi accogliere più misure diverse di probabilità neutrale al rischio senza generare opportunità di arbitraggio.

Tuttavia, una volta che questo nuovo titolo inizia a essere scambiato ed il mercato stabilisce un prezzo per esso, il mercato diventerà completo nell'esempio appena fatto. In sintesi, un mercato incompleto consente un intervallo di prezzi privi di arbitraggio per determinati titoli. Ciò equivale a dire che, per gli stati in cui non esistono ancora titoli Arrow, vi è un insieme di probabilità neutrali al rischio possibili, invece di un valore univoco.

²⁹ Nicolas Gisin, 2010, Risk-Neutral probabilities explained - Nicolas Gisin. (n.d.). MAS Finance UZH ETHZ, CEMS MIM, M.A. HSG.

2.1.5 Ipotesi con tasso di interesse diverso da zero

Finora ho assunto che i tassi di interesse fossero pari a zero. Ora eliminerò questo vincolo ed analizzerò come cambiano gli state-prices e le probabilità neutrali al rischio. Se si introduce un tasso di interesse diverso da zero, il mercato assegna un valore diverso al possesso di 1\$ oggi rispetto al possesso dello stesso importo in futuro. Un dollaro al tempo 0 può essere capitalizzato fino a $1 \cdot (1+r)$ \$ al tempo 1. Allo stesso modo, un dollaro al tempo 1 può essere attualizzato a $1/(1+r)$ \$ al tempo 0.

Precedentemente si è analizzato come detenere l'intero insieme di Arrow-Debreu securities garantisca un payoff di 1\$ al tempo 1. Di conseguenza, il prezzo dell'insieme completo di Arrow-Debreu securities al tempo 0 deve essere pari a $1/(1+r)$ \$.

Matematicamente, ciò implica:

$$\sum a(i) = \frac{1}{1+r}$$

Si continua ad assumere che le preferenze sul rischio, le preferenze sugli stati e le stime delle probabilità rimangano invariate. L'unico fattore che cambia è la preferenza temporale. Tuttavia, si potrebbe ipotizzare che la preferenza temporale sia correlata ad altre preferenze, causando una variazione negli state-prices che non sia semplicemente riconducibile al fattore di sconto. L'unica certezza è che il prezzo dell'insieme completo di Arrow-Debreu securities al tempo 0 è $[1/(1+r)]$.

Come cambiano le probabilità neutrali al rischio? Sappiamo che la somma delle probabilità di tutti gli esiti deve essere 1, affinché il concetto di probabilità rimanga valido. Tuttavia, questa somma sarà diversa da 1 (tenendo in considerazione che il prezzo dell'insieme completo dei Arrow-Debreu securities è $[1/(1+r)]$), se il tasso di interesse risulta essere diverso da zero.

Per mantenere la somma pari a 1, è necessario moltiplicare ogni state-price per $(1+r)$. Ciò ci permette di ottenere la nuova formula:

$$q(i) = a(i) \cdot (1+r), \text{ per ogni } i$$

$$\sum q(i) = 1$$

Per calcolare il prezzo privo di arbitraggio di un titolo ridondante al tempo 0, è possibile semplicemente moltiplicare il payoff di ogni stato per la corrispondente probabilità neutrale al rischio, sommare tutti questi prodotti e poi attualizzare il risultato:

$$\theta = [1/(1+r)] * \sum X(i) * q(i)$$

In termini matematici, ciò equivale a scontare l'aspettativa del payoff sotto la misura neutrale al rischio Q .

Adesso è possibile interpretare intuitivamente cosa siano le probabilità neutrali al rischio: esse rappresentano state-prices capitalizzati. Qualsiasi fattore che influisce sulla domanda e sull'offerta di un titolo Arrow, e quindi sul suo prezzo, influenzerà direttamente la corrispondente probabilità neutrale al rischio.

Ciò implica che qualsiasi premio per il rischio presente nei prezzi di mercato sarà incorporato nelle probabilità neutrali al rischio. Di conseguenza, la diffusa affermazione secondo cui “la probabilità neutrale al rischio è indipendente dalla probabilità reale” è errata. La probabilità reale incide sugli state-prices e, di conseguenza sulle probabilità neutrali al rischio. Tuttavia, se lo state-price è già noto, non è necessario stimare la probabilità reale per calcolare la probabilità neutrale al rischio, poiché quest'ultima la incorpora già.

2.1.6 Conclusione

Se un mercato è completo e privo di opportunità di arbitraggio, esiste un sistema unico di state-prices. Il prezzo privo di arbitraggio di qualsiasi payoff stocastico è dato dalla somma, su tutti gli scenari possibili, dei payoff ponderati con il rispettivo state-price. A partire dagli state-prices, possiamo definire un'unica misura di probabilità neutrale al rischio. Per farlo, dobbiamo capitalizzare gli state-prices con il tasso privo di rischio. Di conseguenza, il prezzo privo di arbitraggio di qualsiasi payoff stocastico è uguale al valore atteso del payoff sotto la misura neutrale al rischio, scontato al tasso privo di rischio. In questa parte della tesi, ho dimostrato che, da un punto di vista economico, le probabilità neutrali al rischio sono semplicemente state-prices capitalizzati con il tasso privo di rischio. Tuttavia, è importante sottolineare che il concetto di probabilità neutrale al rischio è utile solo per la determinazione dei prezzi privi di arbitraggio. Un prezzo privo di arbitraggio non è necessariamente un prezzo equo o corretto, ma semplicemente un prezzo coerente con il mercato. Da ciò, è possibile trarre due conclusioni generali: se un operatore di mercato acquista (o vende) una attività ridondante a un prezzo superiore (o inferiore) al suo prezzo privo di arbitraggio, allora esiste un modo più efficiente per esprimere la propria visione, ovvero attraverso una strategia di replica; se un operatore di mercato acquista (o vende) l'attività sottostante un titolo ridondante quando quest'ultimo è scambiato a un prezzo

inferiore (o superiore) rispetto al suo prezzo privo di arbitraggio, allora anche in questo caso la strategia di replica rappresenterebbe l'opzione più efficiente.³⁰

2.2 Il modello di Breeden-Litzenberger

2.2.1 Introduzione

L'approccio delle preferenze temporali per stato (time-state) nei confronti dell'equilibrio generale in una economia, sviluppato da [Arrow \(1964\)](#)³¹ e [Debreu \(1959\)](#)³², rappresenta uno dei quadri teorici principali per la finanza in condizioni di incertezza. Data la conoscenza dei prezzi dei titoli primitivi (ossia titoli che pagano 1\$ solo nel caso in cui si verifichi un determinato stato del mondo ad una data specifica, e zero altrimenti), il valore di qualsiasi flusso di cassa incerto può essere facilmente calcolato. Tuttavia, quanto detto finora indica che l'applicazione pratica del modello delle preferenze temporali per stato a problemi concreti di finanza, non è affatto immediata.

Il modello sviluppato da Breeden-Litzenberger può quindi essere interpretato come un tentativo di rendere operativo il modello delle preferenze di stato all'interno di una economia multi-periodo, ricavando i prezzi dei titoli primitivi dai prezzi delle opzioni call europee sugli aggregati di spesa per consumi in ciascuna data.

2.2.2 Determinazione delle probabilità neutrali al rischio a partire dai prezzi delle opzioni

All'interno del loro modello, Breeden-Litzenberger, definiscono un Arrow-Debreu security su un qualsiasi titolo o portafoglio di titoli, come un titolo che paga 1\$ in una data futura, cioè tra T periodi, se il valore del portafoglio in quel momento è S ; se il valore del portafoglio dopo T periodi non è S , il Arrow-Debreu security scade senza alcun valore. In questa sezione, andrò a spiegare come attraverso il loro modello Breeden e Litzenberger ricavino il prezzo $P(S,T)$ di un Arrow-Debreu security in funzione dei prezzi delle opzioni call europee sul portafoglio sottostante.

Un Arrow-Debreu security può essere replicato attraverso posizioni lunghe e corte su opzioni call con diversi prezzi di esercizio, tutte con una scadenza pari a T . Il prezzo del Arrow-

³⁰ Nicolas Gisin, 2010, Risk-Neutral probabilities explained - Nicolas Gisin. (n.d.), MAS Finance UZH ETHZ, CEMS MIM, M.A. HSG.

³¹ Arrow, K.J. (1964) The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing. Review of Economic Studies, 31, 91-96.

³² Gerard Debreu, 1959, Theory of Value; An axiomatic analysis of economic equilibrium, New Haven, Yale University Press.

Debreu security deve quindi corrispondere al costo del portafoglio di opzioni call che consente di ottenere il payoff desiderato. In tutto il modello, Breeden e Litzenberger assumono che non ci siano restrizioni sulle vendite allo scoperto, che non vi siano costi di transazione o imposte e che gli investitori possano prendere a prestito fondi al tasso di interesse privo di rischio.

Il modello suppone inizialmente che il valore del portafoglio di mercato tra T periodi segua una distribuzione di probabilità discreta, con possibili valori $S = 1\$, 2\$, \dots, N\$$.

Si indichi con $c(K, T)$ il vettore dei payoff di una opzione call europea sul mercato con scadenza T e prezzo di esercizio K ; il prezzo di tale opzione viene anch'esso denotato con $c(K, T)$. Si noti che, se il prezzo di esercizio di una opzione call aumenta da K a $K+1$, si verificano due cambiamenti nel vettore dei payoff: per prima cosa il payoff negli stati in cui $S = K+1$ diventa pari a 0; per seconda cosa il payoff in tutti gli stati in cui $S \geq K+2$ si riduce dell'incremento del prezzo di esercizio. Di conseguenza, nel nostro esempio, la differenza $c(K, T) - c(K+1, T)$ fornisce un payoff di 1\$ in ogni stato in cui $S \geq K+1$, mentre $c(K+1, T) - c(K+2, T)$ garantisce un payoff di 1\$ in tutti gli stati in cui $S \geq K+2$.

Un titolo che paga 1\$ solo se $S(T) = 1$ può essere costruito come:

$$[c(0, T) - c(1, T)] - [c(1, T) - c(2, T)]$$

Poiché questa combinazione di opzioni call produce un vettore di payoff di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'Arrow-Debreu security per un determinato livello del mercato tra T periodi può essere costruito in modo analogo. Dati i prezzi delle opzioni call, $c(K, T)$, il prezzo dei Arrow-Debreu securities associati al valore del sottostante, $P(S, T)$, deve essere determinato a partire dal portafoglio di replicazione costituito da opzioni call. Il portafoglio che genera un payoff di 1\$ esclusivamente se il mercato raggiunge il livello S al tempo T è composto da: una posizione lunga su un'opzione call con prezzo di esercizio di $K = S-1$; una posizione lunga su un'opzione call con prezzo di esercizio $K = S+1$; due posizioni corte su un'opzione call

con prezzo di esercizio pari a $K = S$.

In generale, se l'incremento tra i possibili valori del sottostante è ΔS , allora il differenziale $c(K, T) - c(K + \Delta S, T)$ genera un vettore di payoff nullo per $S < K$, mentre attribuisce un payoff pari a ΔS per tutti i livelli del sottostante superiori o uguali a $K + \Delta S$. Di conseguenza, il portafoglio di opzioni call che consente di ottenere un payoff di 1\$ se il mercato assume valore S , e zero altrimenti, è dato da:

$$\frac{1}{\Delta S} [(c(S - \Delta S, T) - c(S, T)) - (c(S, T) - c(S + \Delta S, T))]$$

dove il coefficiente di $c(K, T)$ in questa espressione rappresenta la quantità di opzioni call con prezzo di esercizio K e scadenza T che devono essere detenute nel portafoglio.

Poiché il portafoglio di opzioni call garantisce un payoff di 1\$ nel caso in cui S si realizzi al tempo T , il costo di questo portafoglio consiste in $P(S, T; \Delta S)$. Pertanto, con uno step pari a ΔS e dati i prezzi delle opzioni call $c(K, T)$, il rapporto $P(S, T; \Delta S) / \Delta S$ può essere espresso come:

$$\frac{P(S, T; \Delta S)}{\Delta S} = \frac{[c(S + \Delta S, T) - c(S, T)] - [c(S, T) - c(S - \Delta S, T)]}{(\Delta S)^2} \quad (1)$$

Quando ΔS tende a zero, il prezzo della strategia butterfly spread per il livello $K = S$ converge alla derivata seconda della funzione di prezzo dell'opzione call rispetto al prezzo di esercizio. In termini matematici:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{P(S, T; \Delta S)}{\Delta S} = \frac{\partial^2 c(X, T)}{\partial X^2} \quad (2)$$

Questa relazione mostra che il prezzo dell'Arrow-Debreu security può essere ottenuto come la derivata seconda del prezzo dell'opzione call rispetto al prezzo di esercizio, implicando che le probabilità neutrali al rischio possono essere derivate direttamente dai prezzi di mercato delle opzioni.

Con una distribuzione continua di S , la probabilità di qualsiasi livello specifico di S è formalmente pari a zero; tuttavia, S possiede una funzione di densità di probabilità. In questo contesto, la funzione di prezzo $P(S, T)$ è analoga a una funzione di densità come evidenziato dal limite sopra riportato. Di conseguenza: la funzione di prezzo derivata in precedenza

rappresenta il valore di un Arrow-Debreu security su S con scadenza in T periodi nel caso discreto; mentre, nel caso continuo, la funzione di prezzo è ottenuta assumendo che il prezzo dell'opzione call sia due volte differenziabile rispetto al prezzo di esercizio.

A partire dalla funzione di prezzo dei Arrow-Debreu securities sul portafoglio sottostante, è possibile determinare i valori degli strumenti derivati basati su tale portafoglio. Se un titolo f ha payoffs q_T^f nel tempo, che dipendono unicamente dal livello del mercato in ciascun periodo, ovvero $q_T^f = q_T^f(S_T)$, allora il suo prezzo deve essere:

$$\begin{aligned} V^f &= \int_T \int_{S_T} q_T^f(S_T) P(S, T) dT \\ &= \int_T \int_{S_T} q_T^f(S_T) c_{xx}(X = S, T) dS_T dT \end{aligned} \quad (3)$$

dove $P(S, T)$ è stato sostituito dall'equazione (2). La derivata seconda della funzione di prezzo dell'opzione call rispetto al prezzo di esercizio, valutata per $K = S$, è indicata come $c_{xx}(K = S, T)$. L'equazione (3) deve essere vera per garantire la possibilità di arbitraggio attraverso la creazione di Arrow-Debreu securities sul mercato mediante portafogli di opzioni call (esistenti o costruibili), per poi replicare i pagamenti del titolo f attraverso portafogli di Arrow-Debreu securities su S in T .

La derivazione del risultato di Breeden e Litzenberger non richiede alcuna ipotesi sulla dinamica del prezzo del sottostante. A parte l'ipotesi di mercati perfetti (assenza di vincoli sulle vendite allo scoperto, assenza di costi di transazione o imposte e possibilità di prestito al tasso privo di rischio), l'unico requisito per stimare la funzione $q(S_T)$ è che il prezzo dell'opzione $c(K, T)$ sia due volte differenziabile rispetto al prezzo di esercizio. Inoltre, non è necessaria alcuna ipotesi sulle preferenze o sulle credenze degli investitori, in quanto i prezzi delle opzioni sono espressi in termini di neutralità al rischio rispetto al sottostante.³³ Dopo aver analizzato le probabilità neutrali al rischio e compreso l'approccio di Breeden e Litzenberger per estrapolare le probabilità neutrali al rischio, il quale risulta essere alla base di molte teorie successive, nei prossimi paragrafi elaborerò in modo più generale la relazione tra i prezzi delle opzioni e le funzioni di densità neutrale al rischio (RND function).

³³ Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621–651. <http://www.jstor.org/stable/2352653>

2.3 La relazione tra i prezzi delle opzioni e le funzioni di densità neutrali al rischio

Inizio questo paragrafo osservando che i mercati dei derivati rappresentano una fonte ricca di informazioni per valutare il sentiment di mercato. Infatti, grazie alla loro natura prospettica, i prezzi di derivati, quali ad esempio le opzioni, incorporano in modo efficiente le aspettative del mercato sui prezzi futuri degli asset sottostanti. Ad esempio, la varianza implicita nel prezzo di un'opzione riflette la stima ex ante del mercato sulla volatilità dei rendimenti dell'asset sottostante per la durata residua dell'opzione. Inoltre, è possibile derivare i momenti superiori della distribuzione dei valori futuri dell'asset a partire dai prezzi di mercato delle opzioni europee. Tali informazioni possono essere estratte sotto forma di distribuzione di probabilità neutrale al rischio, ex-ante, del prezzo dell'asset sottostante alla data di scadenza delle opzioni.

In precedenza, ho trattato il fatto che le opzioni call europee aventi il medesimo sottostante e la stessa scadenza, ma prezzi di esercizio differenti, possono essere combinate per replicare altri Arrow-Debreu securities, ossia strumenti finanziari i cui rendimenti dipendono dallo stato dell'economia in un determinato momento futuro T . I prezzi di tali strumenti riflettono la valutazione degli investitori sulle probabilità che i diversi stati dell'economia si verifichino in futuro.

L'intuizione alla base di ciò può essere colta osservando che, la differenza tra il prezzo di due opzioni call con prezzi di esercizio adiacenti, riflette il valore attribuito alla possibilità di esercitare l'opzione quando il prezzo dell'asset sottostante si trova tra i due livelli di strike. Questo valore dipende dalla probabilità che il prezzo del sottostante si trovi in tale intervallo. Di conseguenza, i prezzi delle opzioni call europee con una data di scadenza fissa, ma con un insieme di prezzi di esercizio differenti, sono legati ai pesi che l'agente neutrale al rischio assegna ai possibili esiti per il prezzo finale dell'asset sottostante.

Come descritto in precedenza, il prezzo dei Arrow-Debreu securities è direttamente proporzionale alle probabilità neutrali al rischio associate a ciascuno stato. Dato il loro immenso valore informativo, è un limite significativo il fatto che essi non siano scambiati direttamente sui mercati, rendendone il prezzo non osservabile. Tuttavia, come affermato nei paragrafi precedenti, è possibile replicare tali strumenti mediante una combinazione appropriata di opzioni call europee, nota come strategia butterfly spread. Il prezzo di un titolo Arrow, di conseguenza, in un determinato stato dell'economia, è pari al costo di tale strategia

centrata su quello specifico stato.

Come già descritto all'interno di questa tesi, Breeden e Litzenberger (1978) hanno dimostrato che, se il prezzo dell'asset sottostante, al tempo T , segue una distribuzione di probabilità continua, il Arrow-Debreu security relativo allo stato in cui il sottostante è pari a S , è dato dalla derivata seconda della funzione di prezzo dell'opzione call europea rispetto al prezzo di esercizio, $\partial^2 c / \partial X^2$, tenendo conto che $K = S$. Applicando questo risultato all'intero insieme di stati, $\partial^2 c / \partial X^2$ rappresenta la funzione di prezzo di stato (anche state pricing function, rappresenta il valore di un Arrow-Debreu security per ogni possibile stato del mondo). Ne consegue che $\partial^2 c / \partial X^2$ è direttamente proporzionale alla funzione di densità di probabilità neutrale al rischio dell'asset sottostante (risk-neutral probability density function).³⁴

2.3.1 Un primo approccio : “il modello di Breeden e Litzenberger”

L'approccio di Breeden e Litzenberger (1978), sviluppato all'interno del modello delle preferenze temporali per stato, rappresenta il metodo più generale per la determinazione del prezzo dei Arrow-Debreu securities.

Il payoff unitario di un Arrow-Debreu security in corrispondenza di un dato stato futuro $S_T = K$, può essere replicato tramite una combinazione di opzioni europee. Per essere precisi, come visto in precedenza, si ottiene vendendo due opzioni call con prezzo di esercizio $K = S_T$ e acquistando due call, una con prezzo di esercizio $S_T - \Delta S_T$ e l'altra con prezzo di esercizio $S_T + \Delta S_T$, dove ΔS_T rappresenta l'intervallo tra i prezzi di esercizio delle call adiacenti.

Come visto in precedenza, ripropongo il payoff di tale butterfly spread, dato da:

$$\frac{[c(S + \Delta S, T) - c(S, T)] - [c(S, T) - c(S - \Delta S, T)]}{(\Delta S)}$$

dove $c(K, T)$ rappresenta il prezzo di un'opzione call europea con prezzo di esercizio K e scadenza T .

Se si indica con $P(S, T; \Delta S)$ il prezzo al tempo T di un butterfly spread con $S_T = K$, allora il

³⁴ Bhupinder Bahra, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH

rapporto tra $P(S, T; \Delta S)$ e lo step ΔS può essere espresso, in termini dei prezzi delle opzioni sottostanti, come un quoziente incrementale di secondo ordine. Come abbiamo visto in precedenza, al tendere di ΔS a zero, il prezzo del butterfly spread converge alla derivata seconda della funzione di prezzo delle call rispetto al prezzo di esercizio. Ne consegue che, se fossimo in grado di prezzare tali strategie lungo l'intero continuum degli stati, con step infinitesimali tra i prezzi di esercizio, otterremmo la funzione di prezzo di stato completa. Il prezzo di un Arrow-Debreu security può anche essere espresso come il valore attuale di un payoff futuro atteso, ovvero il valore attuale di 1\$, ponderato per la probabilità neutrale al rischio che lo stato corrispondente si verifichi, ossia $S_T = K$. Ciò implica che la derivata seconda della funzione di prezzo delle opzioni call rispetto al prezzo di esercizio sia uguale alla funzione di densità neutrale al rischio (RND function) del sottostante, scontata al tasso risk-free:

$$\frac{\partial^2 c(X, T)}{\partial X^2} = e^{-rT} q(S_T)$$

dove, quindi, r è il tasso di interesse privo di rischio (annualizzato) per il periodo T , e $q(S_T)$ è la funzione di densità neutrale al rischio valutata in S_T .

In assenza di arbitraggio, la funzione $c(K, T)$ è convessa e monotona decrescente rispetto al prezzo di esercizio. Questo implica che tutti i butterfly spreads costruibili lungo il continuum degli stati abbiano un prezzo positivo, il che si traduce in una funzione di densità neutrale al rischio strettamente positiva.

Nel caso, invece, in cui esistessero delle opportunità di arbitraggio in alcuni stati, allora la funzione $c(K, T)$ non sarebbe monotona decrescente e convessa rispetto al prezzo di esercizio e i valori della funzione di densità neutrale al rischio $q(S_T)$ sarebbero negativi in corrispondenza di tali stati.

2.3.2 La formula di Black Scholes (1973) e la sua funzione di densità neutrale al rischio (RND function)

In questa sezione, rivedo le ipotesi del modello classico di determinazione del prezzo delle opzioni di Black-Scholes (BS) e analizzo come esse conducano a una funzione di densità neutrale al rischio di tipo log normale.

Per calcolare il prezzo di un'opzione è necessario formulare un'ipotesi sull'evoluzione del

prezzo dell'attività sottostante nel corso della vita dell'opzione, e quindi determinare la sua funzione di densità neutrale al rischio alla data di scadenza dell'opzione, condizionata a S . Il modello di Black-Scholes assume che il prezzo dell'attività sottostante segua un processo stocastico noto come moto browniano geometrico (GBM) con un tasso di drift atteso istantaneo pari a μS e un tasso di varianza istantanea pari a $\sigma^2 S^2$:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

dove μ e σ sono costanti e dW rappresenta gli incrementi di un processo di Wiener.

Applicando Ito's Lemma a questa equazione si ottiene il seguente risultato:

$$\ln S_T \sim N [\ln S + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T, \sigma T^{1/2}]$$

dove $N(\alpha, \beta)$ denota una distribuzione normale con media α e deviazione standard β . Di conseguenza, l'ipotesi del moto browniano geometrico implica che la funzione di densità neutrale al rischio $q(S_T)$ del prezzo terminale S_T , sia lognormale con parametri α e β . La corrispondente funzione di densità log normale è data da:

$$q(S_T) = \frac{1}{S_T \beta \sqrt{2\pi}} e^{[-(\ln S - \alpha)^2 / 2\beta^2]}$$

Cox e Ross (1976) dimostrano che le opzioni possono essere prezzate come se tutti gli investitori fossero neutrali al rischio, imponendo che il tasso di rendimento atteso sull'attività sottostante μ sia uguale al tasso di interesse privo di rischio r .

La formula derivata da Black-Scholes (1973) per il prezzo di un'opzione call europea è la seguente:

$$c(K, T) = SN(d_1) - e^{-rT}KN(d_2)$$

dove $N(x)$ rappresenta la funzione di ripartizione di una variabile normale standardizzata, ossia la probabilità che una variabile casuale normale standardizzata assuma un valore inferiore a x .

Poiché il prezzo di un'opzione non dipende dal parametro μ (ossia dal rendimento atteso dell'attività sottostante), a meno che tutti gli investitori non siano universalmente neutrali al rischio (caso in cui $\mu = r$), la distribuzione recuperata dai prezzi delle opzioni non rappresenta la vera distribuzione del sottostante, ma piuttosto la distribuzione neutrale al rischio.

2.3.3 La curva smile della volatilità implicita

Tra i parametri che determinano il prezzo di un'opzione, l'unico non osservabile direttamente al tempo T è la volatilità del rendimento dell'asset sottostante per il periodo residuo di vita dell'opzione (σ). Tuttavia, è possibile stimarne il valore a partire dai prezzi delle opzioni scambiate sul mercato: dato il prezzo di un'opzione, si può risolvere un opportuno modello di pricing delle opzioni per σ , ottenendo così una stima di mercato della volatilità futura dei rendimenti del sottostante. Questa stima di σ è nota come volatilità implicita.

Secondo il modello BS, la volatilità implicita dovrebbe essere la stessa per tutte le opzioni aventi il medesimo sottostante e la stessa data di scadenza, indipendentemente dal prezzo di esercizio. Tuttavia, nella realtà dei mercati, la volatilità implicita è generalmente osservata come una funzione convessa del prezzo di esercizio, comunemente denominata smile della volatilità. In altri termini, gli operatori di mercato assegnano volatilità implicite più elevate alle opzioni con prezzi di esercizio inferiori a S (call in the money e put out of the money) e a quelle con prezzi di esercizio superiori a S (call out of the money e put in the money), rispetto alle opzioni at the money (call e put con strike pari a S).

E' opportuno distinguere tra due fenomeni, ossia volatility smile e volatility skew. Il primo, caratterizzato da una forma a "U" simmetrica, è tipicamente osservato nei mercati delle opzioni su valute, dove la probabilità di apprezzamento e deprezzamento del tasso di cambio sono percepite come più bilanciate. Al contrario, il secondo è più comunemente riscontrato nelle opzioni su indici ed azioni, dove le volatilità implicite tendono a decrescere con l'aumentare dello strike price.

L'esistenza dello smile della volatilità implica che gli operatori di mercato adottino ipotesi più complesse rispetto al moto browniano geometrico (GBM) per descrivere la dinamica dei prezzi dell'attività sottostante. Di conseguenza, attribuiscono probabilità differenti ai possibili valori finali del prezzo dell'attività sottostante rispetto a quelle compatibili con una distribuzione log normale. Il grado di convessità dello smile fornisce informazioni sulla misura in cui la funzione di densità neutrale al rischio di mercato si discosta dalla RND log normale sottostante al modello di BS. In particolare, maggiore è la convessità dello smile, maggiore è la probabilità che il mercato assegna a eventi estremi per ST. Questo fenomeno si traduce in una funzione RND con code più spesse rispetto a quelle di una distribuzione log normale (l'evidenza empirica della presenza di code più spesse, o leptocurtosi, nei prezzi

azionari fu inizialmente osservata da Fama nel 1965).

Inoltre, l'inclinazione dello smile riflette l'asimmetria (skewness) della funzione RND di mercato: uno smile con pendenza positiva (negativa) implica una funzione RND più (meno) asimmetrica positivamente rispetto alla funzione RND log normale che emergerebbe in presenza di uno smile piatto.

Qualsiasi variazione nella forma dello smile si riflette in variazioni corrispondenti nella pendenza e nella convessità della funzione di pricing delle call. A sua volta, la pendenza e la convessità dello smile, o della funzione di pricing delle call, possono essere tradotte nello spazio delle probabilità per ricavare la funzione RND di mercato implicita (non log normale) per ST.

Nei prossimi paragrafi verranno esaminate le tecniche per effettuare questa trasformazione.³⁵

2.4 Tecniche alternative per stimare le funzioni RND implicite

In questa sezione, descrivo varie metodologie per stimare le funzioni di densità neutrali al rischio a partire dai prezzi delle opzioni.

L'applicazione del risultato di Breeden e Litzenberger (1978), che costituisce la base di tutte queste tecniche, richiede l'esistenza di un continuum di opzioni europee con la stessa scadenza, scritte su un unico sottostante e disponibili per un intervallo di prezzi d'esercizio che va da zero all'infinito. Purtroppo, poiché i contratti di opzione vengono scambiati solo per un insieme discreto di prezzi di esercizio e per un intervallo limitato attorno allo strike at the money, esistono molte funzioni RND che possono adattarsi ai prezzi di mercato. Di conseguenza, tutte le procedure per stimare le funzioni RND consistono essenzialmente nell'interpolare dei prezzi d'esercizio osservati e nell'effettuare una extrapolazione al di fuori di tale intervallo per modellare le probabilità nelle code della distribuzione. Prima di descrivere alcune di queste procedure, inizio illustrando un metodo semplice per approssimare la funzione RND implicita attraverso un istogramma neutrale al rischio implicito.

³⁵ Bhupinder Bahra, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH

2.4.1 Un semplice approccio : istogrammi neutrali al rischio

Il prezzo del butterfly spread, illustrato in precedenza, può essere attualizzato al tasso privo di rischio per ottenere un'approssimazione della probabilità neutrale al rischio del sottostante:

$$q(S_T) = e^{rT} \frac{[c(S + \Delta S, T) - c(S, T)] - [c(S, T) - c(S - \Delta S, T)]}{\Delta S}$$

L'applicazione di questa equazione ai prezzi delle opzioni call osservati su un intervallo di prezzi d'esercizio, consente di ottenere l'istogramma neutrale al rischio implicito del sottostante.

Uno dei limiti di questo metodo è che presuppone che le opzioni vengano negoziate a prezzi d'esercizio equidistanti. Inoltre, non esiste un metodo sistematico per modellare le code dell'istogramma, che potrebbero non essere osservabili a causa del ristretto intervallo di strike disponibili sul mercato.

Un ulteriore problema è che il metodo non può correggere eventuali irregolarità nella funzione di prezzo delle call o la presenza di opportunità di arbitraggio. I prezzi osservati talvolta mostrano piccole ma improvvise variazioni nella convessità rispetto agli strike, così come lievi gradi di concavità rispetto al prezzo d'esercizio. Queste anomalie portano a forti variazioni nelle probabilità associate a intervalli di strike adiacenti, o addirittura a probabilità negative. Tali irregolarità possano derivare da errori di misurazione, in particolare quando si utilizzano i prezzi medi tra bid e ask invece dei prezzi effettivamente negoziati. Nonostante questi limiti, il metodo dell'istogramma neutrale al rischio, fornisce una prima approssimazione delle funzioni RND implicite.³⁶

2.4.2 Interpolazione della funzione di prezzo delle opzioni call: approcci diretti ed indiretti

A prima vista, il metodo più ovvio per stimare la funzione RND implicita consiste nell'applicare direttamente il risultato di Breeden e Litzenberger (1978) alla funzione di prezzo delle opzioni call. Se esistessero opzioni con prezzi di esercizio infinitamente dense

³⁶ Bhupinder Bahra, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH

sull'asse reale positivo e non vi fossero violazioni di arbitraggio tra queste opzioni, allora esisterebbe un'unica distribuzione di probabilità neutrale al rischio che potrebbe essere calcolata con le tecniche proposte da Breeden e Litzenberger.

Tuttavia, poiché i prezzi osservati delle opzioni sono disponibili solo per un insieme discreto di prezzi d'esercizio, il valore minimo dello strike disponibile è ben al di sopra di zero, mentre il massimo è ben al di sotto dell'infinito. Di conseguenza, esistono molte distribuzioni neutrali al rischio che possono essere coerenti con i prezzi osservati. Vari metodi permettono di selezionare tra queste distribuzioni, essenzialmente interpolando tra i prezzi d'esercizio osservati ed estrapolando al di fuori del loro intervallo.

[Bates \(1991\)](#)³⁷ utilizza una spline cubica, ovvero una funzione polinomiale a tratti di terzo grado, per interpolare i prezzi delle opzioni call osservati, soggetti a vincoli. Tuttavia, questa tecnica richiede un elevato numero di gradi di libertà a causa della complessa forma della funzione di prezzo delle call.

[Ait-Sahalia e Lo \(1998\)](#)³⁸ propongono un approccio non parametrico basato sulla regressione kernel, per stimare la funzione di prezzo delle call. Questo metodo è molto ambizioso in quanto tenta di stimare contemporaneamente tutti i determinanti del prezzo delle opzioni (S , K , r , σ e T) su una serie temporale di prezzi. Tuttavia, la sua implementazione è poco pratica, poiché richiede una enorme quantità di dati.

Un'alternativa è stata proposta da [Shimko \(1993\)](#)³⁹, il quale suggerisce di effettuare l'interpolazione della funzione di prezzo delle call non direttamente, ma attraverso il dominio dello smile della volatilità. Notando che le volatilità implicite derivate dal modello di BS mostrano una maggiore regolarità rispetto ai prezzi delle opzioni stesse, Shimko assume che la volatilità implicita segua una funzione quadratica rispetto al prezzo d'esercizio all'interno dell'intervallo dei prezzi di esercizio negoziati. Per ottenere una funzione continua del prezzo delle call, utilizza la formula di Black-Scholes per convertire la volatilità implicita interpolata nei corrispondenti prezzi delle opzioni. È importante sottolineare che l'uso della formula di BS in questo contesto non implica che il modello sia necessariamente

³⁷ Bates, D. S. (1991). The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets. *The Journal of Finance*, 46(3), 1009–1044. <https://doi.org/10.2307/2328552>

³⁸ Ait-Sahalia, Y. and Lo, A. (1998) Non-Parametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *The Journal of Finance*, 53, 499-547.

³⁹ Shimko, David. (1993). Bounds of probability. *Risk*. 6. 33-37.

valido; essa viene impiegata semplicemente come uno strumento matematico per tradurre i dati tra il dominio della volatilità implicita e quello dei prezzi delle opzioni. Una volta ottenuta la funzione interpolata, è possibile calcolarne la derivata seconda rispetto al prezzo d'esercizio per ricavarne la funzione RND implicita nell'intervallo compreso tra lo strike più basso e quello più alto osservato.

Per modellare le code della distribuzione, Shimko propone un metodo di estrapolazione basato sull'ipotesi che le estremità della funzione RND possano essere approssimate da una distribuzione log normale. Questo viene realizzato facendo coincidere la frequenza (densità di probabilità) e la frequenza cumulativa della distribuzione RND osservata con una distribuzione log normale nelle due code, in modo da garantire la continuità della densità e della funzione di distribuzione cumulativa nei punti di transizione tra la parte osservabile e le estremità della distribuzione.

Nonostante la sua utilità, il metodo di estrapolazione di Shimko presenta alcune criticità. Un aspetto problematico è la assegnazione arbitraria di una struttura di volatilità costante allo smile della volatilità al di fuori dell'intervallo dei prezzi di esercizio negoziati, il che implica che lo smile della volatilità rimanga invariato nelle regioni non osservabili. Ciò potrebbe non riflettere accuratamente il comportamento reale delle code della distribuzione. Inoltre, dato che la distribuzione finale è ottenuta combinando tre segmenti distinti, la parte centrale osservata e le due code log normali, non sempre si ottiene una transizione perfettamente fluida tra le diverse sezioni della distribuzione.⁴⁰

2.4.3 Adattamento di una forma parametrica per la funzione RND implicita ai prezzi delle opzioni

Un'altra tecnica per stimare le funzioni di distribuzione della probabilità neutrale al rischio consiste nel formulare ipotesi sulla forma funzionale della funzione RND stessa e nel recuperare i relativi parametri minimizzando la distanza tra i prezzi delle opzioni osservati e quelli generati alla forma parametrica assunta. Come osservano Melick e Thomas (1994), partire da una ipotesi sulla funzione RND terminale, piuttosto che dal processo stocastico attraverso cui si evolve il prezzo del sottostante, rappresenta un approccio più generale.

⁴⁰ Bhupinder Bahra, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH

I prezzi delle opzioni europee call e put al tempo T possono essere espressi come la somma attualizzata di tutti i payoff futuri attesi:

$$c(K, T) = e^{-rT} \int_K^{\infty} q(S_T)(S_T - K) dS_T \quad (1)$$

$$p(K, T) = e^{-rT} \int_0^K q(S_T)(K - S_T) dS_T \quad (2)$$

in teoria, in queste equazioni può essere utilizzata qualsiasi forma funzionale per la funzione di densità $q(S_T)$, e i suoi parametri possono essere ricavati attraverso ottimizzazione numerica. Tuttavia, il problema derivante dall'uso di modelli diversi da quello gaussiano (a varianza finita) è che la distribuzione del prezzo del sottostante varia al variare dell'orizzonte temporale. In queste circostanze, e considerando che le distribuzioni osservate dei prezzi degli asset finanziari risultano essere distribuzioni log normali, sembra economicamente plausibile adottare l'approccio suggerito da Richey (1990) e assumere che $q(S_T)$ sia la somma ponderata di k funzioni di densità log normali, ossia:

$$q(S_T) = \sum_{i=1}^k [\theta_i L(\alpha_i, \beta_i; S_T)] \quad (3)$$

dove $L(\alpha_i, \beta_i; S_T)$ rappresenta la i -esima funzione di densità log normale nella combinazione a k componenti, con parametri α_i e β_i ; θ_i è il peso assegnato a ciascuna distribuzione log normale, con $\theta_i > 0$ per ogni i . Questi parametri determinano la forma complessiva della funzione RND.

Dato che nei principali mercati le opzioni vengono negoziate solo per un intervallo relativamente ristretto di prezzi di esercizio, esistono limiti al numero di parametri di distribuzione che possono essere stimati. Per questo motivo, si utilizza una combinazione di due distribuzioni log normali, riducendo il numero di parametri da stimare a cinque. Sotto queste ipotesi, sostituendo l'equazione (3) nelle equazioni (1) e (2), le funzioni di pricing delle opzioni call e put diventano:

$$c(K, T) = e^{-rT} \int [\theta L(\alpha_1, \beta_1; S_T) + (1 - \theta) L(\alpha_2, \beta_2; S_T)] (S_T - K) dS_T \quad (4)$$

$$p(K, T) = e^{-rT} \int [\theta L(\alpha_1, \beta_1; S_T) + (1 - \theta) L(\alpha_2, \beta_2; S_T)] (K - S_T) dS_T \quad (5)$$

per valori fissati di K e T , e per un insieme di valori dei cinque parametri della distribuzione e del tasso privo di rischio r , queste due equazioni possono essere usate per ottenere i valori teorici dei prezzi $c(K, T)$ e $p(K, T)$.

Successivamente, è necessario sostituire le funzioni di densità delle distribuzioni log normali:

$$L(\alpha_1, \beta_1; S_T) = \frac{1}{S_T \beta_1 2\pi^{1/2}} e^{[-(\ln S - \alpha_1)^2 / 2\beta_1^2]}$$

$$L(\alpha_2, \beta_2; S_T) = \frac{1}{S_T \beta_2 2\pi^{1/2}} e^{[-(\ln S - \alpha_2)^2 / 2\beta_2^2]}$$

Bahra (1997) ha dimostrato che applicando due volte un cambiamento di variabile è possibile trasformare distribuzioni log normali in distribuzioni normali. Le equazioni (4) e (5) ammettono soluzioni in forma chiusa:

$$c(K, T) = e^{-rT} \{ \theta [e^{\alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_1^2} (N(d_1) - KN(d_2))] + (1 - \theta) [e^{\alpha_2 + \frac{1}{2} \beta_2^2} (N(d_3) - KN(d_4))] \}$$

$$p(K, T) = e^{-rT} \{ \theta [-e^{\alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_1^2} (N(-d_1) - KN(-d_2))] + (1 - \theta) [-e^{\alpha_2 + \frac{1}{2} \beta_2^2} (N(-d_3) - KN(-d_4))] \}$$

La funzione RND viene quindi stimata minimizzando la somma degli errori quadratici tra i prezzi delle opzioni ottenuti dal modello ed i prezzi di mercato delle opzioni su tutti i prezzi di esercizio disponibili. Il problema di minimizzazione è il seguente:

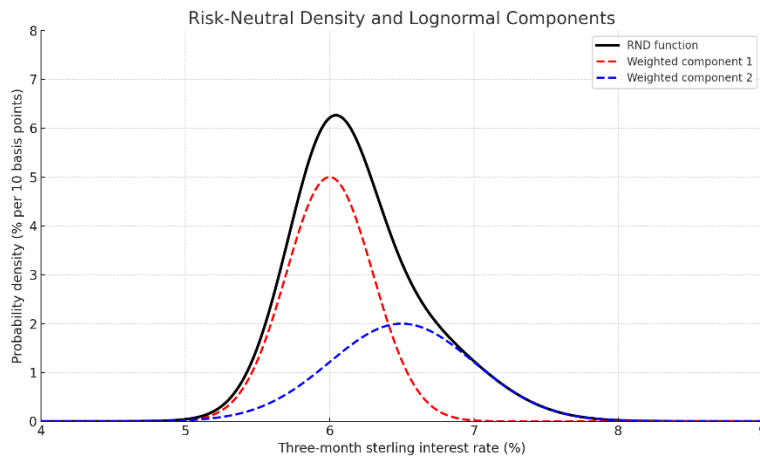
$$\mathbf{Min}_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta} \sum_{i=1}^n [c(K_i, T) - c^{\text{market}}]^2 + \sum_{i=1}^n [p(K_i, T) - p^{\text{market}}]^2 + [\theta e^{\alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_1^2} + (1 - \theta) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2} \beta_2^2} - e^{-rT} S]^2$$

Soggetto alle condizioni $\beta_1, \beta_2 > 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$, su tutto l'intervallo dei prezzi di esercizio osservati $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$.

I primi due termini esponenziali nell'ultima parentesi di questa equazione rappresentano la media delle funzioni RND log normali. La loro somma ponderata rappresenta dunque la media della funzione RND complessiva.

La figura sottostante mostra un esempio di funzione RND implicita derivata utilizzando l'approccio della combinazione di due distribuzioni log normali. Inoltre, illustra le singole funzioni di densità log normale che compongono la funzione RND finale.⁴¹

⁴¹ Kazuhisa Matsuda, 2004, Dynamics of Risk-Neutral Densities Implied by Option Prices, Department of Economics, The Graduate Center, The City University of New York



È importante ricordare che le funzioni di densità implicite derivate sono neutrali al rischio, il che significa che esse coincidono con le vere funzioni di densità di mercato solo nel caso in cui gli investitori siano effettivamente neutrali al rischio. Nella realtà, gli investitori tendono probabilmente ad essere avversi al rischio, e i prezzi delle opzioni incorporano non solo le loro preferenze nei confronti del rischio, ma anche le loro aspettative sui possibili esiti futuri. Per distinguere tra questi due fattori, sarebbe necessario specificare la funzione di utilità aggregata del mercato (che non è osservabile) ed effettuare una stima del corrispondente coefficiente di avversione al rischio. Tuttavia, anche qualora il mercato richieda un premio per l'assunzione del rischio, la vera funzione di densità implicita di mercato potrebbe non differire in modo significativo dalla funzione di densità neutrale al rischio, almeno in alcuni mercati. Ad esempio, [Rubinstein \(1994\)](#)⁴² converte una funzione di densità neutrale al rischio relativa ad un indice azionario in una funzione di densità “consensus subjective” sotto l'ipotesi che l'investitore massimizzi la propria utilità attesa della ricchezza con il modello CRRA (avversione relativa al rischio costante). I suoi risultati mostrano che, per premi al rischio di mercato ipotizzati tra il 3,3% ed il 5%, la distribuzione soggettiva risulta solo leggermente spostata verso destra rispetto alla distribuzione neutrale al rischio, mentre le forme qualitative delle due distribuzioni rimangono molto simili.⁴³

⁴² Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771–818. <https://doi.org/10.2307/2329207>

⁴³ Bhupinder Bahra, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH

CAPITOLO 3: Evidenze teoriche ed empiriche delle distribuzioni neutrali al rischio implicite nelle opzioni

3.1 Il dataset della FED di Minneapolis e come viene costruito

La capacità di prevedere i futuri movimenti dei prezzi degli asset riveste un'importanza inestimabile per quegli investitori che mirano a massimizzare i rendimenti. Una delle metodologie adottate, come precedentemente notato, consiste nell'impiego di distribuzioni implicite di mercato, ricavate dai prezzi delle opzioni. L'analisi presentata in questa tesi intende verificare se le statistiche riassuntive e le distribuzioni neutrali al rischio possiedano un potere predittivo sui rendimenti, la volatilità ed i reversals futuri dell'S&P500. La Federal Reserve Bank di Minneapolis calcola tali probabilità neutrali al rischio per vari asset, incluso l'indice S&P500. In particolare, la Fed di Minneapolis fornisce stime bisettimanali di queste probabilità, per movimenti di mercato di diversa entità su orizzonti temporali di 6 e 12 mesi. La Fed generalmente procede al calcolo delle distribuzioni di probabilità per circa sedici differenti strumenti, alcuni per diverse scadenze. Per ciascun strumento vengono pubblicati nove indicatori statistici: la media, la deviazione standard, la skewness, la kurtosis, il decimo, il cinquantesimo ed il novantesimo percentile, oltre alla probabilità di un significativo incremento o decremento del prezzo nei successivi n giorni. I dati relativi alla maggior parte degli asset partono dal 2010, mentre per alcuni, come ad esempio l'S&P500, sono disponibili già a partire dal 2007. La Fed ha pubblicato i dati su base bisettimanale fino al 17 aprile 2014, e successivamente su base settimanale. La maggior parte dei dati viene calcolata su opzioni a breve termine, con scadenza a tre mesi, fatta eccezione per quelle sull'indice S&P500, per le quali si considerano scadenze più lunghe. Prima di portare avanti la mia analisi, risulta fondamentale comprendere la metodologia adottata dalla Fed di Minneapolis per la costruzione di queste distribuzioni di probabilità neutrali al rischio.

La Fed stima le funzioni di densità di probabilità neutrali al rischio (RND) per una varietà di asset class utilizzando una variante della tecnica sviluppata da [Shimko \(1993\)](#)⁴⁴. Tale procedura comporta l'adattamento di una curva alle volatilità implicite di una serie di opzioni, esprimendo la volatilità in funzione del prezzo d'esercizio. Le volatilità implicite vengono successivamente convertite in prezzi continui delle opzioni call, e la distribuzione

⁴⁴ Shimko, David. (1993). Bounds of probability. Risk. 6. 33-37.

di densità delle probabilità neutrali al rischio del sottostante viene ottenuta mediante il metodo Breeden e Litzenberger (1978).

I dati impiegati dalla Fed per la procedura di Shimko si basano su transazioni effettive, contrapposte alle semplici quotazioni bid/ask fornite dai dealer. Per implementare tale procedura, la Fed necessita di un numero sufficiente di osservazioni sui prezzi delle opzioni, al fine di adattare correttamente la curva di volatilità. Inoltre, tali osservazioni devono coprire una porzione consistente dell'intervallo dei prezzi di esercizio disponibili, in modo da minimizzare la porzione della funzione di densità che si fonda su estrapolazioni piuttosto che su dati empirici. Di conseguenza, la Fed utilizza i prezzi derivanti da transazioni riguardo opzioni effettuate nell'arco di una finestra temporale di cinque giorni.

Vado ora a delineare nel dettaglio i passaggi utilizzati dalla Fed di Minneapolis per la generazione delle funzioni di densità di probabilità neutrali al rischio per i singoli asset (a titolo esemplificativo, la presente descrizione si concentra sulle opzioni aventi come asset sottostante l'indice S&P500):

- i) La Fed identifica l'opzione la cui scadenza avviene approssimativamente a sei mesi dalla data corrente. Nel caso di opzioni emesse su base trimestrale, ciò implica il trattamento di scadenze che variano da cinque a sette mesi. Una volta individuata l'opzione idonea, la Fed acquisisce, tramite Bloomberg, i prezzi di chiusura relativi a tale opzione per tutti i prezzi d'esercizio negoziati nell'arco di una finestra temporale di cinque giorni. Poiché Bloomberg fornisce talvolta, in determinati mercati, i prezzi di regolamento di fine giornata in assenza di operazioni di trading, la Fed richiede che il volume corrispondente di ciascuna opzione, nel giorno in esame, sia superiore a zero.
- ii) La Fed calcola il tempo alla scadenza di ciascuna opzione come il numero di giorni intercorsi tra la data del prezzo (price date) e quella di scadenza, basandosi su un calendario 30/360 (12 mesi ciascuno di 30 giorni).
- iii) La Fed associa a ciascuna opzione un tasso privo di rischio mediante l'interpolazione della curva dei rendimenti dei Titoli di Stato statunitensi (Treasury bonds) vigente nella data di prezzo specifica. Tale interpolazione lineare della curva viene eseguita per adeguarla alla scadenza di ciascuna opzione, esprimendo ogni valore come un tasso di interesse a capitalizzazione continua.

- iv) Tutte le opzioni put vengono trasformate in opzioni call utilizzando la put-call parity appropriata per la asset class a cui si sta facendo riferimento. Nel caso delle opzioni sull'indice S&P500, la Fed adotta la seguente relazione:

$$C = P + Se^{-\delta T} - Ke^{-rT}$$

Dove C rappresenta il prezzo della call, P quello della put, S il prezzo spot del sottostante, K il prezzo d'esercizio, r il tasso di interesse a capitalizzazione continua, δ il rendimento da dividendo a capitalizzazione continua e T il tempo alla scadenza.

- v) La Fed calcola la volatilità implicita, σ , di ciascuna opzione impiegando un modello di valutazione delle opzioni adeguato alla asset class. In particolare, per le opzioni su S&P500, la Fed utilizza il modello Black-Scholes standard:

$$C = Se^{-\delta T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

dove $N(x)$ denota la funzione di distribuzione cumulativa della variabile normale standardizzata, e risolve l'equazione per ottenere la volatilità implicita. Vengono eliminate tutte le osservazioni per le quali il prezzo della call non consente il calcolo della volatilità.

- vi) Successivamente, la Fed riduce il dataset selezionando un'unica opzione per ciascun prezzo d'esercizio. Nel caso in cui siano presenti osservazioni multiple, essa opta per la data di prezzo più recente e assegna priorità alle opzioni call rispetto alle opzioni put trasformate se il prezzo d'esercizio è superiore al prezzo spot corrente; viceversa, quando il prezzo d'esercizio è inferiore al prezzo spot, viene data priorità alle opzioni put trasformate. In sostanza, la Fed tratta il periodo di cinque giorni come se rappresentasse una singola giornata di negoziazione, selezionando il "prezzo finale" per ciascun prezzo d'esercizio.
- vii) In seguito, La Fed utilizza una tecnica di smoothing della curva, applicando il metodo della cubic-spline alle coppie (prezzo d'esercizio, volatilità implicite), andando così ad interpolare diverse centinaia di valori di volatilità implicita tra il prezzo d'esercizio minimo e quello massimo. I valori interpolati vengono quindi

impiegati per calcolare i prezzi delle opzioni call utilizzando il modello specificato al punto 5. Si noti che, in tale modello, vengono usati come input il prezzo spot, il tasso privo di rischio, il rendimento da dividendo ed il tempo alla scadenza rilevati al termine della finestra di cinque giorni. La Fed utilizza, inoltre, i primi e gli ultimi segmenti stimati della spline per effettuare l'extrapolazione oltre i limiti dei prezzi d'esercizio presenti nel set di dati. Le osservazioni risultanti costituiti dalle coppie (prezzo d'esercizio, prezzo call), fungono da proxy per la funzione di prezzo continuo delle opzioni call.

- viii) La Fed stima numericamente la derivata prima e seconda della funzione proxy del prezzo delle call, dividendo i valori della derivata seconda per e^{-rT} . Il risultato ottenuto rappresenta la funzione di densità delle probabilità neutrali al rischio implicita nel mercato delle opzioni, per il valore futuro dell'indice S&P500.

Per semplicità, la Fed classifica tutte le funzioni RND, indipendentemente dal tempo effettivo alla scadenza dell'opzione utilizzata, come funzioni di densità a “sei mesi” e interpreta i risultati come le distribuzioni dei valori attesi sei mesi dopo ciascuna data di osservazione.

3.2 Review della letteratura

L'applicazione delle RND nella previsione dei comportamenti futuri del mercato è stata oggetto di notevole interesse nella ricerca finanziaria, in particolare per quanto riguarda la comprensione della relazione tra le RND e le funzioni di densità di probabilità realizzate future. L'articolo di [Breedon e Litzenberger \(1978\)](#)⁴⁵ ha posto le basi per il calcolo delle RND a partire dai prezzi delle opzioni. Successivamente, [Shimko \(1993\)](#)⁴⁶ ha adattato la volatilità implicita a strike discreti al fine di rappresentare i prezzi delle opzioni in uno spazio continuo di strike. Questo ha stimolato ulteriori ricerche sulla costruzione delle RND e sulla loro relazione con le funzioni di densità di probabilità del mondo reale.

Studi successivi hanno esaminato l'utilizzo dei momenti superiori delle RND per prevedere

⁴⁵ Breedon, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621–651. <http://www.jstor.org/stable/2352653>

⁴⁶ Shimko, David. (1993). Bounds of probability. *Risk*. 6. 33-37.

i rendimenti futuri. [Harris e Qiao \(2018\)](#)⁴⁷ hanno analizzato la capacità dei premi al rischio dei momenti di prevedere i rendimenti azionari, evidenziando che i premi al rischio di varianza e skewness presentano una relazione negativa con i rendimenti, a differenza del premio al rischio della kurtosis. [Neuman e Skiadopoulos \(2012\)](#)⁴⁸ hanno riscontrato che i momenti superiori neutrali al rischio possono essere previsti statisticamente; tuttavia, solo le previsioni della skewness a un giorno possono essere sfruttate economicamente, e tale rilevanza economica scompare quando si considerano i costi di transazione. [Fan, Xiao e Zhou \(2020\)](#)⁴⁹ hanno scoperto che, sebbene il premio al rischio del secondo momento preveda i rendimenti di mercato a breve termine con coefficienti positivi, il primo al rischio del terzo (quarto) momento prevede i rendimenti di mercato a medio termine con coefficienti negativi (positivi). La combinazione dei premi al rischio dei momenti superiori con il premio al rischio del secondo momento migliora la prevedibilità dei rendimenti azionari su più orizzonti temporali, sia in che out of sample.

La letteratura tra la skewness implicita nei prezzi delle opzioni e i rendimenti futuri delle azioni presenta risultati contrastanti. Ad oggi, gli studi esistenti hanno prodotto evidenze discordanti riguardo al fatto che la skewness neutrale al rischio implicita nelle opzioni comporti un premio positivo o negativo nella cross-section dei rendimenti azionari. In linea con la teoria della preferenza per la skewness, [Conrad et al. \(2013\)](#)⁵⁰ riscontrano una relazione negativa tra la skewness neutrale al rischio (RNS, risk neutral skewness) e i rendimenti azionari futuri. Questo approccio assume implicitamente che i mercati delle opzioni e delle azioni riflettano la stessa informazione e che la skewness implicita nelle opzioni sia una proxy per la skewness attesa del sottostante. Tuttavia, tale ipotesi è messa in discussione dalle evidenze che suggeriscono differenze informative tra i mercati delle

⁴⁷ Harris, R. D., Li, X., and Qiao, F. (2018). Option implied betas and the cross section of stock returns. *Journal of Futures Markets*, 39(1):94–108.

⁴⁸ Neumann, M. and Skiadopoulos, G. S. (2012). Predictable dynamics in higher order risk-neutral moments: Evidence from the sp 500 options. *SSRN Electronic Journal*.

⁴⁹ Fan, Z., Xiao, X., and Zhou, H. (2020). Moment risk premia and stock return predictability. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 57(1):67–93.

⁵⁰ Conrad, J., Dittmar, R. F., and Ghysels, E. (2013). Ex ante skewness and expected stock returns. *The Journal of Finance*, 68(1):85–124.

opzioni e delle azioni. [Ait-Sahalia et al. \(2001\)](#)⁵¹ dimostrano che la funzione di densità neutrale al rischio stimata dalle opzioni sull'indice S&P500 differisce da quella derivata dai rendimenti storici dell'indice, suggerendo che il mercato delle opzioni incorpora una dinamica non osservata nel sottostante. In linea con l'ipotesi di differenza informativa tra i due mercati, altri studi contraddicono [Conrad et al. \(2013\)](#)⁵² dimostrando che la RNS può prevedere positivamente i rendimenti azionari futuri. [Stilger, Kostakis e Poon \(2014\)](#)⁵³, infatti, dimostrano una correlazione positiva tra i rendimenti azionari futuri e la RNS. [Xing et al. \(2010\)](#)⁵⁴ suggeriscono che i trader informati di opzioni acquistano opzioni put *Out of The Money* (OTM) prima di cali repentini del sottostante, aumentando così la volatilità delle put OTM e portando di conseguenza a una pendenza più accentuata della funzione di volatilità implicita, traducendosi in una RNS più negativa.⁵⁵ In questo dibattito, [Borochin et al. \(2020\)](#) contribuiscono considerando la struttura a termine dell'RNS, rilevando che le opzioni a breve termine presentano una maggiore presenza di trader informati, in linea con l'idea che un RNS positivo predica rendimenti positivi del sottostante, poiché riflette le aspettative di mercato. Ciò significa che se la RNS a breve termine fosse positiva, esso potrebbe essere un segnale rialzista, indicando che i trader che possiedono maggiori informazioni stanno anticipando un aumento del prezzo dell'azione. D'altro canto, rilevano che le opzioni a lungo termine sono maggiormente detenute da hedgers non informati, coerentemente con la teoria della preferenza per l'asimmetria, secondo cui una RNS positiva predice rendimenti negativi del sottostante poiché deriva da overbidding.⁵⁶

Infine, l'importanza della previsione della volatilità realizzata del mercato per l'implementazione di strategie di trading efficaci e per una gestione del rischio ottimale è

⁵¹ Ait-Sahalia, Y. and Brandt, M.W. (2001) Variable Selection for Portfolio Choice. *Journal of Finance*, 56, 1297-1351.

<https://doi.org/10.3386/w8127>

⁵² Conrad, J., Dittmar, R. F., and Ghysels, E. (2013). Ex ante skewness and expected stock returns. *The Journal of Finance*, 68(1):85–124.

⁵³ Stilger, P. S., Kostakis, A., and Poon, S.-H. (2014). What does risk-neutral skewness tell us about future stock returns? *SSRN Electronic Journal*.

⁵⁴ Xing, Y., Zhang, X., and Zhao, R. (2010). What does the individual option volatility smirk tell us about future equity returns? *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(3):641–662

⁵⁵ Borochin, P., Chang, H., and Wu, Y. (2020). The information content of the term structure of risk-neutral skewness. *Journal of Empirical Finance*, 58:247–274.

⁵⁶ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry*. (2024). UCLA.

ampiamente riconosciuta. Il lavoro pionieristico di [Engle \(1982\)](#)⁵⁷ sui modelli di Eteroschedasticità Condizionale Autoregressiva Generalizzata (GARCH) ha posto le basi per tali previsioni. L'utilizzo delle previsioni dell'indice VIX per operare sul mercato dell'indice S&P500 è stato un argomento di rilevante interesse nella ricerca finanziaria. [Whaley \(1993\)](#)⁵⁸ ha evidenziato il ruolo del VIX nella comprensione dell'incertezza di mercato e del sentiment degli investitori. [Baker e Wurgler \(2006\)](#)⁵⁹ hanno osservato che i picchi del VIX sono correlati all'instabilità del mercato ed a potenziali ribassi, sottolineandone il valore predittivo per le tendenze di mercato. [Bollerslev et al. \(2009\)](#)⁶⁰, infine, dimostrano che la differenza tra la variazione implicita e quella realizzata, ovvero il premio al rischio della varianza, è in grado di spiegare una frazione significativa della variazione temporale nei rendimenti aggregati del mercato azionario, con premi elevati (bassi) che predicono rendimenti futuri elevati (bassi).

3.3 Le informazioni implicite nelle opzioni si possono considerare “nuove” informazioni?

Nonostante le informazioni implicite nelle opzioni possano essere considerata una fonte di dati alternativa, esse potrebbero non trasmettere necessariamente nuove informazioni in termini pratici. A tale scopo, sottopongo questa ipotesi a verifica, attraverso una analisi in due fasi, utilizzando i dati delle opzioni sull'S&P500 con scadenza a sei mesi come caso esemplificativo. Lo stesso approccio può comunque essere esteso ad altri strumenti finanziari.

In primo luogo, attraverso l'uso di Python, valuto il grado di ortogonalità delle serie temporali implicite nelle opzioni (tra il 15 marzo 2007 ed il 22 gennaio 2025), considerando che esse sono derivate dalla medesima curva di volatilità implicita.

Nella prima Heatmap della figura 1, relativa ai dati option-implied S&P6M, si osserva un'alta interdipendenza tra alcune serie, in particolare tra il percentile 90 (p90) ed il

⁵⁷ Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987.

⁵⁸ Whaley, R. E. (1993). Derivatives on market volatility. *The Journal of Derivatives*, 1(1):71–84.

⁵⁹ Baker, M. and Wurgler, J. (2006). Investor sentiment and the cross-section of stock returns. *The Journal of Finance*, 61(4):1645–1680.

⁶⁰ Bollerslev, T., Tauchen, G. & Zhou, H. (2009). "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia." *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.

percentile 10 (p10), i quali mostrano una correlazione negativa marcata. Questo è coerente con l'interpretazione secondo cui le code della distribuzione delle aspettative di prezzo tendono a muoversi in direzioni opposte. Le misure centrali, come la media (μ), presentano correlazioni meno significative con le altre variabili, suggerendo che l'informazione trasmessa dal valore medio atteso potrebbe essere meno legata ai movimenti degli estremi della distribuzione. Infine, è possibile notare una elevata correlazione negativa tra i momenti superiori della distribuzione (skewness e kurtosis), mentre una elevata correlazione positiva tra le probabilità di un ampio aumento/decremento del prezzo del sottostante. La seconda heatmap, che rappresenta le variazioni nei dati option-implied sull'S&P6M, evidenzia come i cambiamenti nella skewness siano fortemente correlati con quelli della curtosi, mentre variazioni nei percentili (p10, p90) risultano strettamente collegate a modifiche nelle probabilità di variazione dei rendimenti. Questo suggerisce che shock improvvisi nei mercati influenzano simultaneamente più dimensioni della distribuzione di probabilità neutrali al rischio implicita, introducendo potenziali problemi di multicollinearità in modelli di previsione e pricing. Un risultato degno di nota riguarda la media (μ), che mostra una correlazione generalmente più debole con le altre variabili rispetto alla heatmap precedente. Ciò rafforza ancor di più l'idea secondo cui, i rendimenti attesi sono meno prevedibili rispetto alle altre caratteristiche della distribuzione. In sintesi, l'analisi delle due heatmap suggerisce la presenza di relazioni lineari significative tra le variabili analizzate, sia nei livelli sia nelle variazioni, rendendo necessaria una gestione attenta della multicollinearità per evitare distorsioni nei risultati e garantire la robustezza dei modelli econometrici finanziari.

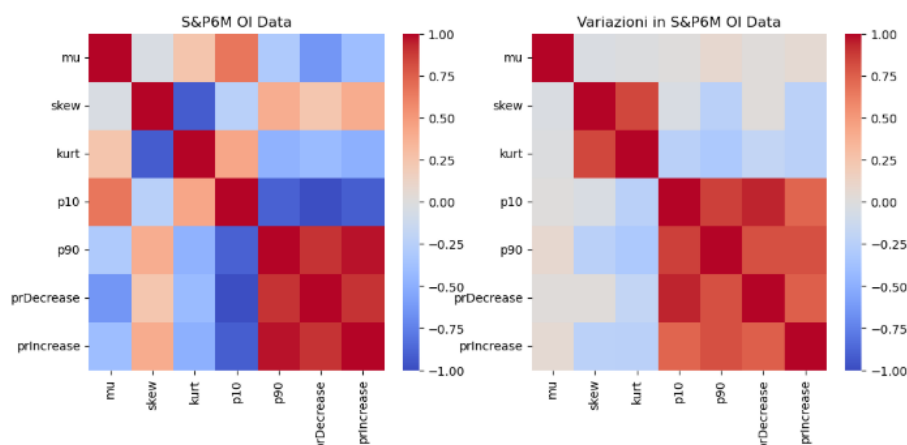


Figura 1: Correlazione tra il livello (sinistra) e la variazione nel valore (destra) delle time series implicite nelle opzioni sull'indice S&P500 con scadenza a 6 mesi.

In secondo luogo, sempre utilizzando Python e sempre usando lo stesso arco temporale per i miei dati, ossia tra il 15 marzo 2007 ed il 22 gennaio 2025, valuto il grado di ortogonalità di queste serie temporali rispetto alle informazioni esogene. A tal fine, considero il tasso privo di rischio⁶¹ e 21 diversi indicatori tecnici⁶² sull'S&P500. Gli indicatori utilizzati all'interno della mia analisi sono i seguenti:

- RSI (Relative Strength Index), misura la forza del movimento dei prezzi.
- Stoch (Stochastic Oscillator), valuta il momentum del prezzo.
- WilliamsR (Williams %R), indica condizioni di ipercomprato o ipervenduto.
- ROC (Rate of Change), misura la variazione percentuale del prezzo.
- Momentum, calcola il tasso di variazione dei prezzi.
- MACD (Moving Average Convergence Divergence), indica tendenze del mercato.
- MACD Signal, linea di segnale del MACD.
- ADX (Average Directional index), misura la forza del trend.
- BB_High (Bollinger Band High), banda superiore delle bande di Bollinger.
- BB_Low (Bollinger Band Low), banda inferiore delle bande di Bollinger.
- ATR (Average True Range), misura la volatilità del mercato.
- Skewness, valuta l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti.
- Kurtosis, misura la curtosi della distribuzione dei rendimenti.
- SMA_50 (Simple Moving Average, 50 giorni), media mobile semplice a 50 giorni.
- EMA_50 (Exponential Moving Average, 20 giorni), media mobile esponenziale a 20 giorni.
- CCI (Commodity Channel Index), misura deviazioni del prezzo rispetto alla media.
- TRIX media mobile tripla esponenziale, usata per identificare inversioni di trend.
- KAMA (Kaufman's Adaptive Moving Average), media mobile adattiva di Kaufman.
- DPO (Detrended Price Oscillator), oscillatore che elimina il trend per evidenziare cicli.
- VI (Vortex Indicator), indica la direzione della tendenza.
- Ulcer Index, misura il rischio di drawdown nel mercato.

⁶¹ La serie temporale sul T-Bill a 3 mesi è stata ricavata dal sito della Federal Reserve Bank of St. Louis. 3-Month Treasury Bill Secondary Market Rate, Discount Basis (WTB3MS) | FRED | St. Louis Fed

⁶² Ho inserito indicatori sia a breve che a lungo termine sul momentum, reversal, direzione, volatilità, skewness e kurtosis. Essi sono stati generati, usando la serie storica sui dati dell'S&P500, attraverso la funzione di Python TA-Lib (Technical Analysis Library).

Questi indicatori vengono utilizzati come variabili indipendenti in una regressione esplicativa, volta a misurare in che misura la varianza di ciascuna serie temporale implicita nelle opzioni possa essere spiegata. La regressione che analizzo è la seguente:

$$f_{i,t} = \alpha + \beta_0 r_t^f + \sum_{i=1}^{20} \beta_i s_{i,t} + \epsilon_{i,t}$$

dove $f_{i,t}$ rappresenta una delle serie temporali implicite nelle opzioni, r_t^f è il tasso di interesse privo di rischio e $s_{i,t}$ sono gli indicatori tecnici. Sostituendo $f_{i,t}$ con $\Delta f_{i,t}$ nell'equazione sopra riportata, permette di ottenere la regressione usata per spiegare le variazioni nelle serie temporali implicite nelle opzioni.

I risultati di questa analisi, mostrati nelle figure 2 e 3, evidenziano come la maggior parte delle serie temporali siano altamente spiegabili attraverso variabili di mercato utilizzate, con alcune eccezioni degne di nota.

Nella figura 2, si osserva che il valore dell'Adjusted R^2 più elevato, e di conseguenza le serie storiche la cui varianza è maggiormente spiegata tramite informazioni esterne, riguarda le misure estreme della distribuzione. Infatti, il novantesimo percentile (p90) ed il decimo percentile (p10), nonché gli indicatori di probabilità direzionale come prIncrease e prDecrease, presentano i valori maggiori. Questo risultato suggerisce che gli estremi della distribuzione delle aspettative di prezzo sono fortemente correlati con le variabili di mercato esogene considerate. D'altra parte, misure di centralità come la media (μ) così come i momenti superiori della distribuzione (skewness e kurtosis) risultano meno spiegabili. Analogamente, nella figura 3, che analizza le variazioni delle serie temporali implicite, emergono pattern simili. La capacità esplicativa delle variabili indipendenti rimane elevata per i percentili estremi e per le probabilità direzionali, mentre diminuisce significativamente per la media (μ), che mostra un Adjusted R^2 particolarmente più basso. Questo risultato supporta l'idea che i rendimenti attesi siano meno prevedibili rispetto ad altre caratteristiche della distribuzione, un fenomeno ben documentato negli studi sulla previsione dei mercati finanziari.

Questa breve analisi svolta all'interno di questo paragrafo mostra la presenza di una forte multicollinearità tra determinate serie temporali implicite nelle opzioni. In aggiunta, le evidenze empiriche presentate confermano che, per le opzioni a 6 mesi sull'S&P500, le misure di centralità ed i momenti superiori della distribuzione sono le meno spiegabili,

mentre gli estremi della distribuzione e gli indicatori di probabilità direzionale risultano fortemente correlati con le informazioni di mercato esterne⁶³.

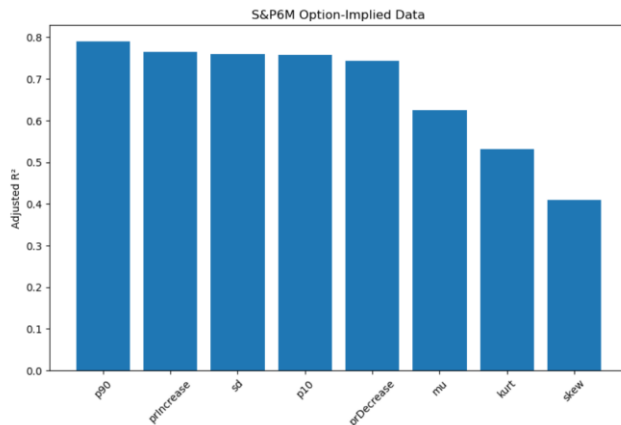


Figura 2: Adjusted R² della regressione del livello delle serie temporali implicite nelle opzioni, delle opzioni sull'S&P500 a 6 mesi, rispetto al tasso privo di rischio e agli indicatori tecnici dell'S&P500.

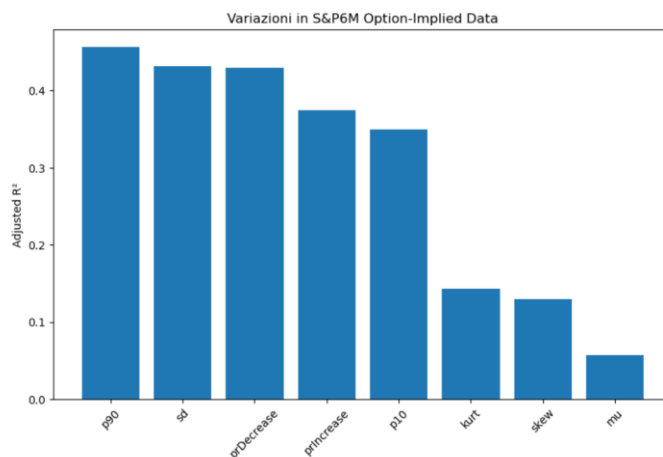


Figura 3: Adjusted R² della regressione della variazione delle serie temporali implicite nelle opzioni, delle opzioni sull'S&P500 a 6 mesi, rispetto al tasso privo di rischio e agli indicatori tecnici dell'S&P500.

3.4 Utilità delle RND implicite nelle opzioni per i policymaker

I Policymaker prendono numerose decisioni per conto della collettività. Essi stabiliscono come allocare le risorse per le opere pubbliche, come regolamentare imprese e famiglie, e quali tipi di reti di sicurezza sociale creare, tra molte altre scelte. Alcuni costi e benefici derivanti da queste decisioni si manifestano immediatamente, mentre altri si concretizzano nel futuro. Tuttavia, il futuro è tipicamente incerto, rendendo incerta anche la stime del

⁶³ *Options Based Probability Distributions, More Than Just a Tool for Policy Makers.* (2024). University of California, Berkeley.

beneficio sociale netto derivante dalle scelte attuali dei policymaker. Per effettuare scelte informate in un contesto di incertezza, i policymaker necessitano di un metodo sistematico per valutare i benefici netti delle decisioni odierne, considerando le molteplici direzioni che il futuro potrebbe intraprendere. I policymaker dovrebbero, in linea generale, ponderare il beneficio netto in un dato scenario futuro utilizzando quella che definiamo come probabilità implicita nel mercato di tale evento, ovvero un peso che i mercati finanziari assegnano alla probabilità di occorrenza di un determinato evento.

Tuttavia, vi sono alcune preoccupazioni frequentemente sollevate riguardo l'impiego di tali probabilità neutrali al rischio. È spesso sostenuto, che i policymaker dovrebbero valutare i benefici netti in scenari futuri potenziali utilizzando stime derivanti da modelli di previsione statistica. Vi sono due ragioni, strettamente interconnesse, per cui i policymaker non dovrebbero fare affidamento su tali probabilità stimate per affrontare la questione fondamentale di policy. In primo luogo, la propensione delle famiglie a riallocare risorse tra scenari futuri alternativi dipende dalla scarsità relativa delle risorse in ciascuno di essi. Di conseguenza, un nucleo familiare potrebbe essere disposto a sostenere costi elevati per assicurarsi contro il rischio di eventi avversi, come la perdita di un'occupazione o un'alluvione, anche qualora percepisse tali eventi come altamente improbabili. I policymaker devono considerare questo aspetto quando affrontano le questioni fondamentali di policy, al fine di massimizzare il benessere delle famiglie. I modelli statistici, infatti, non incorporano la valutazione soggettiva delle risorse da parte delle famiglie, mentre le probabilità di mercato riflettono tali preferenze. In secondo luogo, le valutazioni soggettive delle famiglie in merito alla probabilità di differenti esiti possono divergere da quelle fornite da un modellatore statistico, a causa di asimmetrie informative, eterogeneità nelle credenze o dell'impiego di modelli probabilistici non convenzionali.

Inoltre, alcuni critici delle probabilità implicite al mercato evidenziano che le previsioni sul futuro derivate dai prezzi degli asset finanziari non offrono, in genere, performance superiori rispetto alle previsioni ottenute mediante modelli statistici. Tale critica è strettamente legata a quanto affrontato finora sulle probabilità implicite nel mercato rispetto a quelle stimate statisticamente, portando dunque a una risposta sostanzialmente analoga. Il criterio di valutazione della performance previsionale si basa generalmente su una funzione di perdita standard, come l'errore quadratico medio. Tuttavia, tale funzione di perdita non attribuisce un peso maggiore a uno specifico stato del mondo semplicemente perché le famiglie

risultano più propense a riallocare risorse verso quello stato. Pertanto, questo criterio di valutazione appare poco rilevante per un policymaker che intenda operare nell'interesse del benessere delle famiglie.

Un'ulteriore critica si basa sul fatto che non esiste una “famiglia tipica”, poiché le famiglie sono intrinsecamente eterogenee. Il presupposto del lavoro di [Feldman et al. \(2015\)](#)⁶⁴ della Federal Reserve di Minneapolis è che i policymaker dovrebbero agire nell'interesse di una famiglia tipica. Tuttavia, la realtà è che le famiglie differiscono sotto molteplici aspetti. Come possono, dunque, le probabilità neutrali al rischio implicite nelle opzioni informare i policymaker sulle preferenze di una famiglia tipica? La risposta risiede nell'efficienza dei mercati finanziari. Se le famiglie hanno la possibilità di scambiare un insieme di asset, allora, in equilibrio, esse sono tutte ugualmente disposte, al margine, a sostituire un asset con un altro. Finché gli asset differiscono sufficientemente in termini di payoff nei vari scenari futuri possibili, possiamo concludere che le famiglie che partecipano ai mercati finanziari siano tutte ugualmente disposte, al margine, a riallocare risorse da un possibile futuro a un altro. In questo senso, sebbene le famiglie possano essere inizialmente molto eterogenee, l'attività di trading le rende almeno marginalmente omogenee in termini di ponderazione delle risorse nei diversi scenari futuri.

Il lavoro di [Feldman et al. \(2015\)](#) riconosce tuttavia alcune limitazioni. In particolare, vi sono due ulteriori questioni che gli autori considerano potenzialmente più rilevanti per i policymaker che intendano utilizzare le probabilità neutrali al rischio implicite nelle opzioni nelle loro decisioni.

La prima riguarda il tema della partecipazione e non partecipazione ai mercati finanziari. La Fed si affida in larga misura ai prezzi delle opzioni per calcolare le probabilità di mercato. Tuttavia, solo un numero relativamente ristretto di individui opera nei mercati delle opzioni, e alcuni di coloro che vi partecipano non appartengono al gruppo delle famiglie il cui benessere i policymaker intendono massimizzare. Pertanto, come si può sapere se tali probabilità, calcolate utilizzando i prezzi delle opzioni, riflettono le preferenze delle famiglie che non partecipano a questi mercati? La risposta è che non si può sapere con certezza. Tuttavia, vi sono due osservazioni che offrono una certa rassicurazione su ciò: in primo luogo, le famiglie potrebbero scegliere di partecipare a questi mercati qualora lo desiderassero, poiché l'acquisto e la vendita di opzioni call e put risulta relativamente

⁶⁴ Feldman, R. (2015, February 7). *Market-Based Probabilities: a tool for policymakers*

semplice. La mancata partecipazione suggerisce che i non partecipanti percepiscano i benefici marginali derivanti da tali scambi come limitati, il che implica che le loro valutazioni marginali delle opzioni rispetto ad altri asset probabilmente non differiscono significativamente da quelle degli operatori attivi. In secondo luogo, parte del trading delle opzioni avviene per conto di investitori che agiscono in qualità di fiduciari delle famiglie, anche se queste ultime non partecipano direttamente alle transazioni.

La seconda questione riguarda l'illiquidità dei mercati delle opzioni, che può manifestarsi in due forme. In alcuni mercati, il trading di opzioni su determinati asset è limitato, con ampi spread bid-ask o con un numero esiguo di transazioni per strike price lontani dal valore corrente (out of the money). Di conseguenza, i prezzi delle opzioni possono riflettere fattori estranei alle aspettative degli investitori. Un policymaker che utilizzi le probabilità implicite nelle opzioni dovrebbe considerare tali inefficienze calcolando intervalli di confidenza che forniscano limiti superiori e inferiori per le stime di tali probabilità. Inoltre, le opzioni relative alle code della distribuzione, spesso di particolare interesse, potrebbero essere scambiate in misura insufficiente, rendendo necessaria una estrapolazione prudente.

L'applicazione di queste probabilità da parte degli investitori individuali rappresenta, invece, una questione distinta. Mentre i policymaker possono considerare il sentiment aggregato dei mercati, gli investitori individuali devono valutare se i segnali di mercato siano coerenti con la propria strategia di investimento. La flessibilità rimane un elemento cruciale: analogamente ad un pilota che personalizza la propria strumentazione di volo, un investitore dovrebbe adattare il proprio portafoglio per navigare in maniera efficace nei complessi cieli dei mercati finanziari.⁶⁵

3.5 Analisi preliminare

3.5.1 Probabilità implicite: capacità predittive e limiti

Le stime delle probabilità implicite nelle opzioni calcolate dalla Federal Reserve di Minneapolis per l'indice S&P500, offrono una prospettiva unica sulle aspettative di mercato. Queste stime forniscono una visione delle probabilità neutrali al rischio dei movimenti futuri dei prezzi degli asset sottostanti le opzioni, incorporando le informazioni collettive degli operatori di mercato.

⁶⁵ *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives*. (2023). Fordham University.

In questa prima parte della mia analisi preliminare, ho esaminato i dati bisettimanali e settimanali della Fed, relativi alle probabilità che l'indice S&P500 aumentasse o diminuisse del 20% all'interno di un arco temporale di 12 mesi (l'analisi proposta va dal marzo 2007 fino al gennaio 2024, mostrando un lasso di tempo comprendente anche importanti avvenimenti economici a livello globale). Nel portare avanti questa mia analisi, ho abbinato ogni intervallo (bisettimanale o settimanale) al corrispondente livello realizzato dall'indice S&P500 esattamente un anno dopo.⁶⁶ Questo approccio, realizzato tramite l'utilizzo di Python, mi ha permesso di confrontare le aspettative ex-ante del mercato con le realizzazioni ex-post, offrendo una rappresentazione visiva della capacità predittiva di queste stime:

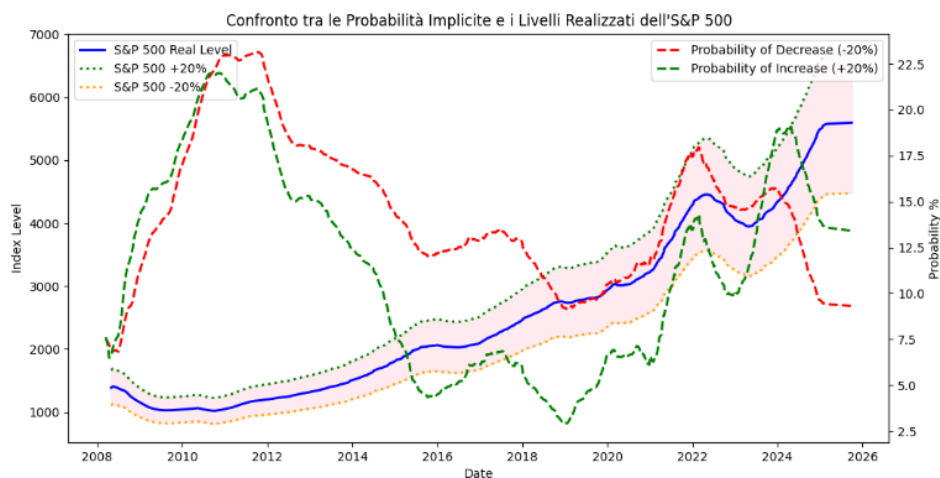


Figura 4

Il grafico (figura 4), creato tramite Python, è composto dalle seguenti caratteristiche: il livello realizzato dell'S&P500 è tracciato con una linea blu, mentre le linee tratteggiate arancione e verde rappresentano il valore teorico dell'indice nel caso di una variazione del $\pm 20\%$ rispetto al valore attuale dell'indice. L'area ombreggiata in rosa tra queste linee tratteggiate mostra la fascia entro cui il mercato potrebbe oscillare, sulla base delle probabilità implicite nel prezzo delle opzioni.

Questa analisi rivela alcune dinamiche degne di nota. Essa ha rivelato che le stime di probabilità basate sul mercato, fornite dalla Fed, mostrano una notevole capacità di catturare l'ampia volatilità del mercato all'interno del periodo analizzato (che va da marzo 2007 a gennaio 2024). Infatti, nei periodi di forte volatilità (la crisi finanziaria del 2008 oppure la

⁶⁶ La serie storica dell'S&P500 per il periodo analizzato è stata ricavata da Yahoo Finance.

<https://finance.yahoo.com/quote/%5EGSPC/history/?period1=1173916800&period2=1738281600>

pandemia COVID-19 del 2020), quando le probabilità di un movimento del 20% al rialzo o al ribasso dell'indice S&P500 subiscono una significativa impennata, la realizzazione ex-post del livello dell'indice, un anno dopo, tende a mostrare un cambiamento sostanziale. Osservando il periodo post-2012, si può notare una maggiore stabilità dell'indice, con variazioni meno estreme delle probabilità di crescita e decrescita. Tuttavia, il grafico mostra anche momenti di improvvisa turbolenza, come nel biennio 2015-16, quando le probabilità di una forte crescita e di una forte contrazione si sono avvicinate, segnalando un periodo di maggiore incertezza per gli operatori di mercato. Nel periodo più recente (dal 2021), si evidenzia un'altra fase di alta volatilità. La forte impennata della probabilità di un incremento del 20% suggerisce come il mercato avesse aspettative di forti recuperi, successivi al periodo di crisi dovuto alla Pandemia COVID 19. Questo aumento della volatilità dell'indice, è particolarmente evidente a partire dal 2022, quando l'S&P500 ha registrato oscillazioni più marcate a causa dell'aumento dell'inflazione, delle politiche restrittive della Federal Reserve e delle preoccupazioni per una eventuale recessione.

La relazione tra il livello effettivo dell'indice e le probabilità implicite mostra come il mercato tenda ad anticipare i movimenti futuri dell'S&P500 attraverso i prezzi delle opzioni. Nei periodi di stress, l'aumento della probabilità di un calo del valore dell'indice predice un effettiva riduzione del prezzo dello stesso, così allo stesso modo, nei periodi di ripresa, l'aumento della probabilità di crescita predice l'inizio di un trend rialzista da parte del mercato. Nonostante ciò, è emerso un limite in questa analisi. Infatti, le stime di probabilità di un aumento e di una diminuzione spesso si muovono in sincronia, soprattutto durante i periodi di alta volatilità. Ciò, rende quindi difficile dedurre con precisione la direzione del significativo cambiamento atteso nel livello dell'indice.⁶⁷

3.5.2 modello OLS

Successivamente, il mio approccio è consistito nell'applicare il modello OLS (Ordinary Least Squares) con l'obiettivo di esaminare possibili relazioni lineari tra i momenti della funzione RND implicita nel prezzo delle opzioni ed i ritorni futuri a 12 mesi dell'S&P500. Specificatamente, attraverso un codice python, ho eseguito una regressione lineare per valutare la relazione tra i momenti statistici della RND implicita nelle opzioni ed il

⁶⁷ *Directional forecasts with Risk-Neutral probabilities and Skewness-Based trading strategy*. (2024). New York University (NYU).

rendimento futuro a 12 mesi dell'indice. In seguito, dopo aver svolto la fase di caricamento e pulizia del dataset⁶⁸, ho creato una nuova colonna nel dataset che consiste nelle stesse date spostate avanti di 12 mesi rispetto ai momenti statistici presenti. Ciò, permette di unire i due dataset in modo da associare i momenti statistici della funzione RND con il rendimento che si verificherà 12 mesi dopo. Nell'ultima parte del codice ho poi eseguito le regressioni lineari separate per ciascun momento statistico (Media, deviazione standard, skewness e kurtosis). Per ciascuna regressione, ho estratto infine i coefficienti stimati, gli errori standard, i valori della statistica-t, i p-value ed infine l' R^2 .

Il risultato (tabella 1) è stato deludente per quasi tutti i momenti (leggermente migliore la deviazione standard), con valori di R^2 rispettivamente pari a 0.00755, 0.01283, 0.00528, 0.00849.

Tabella dei risultati della regressione:

	Parameter	Coefficient	Std. Error	t-stat	P> t	R^2
0	mean	-49.061289	21.775464	-2.253054	0.024580	0.007553
1	std	22.708997	7.712421	2.944471	0.003348	0.012832
2	skew	3.949504	2.098022	1.882489	0.060205	0.005285
3	kurt	-1.337808	0.559547	-2.390876	0.017085	0.008497

Tabella 1

Nel complesso, nonostante alcune variabili risultino statisticamente significative, i valori dell' R^2 sono molto bassi, indicando come i momenti statistici, presi singolarmente, spiegano solo una piccola parte della variazione nei rendimenti futuri dell'S&P500.⁶⁹

3.5.3 modello LSTM

Date le limitazioni riguardo la capacità predittiva notate nelle scorse analisi, usando sempre gli stessi due dataset (funzione RND implicita nelle opzioni su S&P500 con scadenza a 12 mesi e serie storica dell'indice S&P500) ho esteso la mia analisi, andando ad utilizzare un approccio che si serve di un modello maggiormente sofisticato. Il codice da me realizzato implementa un modello di rete neurale LSTM (Long Short Term Memory model) per prevedere i rendimenti futuri dell'S&P500 basandosi sui momenti statistici della funzione RND.

⁶⁸ I momenti della RND ottenuti dal sito della Fed di Minneapolis. [Current and Historical Market-Based Probabilities | Federal Reserve Bank of Minneapolis](#).

Mentre i dati riguardanti la serie storica dell'indice S&P500, sono stati ricavati tramite il sito della FRED di ST. Louis. [S&P 500 \(SP500\) | FRED | St. Louis Fed](#)

⁶⁹ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry*. (2024). UCLA.

La LSTM è un tipo avanzato di architettura di rete neurale ricorrente (RNN) progettata per gestire dati sequenziali ricordando le informazioni per periodi prolungati. Le RNN tradizionali spesso hanno difficoltà a gestire sequenze lunghe a causa del problema del gradiente che svanisce, in cui l'influenza delle informazioni diminuisce con il passare del tempo. Le LSTM attenuano questo problema grazie ad una struttura cellulare unica che comprende celle di memoria e porte che regolano il flusso di entrate e uscite delle informazioni dalla cella di memoria.⁷⁰

La scelta del modello LSTM è stata motivata dalla mia ipotesi secondo cui il mercato finanziario è influenzato sia dalle fluttuazioni a breve termine che dai trend di lungo termine. L'architettura unica di tale modello gli consente quindi di catturare queste dinamiche temporali in modo più efficace rispetto all'OLS, rendendolo un'alternativa promettente per la mia analisi.

All'interno del codice ho scelto come variabile target la media dei rendimenti (μ), che viene normalizzata utilizzando la funzione `MinMaxScaler` per facilitare l'addestramento al modello. Successivamente, ho creato sequenze temporali di lunghezza 12 mesi per addestrare il modello LSTM. Il dataset viene poi suddiviso in un training set (80% dei dati) ed un test set (20% dei dati).

Il modello LSTM è costruito con due strati ricorrenti da 128 unità ciascuno, entrambi con dropout del 30% per ridurre il rischio di overfitting. Dopo gli strati LSTM, il modello include due strati densi, di cui uno con attivazione ReLU e l'altro con un singolo neurone per la previsione. Il modello viene compilato con l'ottimizzazione Adam e la funzione di perdita MSE (Mean Squared Error) e successivamente addestrato per 200 epoche con batch di 16 osservazioni. Dopo l'addestramento, il modello genera le previsioni ed i valori previsti vengono riportati alla scala originale utilizzando l'inverso della trasformazione MinMax. I rendimenti effettivamente realizzati dell'S&P500 vengono poi calcolati come variazione percentuale del prezzo di chiusura aggiustato rispetto all'anno precedente (252 giorni di mercato), e vengono interpolati con una spline cubica per rendere il grafico più fluido (figura 5).

⁷⁰ Ultralytics. (n.d.). *Long Short-Term Memory (LSTM) - Discover how Long Short-Term Memory (LSTM) networks excel in handling sequential data, overcoming RNN limitations, and powering AI tasks like NLP and forecasting.*

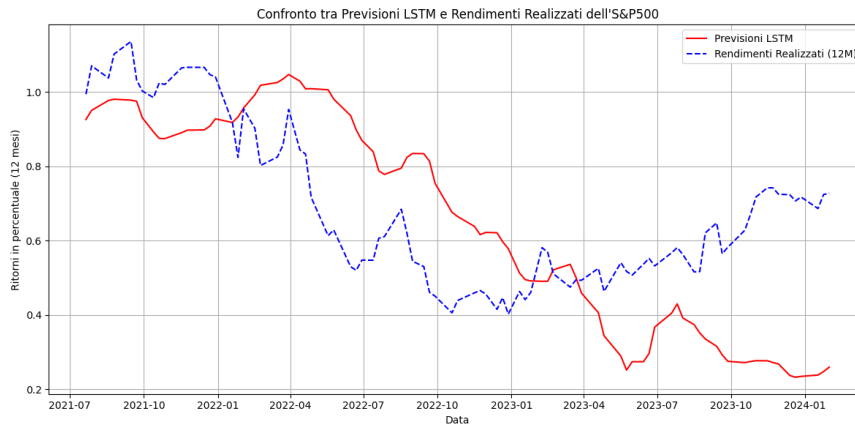


Figura 5

Dai risultati visibili nella figura 5, emerge una discrepanza significativa tra le previsioni del modello LSTM (linea rossa) ed i rendimenti realizzati (linea blu tratteggiata). Le previsioni LSTM mostrano una tendenza costante al ribasso, con pochi segnali di inversione, al contrario i rendimenti realizzati sono molto più volatili, con fasi di risalita marcati, come nel 2023, che il modello previsionale LSTM non riesce a catturare. Ciò, suggerisce che il modello potrebbe non essere stato in grado di apprendere una relazione significativa tra i momenti statistici della funzione RND ed i rendimenti futuri.

In conclusione, in linea con l'analisi del modello OLS, le prestazioni del modello LSTM non sono risultate significative nella previsione del rendimento dell'S&P500 nei dodici mesi successivi, come si evince dal grafico. Questo risultato suggerisce che l'utilizzo diretto della funzione RND per la previsione dei rendimenti futuri potrebbe essere meno efficace del previsto e che di conseguenza necessita di una maggiore analisi per la determinazione delle strategie di trading che andrò a delineare nei capitoli successivi.⁷¹

⁷¹ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry*. (2024). UCLA.

Capitolo 4: Strategie di trading basate sui momenti della distribuzione neutrale al rischio

4.1 Una prima integrazione delle RND implicite nelle opzioni in strategie di trading

4.1.1 Ideazione e realizzazione della strategia

Col fine di realizzare un primo tentativo, per utilizzare i momenti contenuti nelle distribuzioni di probabilità neutrale al rischio implicite nelle opzioni sull'S&P500, nella creazione di strategie di trading, ho analizzato la correlazione tra tali momenti e l'indice S&P500 stesso. La mia analisi svolta tramite Python mostra (figura 6) una significativa correlazione positiva (0,48) tra la media della distribuzione (μ) ed i prezzi di chiusura dell'S&P500 nelle proiezioni a 6 mesi. Tale relazione suggerisce, quindi, un legame diretto tra rendimenti attesi più elevati e livelli dell'indice superiori, indicando possibili condizioni rialziste del mercato. Dal punto di vista strategico, ciò implica la possibilità di usare μ come segnale predittivo per anticipare le fasi di crescita del mercato.⁷²

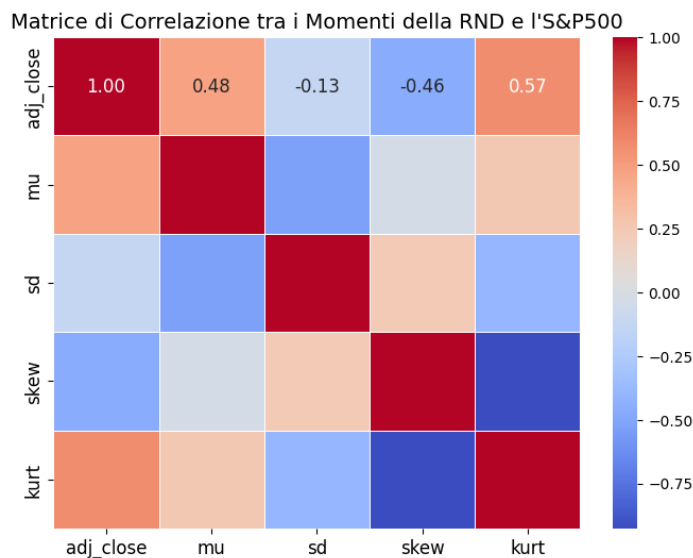


Figura 6

D'altro canto, la deviazione standard (σ) e la skewness (skew) presentano correlazioni negative, suggerendo che un aumento di questi momenti è associato (debolmente per quanto riguarda la deviazione standard) ad una diminuzione dei prezzi. La kurtosis presenta, infine, una correlazione positiva con i prezzi di chiusura dell'indice S&P500, sottolineando il ruolo

⁷² *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives.* (2023). Fordham University.

cruciale delle aspettative di rendimenti estremi nella valutazione di mercato.

All'interno della strategia proposta, però, la mia attenzione si focalizza sul primo momento (μ) e sulla sua capacità predittiva per quanto riguarda i movimenti dell'indice. Dal seguente scatter plot (figura 7) è possibile identificare la relazione positiva tra μ ed i prezzi di chiusura dell'indice analizzata in precedenza, confermando quanto detto finora, ossia che valori più alti della media tendono ad essere associati a livelli più elevati dell'indice S&P500.

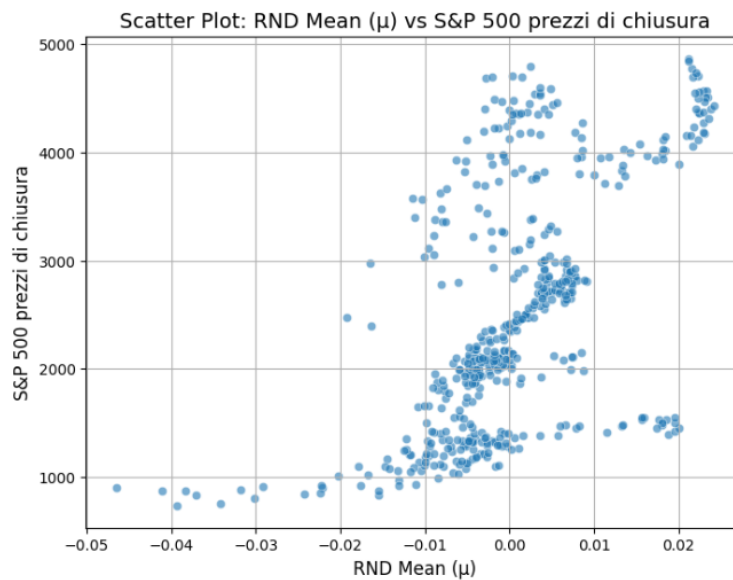


Figura 7

Per entrare ed uscire dal mercato dell'S&P500, ho utilizzato μ come parametro. Se μ si trovava al di sopra ad una predeterminata soglia, che prende il nome in inglese di threshold, assumevo una posizione long sull'indice, altrimenti, se il valore di μ si trovava al di sotto di questo threshold, uscivo dalla posizione long, assumendone una di hold. Il valore da me scelto come threshold all'interno di questa strategia di trading è il valore di μ nel suo 75° percentile.

Di conseguenza, la strategia da me impostata prevedeva di entrare long sull'indice solo quando μ era nel 25% più alto dei suoi valori storici.

Il 75° percentile di μ è stato calcolato su una finestra mobile di 10 giorni all'interno dell'arco temporale considerato (marzo 2007 – Dicembre 2024). La scelta di una finestra mobile piuttosto breve è dovuta al fatto che essa fa sì che la strategia si possa adattare più rapidamente a movimenti di mercato repentini, permettendomi così di catturare più opportunità di rialzo. Inoltre, un'eventuale finestra mobile più lunga avrebbe ridotto il

numero delle operazioni, rendendo così la strategia più selettiva, ma anche meno attiva. In questo modo (finestra mobile da 10 giorni), si ha una maggiore opportunità di entrare in posizioni long, implementando così la performance della strategia.

Considerando il fatto che operare direttamente sull'S&P500 non è possibile, l'eventuale investitore, per poter realizzare questa strategia, potrebbe farlo tramite l'acquisto di contratti futures sull'S&P500, in particolare gli E-mini S&P500 Futures⁷³. Questi strumenti sono ampiamente diffusi per la replica fedele dell'andamento dell'indice, grazie alla loro elevata liquidità ed assenza di restrizioni operative.

4.1.2 Risultati della strategia

Per testare la performance della mia strategia l'ho confrontata con l'andamento dell'indice, usato come benchmark nello stesso periodo (figura 8):

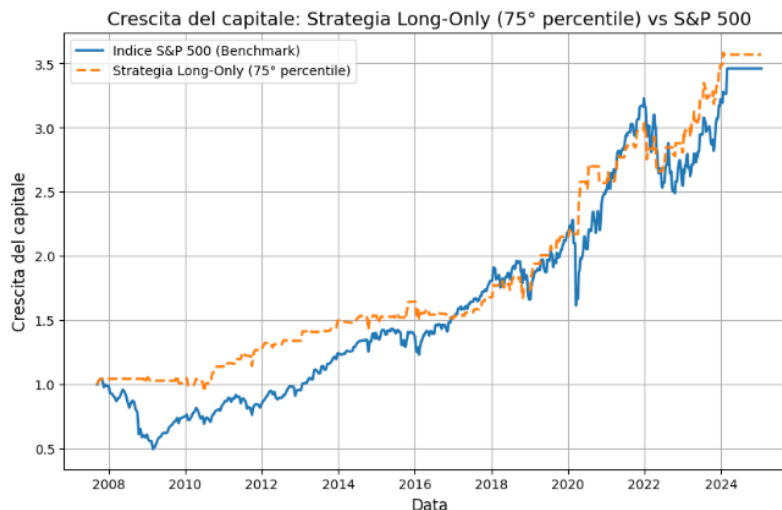


Figura 8

Come si può notare dal grafico, nella fase iniziale (2007-2010) l'indice subisce un calo iniziale, in linea con la crisi finanziaria globale del 2008, mentre la strategia sembra mostrare una maggiore stabilità con un drawdown meno pronunciato (stabilità probabilmente dovuta alle poche operazioni svolte in quel periodo). Nel periodo post-crisi, la strategia long-only basata sulla correlazione con la media della distribuzione di probabilità implicita nelle opzioni, mostra un incremento costante, superando quasi stabilmente il rendimento

⁷³ Gli E-mini S&P500 Futures (ticker: ES), scambiati al CME (Chicago Mercantile Exchange) sono contratti derivati. Per info tecniche dettagliate: [Futures & Options Trading for Risk Management - CME Group](#)

dell'indice. Il benchmark mostra un andamento più volatile, dimostrando quindi l'efficacia della strategia nell'overperformare rispetto all'indice. Il vantaggio significativo della strategia long-only è evidente fino al periodo più recente, caratterizzato da elevata volatilità dovuta a eventi macroeconomici globali (in particolare la pandemia COVID-19), in cui si nota una riduzione del divario tra i rendimenti della strategia e del benchmark.

Analizzando anche le rispettive metriche di performance (tabella 2) possiamo giungere alle seguenti conclusioni:

Confronto tra Strategia Long-only e Benchmark (S&P 500):

Metriche	Strategia Long-only	Benchmark (S&P 500)
=====	=====	=====
Sharpe Ratio	2.0307	1.2499
Max Drawdown	-12.2927%	-52.5559%
Calmar Ratio	0.0149	0.0039
Annualized Volatility	22.7976%	41.1748%
Annualized Return	7.6008%	7.4095%

Tabella 2

La strategia Long-only proposta presenta uno Sharpe Ratio più elevato, dimostrando una maggiore efficienza rispetto al benchmark, offrendo un miglior rapporto rischio-rendimento. Un valore più alto nello Sharpe Ratio indica che la strategia fornisce un ritorno più elevato rispetto alla volatilità assunta.

La perdita massima della strategia (Max Drawdown) risulta essere di molto inferiore rispetto a quella del benchmark, indicando che essa risulti essere meno soggetta a cali drastici durante le fasi di ribasso del mercato.

Il Calmar Ratio della strategia, superiore di più di tre volte rispetto a quello del benchmark, dimostra ancora una volta la maggiore resilienza da parte della strategia rispetto ai cali del mercato.

Inoltre, la strategia mostra una volatilità inferiore, il che significa un andamento più stabile nel corso del periodo analizzato, fattore particolarmente importante per gli investitori con una maggiore avversione al rischio.

Infine, il rendimento annualizzato della strategia risulta essere leggermente superiore a quello dell'indice, 7,6008% contro 7,4095%.

In conclusione, sebbene il vantaggio in termini di rendimento assoluto sia limitato, il miglior rapporto rischio-rendimento e la minore volatilità rendono la strategia molto più attraente per un eventuale investitore, piuttosto che l'investimento passivo nell'S&P500.

4.2 Strategia di trading Skewness-Based

4.2.1 Ideazione e realizzazione della strategia

La presente strategia mira a sfruttare uno dei momenti superiori della distribuzione di probabilità neutrali al rischio implicita nelle opzioni sull'S&P500, ossia la skewness, come parametro per poter creare segnali di trading sull'indice. La strategia sviluppata nel seguente paragrafo, mira, quindi, a sfruttare la relazione inversa tra la skewness e l'andamento dell'indice, e quindi la natura predittiva della stessa, per cui valori minori della skewness sono correlati a valori dell'indice maggiori, permettendo quindi di anticipare eventuali tendenze rialziste nei rendimenti. Il concetto secondo cui, gli investitori considerano i momenti superiori della distribuzione, inclusa la skewness, è ampiamente riconosciuto nella letteratura finanziaria. I modelli teorici proposti da studiosi come [Kraus e Litzenberger \(1983\)](#)⁷⁴ incorporano la skewness nei quadri di riferimento per la previsione dei rendimenti attesi. Inoltre, studi empirici hanno confermato la rilevanza dei momenti superiori nella valutazione dei titoli finanziari. La ricerca di [Barberis e Huang \(2009\)](#)⁷⁵, insieme ai risultati raggiunti da [Mitton e Vorkink \(2007\)](#)⁷⁶, suggerisce che la skewness dei rendimenti delle singole attività finanziarie possa influenzare le scelte di portafoglio degli investitori.

In questa parte della tesi, introduco quindi, un metodo per valutare l'impatto della skewness sui rendimenti degli asset, in particolare sull'indice S&P500. I valori della skewness, ricavati dal sito della FED di Minneapolis, sono stati ottenuti attraverso l'utilizzo dei dati di mercato delle opzioni, partendo sempre dal presupposto che i prezzi delle opzioni riflettano il consenso del mercato sulle aspettative future.

L'analisi, già svolta nel precedente paragrafo, realizzata per questa strategia mostra una correlazione negativa (figura 9), circa -0,46, tra skewness e rendimenti futuri dell'S&P500. Questa correlazione negativa tra skewness e l'andamento futuro dell'indice, potrebbe sembrare andar contro la letteratura finanziaria, la quale generalmente tende a suggerire una

⁷⁴ Kraus, A., & Litzenberger, R. H. (1973). A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage. *The Journal of Finance*, 28(4), 911–922. <https://doi.org/10.2307/2978343>

⁷⁵ Nicholas Barberis, Ming Huang, Preferences with frames: A new utility specification that allows for the framing of risks, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Volume 33, Issue 8, 2009

⁷⁶ Todd Mitton, & Vorkink, K. (2007). Equilibrium Underdiversification and the Preference for Skewness. *The Review of Financial Studies*, 20(4), 1255–1288. <http://www.jstor.org/stable/4494802>

relazione positiva tra queste due variabili. Dietro a questo fenomeno osservato, vi potrebbero delle spiegazioni logiche, strutturali e comportamentali alquanto interessanti. Una skewness molto negativa riflette una forte domanda di protezione al ribasso da parte degli investitori, tipicamente associata a condizioni di mercato caratterizzate da timore ed incertezza. Storicamente, però, questi momenti di paura sono spesso seguiti da rimbalzi dei prezzi, di conseguenza è possibile affermare, che il mercato tenda a salire nei mesi successivi ad una fase in cui la distribuzione neutrale al rischio mostra una coda sinistra molto pronunciata. Inoltre, poiché all'interno della mia analisi la skewness viene confrontata con l'andamento dell'indice a sei mesi, il risultato appare coerente con una visione in cui le aspettative pessimistiche del mercato si rivelano eccessive, favorendo una successiva rivalutazione dell'S&P500.

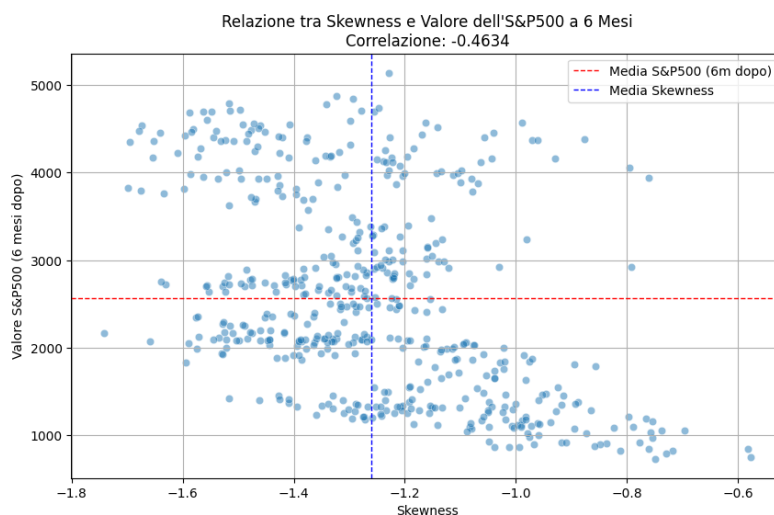


Figura 9

Nel contesto di questa analisi, quindi, la skewness si comporta come un indicatore inversamente correlato all'andamento futuro del mercato, permettendomi quindi di usarlo come parametro all'interno di una strategia di trading di tipo contrarian. La strategia di trading presentata in questo paragrafo, quindi, adotta la skewness come indicatore chiave, suggerendo di andare long sull'indice quando il livello di skewness scende (diventa più negativa) al di sotto di un determinato threshold (buy threshold) e di assumere una posizione short sull'indice, quando la skewness supera (diventa meno negativa) un determinato threshold (sell threshold).

Come visto in precedenza, non è possibile assumere direttamente una posizione long o short su un indice; perciò, nell'implementazione della strategia l'investitore dovrebbe assumere

l'utilizzo di uno strumento finanziario derivato, che gli permetta di replicare l'andamento dell'S&P500. Tale strumento può consistere, ad esempio, in contratti futures sull'indice, in particolare *E-mini S&P500 Futures*⁷⁷. Tali strumenti consentono, inoltre, di implementare agevolmente sia strategia long che short, in linea con l'approccio descritto. La determinazione dei threshold di acquisto e di vendita è stata effettuata mediante una procedura di ottimizzazione discreta su griglia (grid search), limitata ad un intervallo ristretto intorno a valori target predefiniti (determinati basandomi sulla distribuzione dei valori della skewness, in modo da poter sfruttare al meglio la relazione inversa tra skewness ed andamento dell'indice; figura 10). Conseguentemente, è stata definita una griglia di valori candidati per il buy threshold (b) ed il sell threshold (s), rispettivamente nei range (-1.15, -1.05) e (-1.00, -0.90). Per ogni coppia ammissibile (con b sempre più negativo di s), è stato calcolato un indicatore sintetico di profitto atteso, ispirato al metodo proposto da [Spyros Skouras \(2000\)](#)⁷⁸, che combina due componenti: il rendimento medio atteso nelle situazioni in cui la skewness supera le soglie (quindi quando $skewness < b$ oppure $skewness > s$), pesato per la probabilità cumulata associata alla media generale dei rendimenti rapportata alla volatilità generale; ed un termine correttivo che incorpora la dispersione dei rendimenti e modella la probabilità di eventi rari tramite la funzione di densità della normale standardizzata. A tale misura, è stato inoltre sottratto un termine di penalizzazione, proporzionato alla distanza tra i due threshold (modulo della differenza tra s e b), ponderato con un parametro alpha, il quale è stato settato a 0.5), con lo scopo di incentivare la selezione di soglie di acquisto e di vendita con valori ravvicinati, al fine di avere più operazioni di trading possibili e quindi una maggiore reattività della strategia all'interno dell'arco temporale analizzato.⁷⁹

⁷⁷ I contratti E-mini S&P500 Futures (ticker:ES) sono scambiati al CME (Chicago Mercantile Exchange). Maggiori dettagli tecnici e regolamentari sono disponibili sul sito ufficiale della CME: [Futures & Options Trading for Risk Management - CME Group](#)

⁷⁸ S. Skouras, Risk Neutral Forecasting. Santa Fe, NM: Santa Fe Institute, 2000.

⁷⁹ *Directional forecasts with Risk-Neutral probabilities and Skewness-Based trading strategy*. (2024). New York University (NYU).

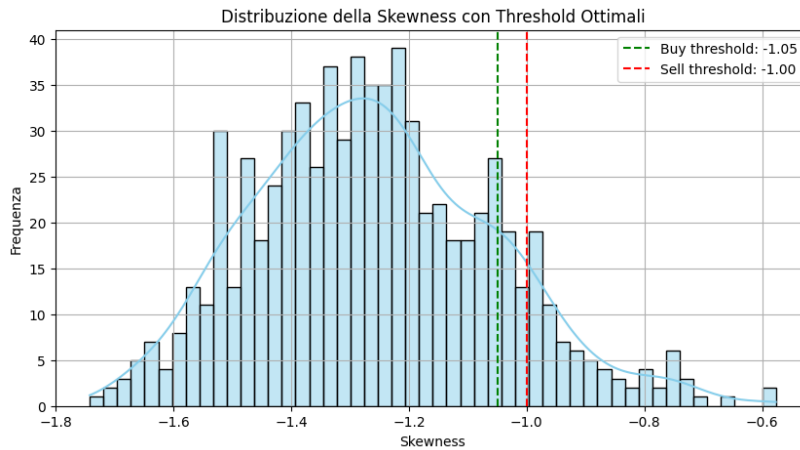


Figura 10

Il processo appena delineato per la determinazione dei threshold ottimali, da usare per la determinazione dei segnali di trading all'interno della strategia, consente di stimare per le diverse coppie un valore atteso netto di profitto operativo, bilanciando rendimento e frequenza dei segnali. La coppia di valori ottimali viene identificata all'interno del codice con i nomi `best_b` e `best_s` ed è utilizzata successivamente come condizione discriminante per la generazione dei segnali di trading all'interno della mia strategia.

4.2.2 Risultati della strategia

Così come fatto per la strategia Long-only basata sul primo momento della distribuzione, anche in questo caso per testare la performance della mia strategia l'ho confrontata con l'andamento dell'indice, usato come benchmark, all'interno dell'arco temporale analizzato (figura 11).

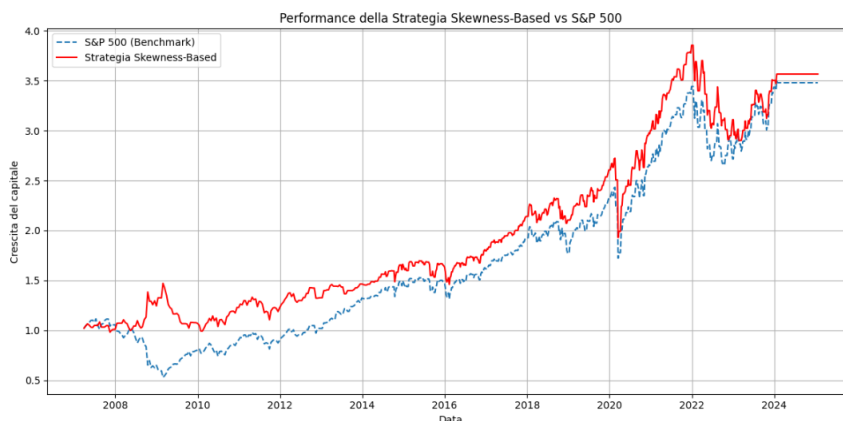


Figura 11

Tale grafico rappresenta l'evoluzione della crescita cumulativa del capitale generata dalla strategia skewness-based (linea rossa) messa a paragone con il benchmark, costituito appunto, dall'andamento dell'indice (linea tratteggiata blu). Così come nel caso della strategia Long-only, anche in questo caso si può notare come la strategia Skewness-based outperformi quasi costantemente l'indice, in particolare durante fasi di elevata volatilità. La robustezza di tale strategia si può notare in particolare nella sua maggior stabilità del profilo di crescita nei momenti di ribasso dell'indice, particolarmente evidenti durante la crisi finanziaria globale del 2008 e la crisi pandemica del 2020. L'andamento del rendimento della strategia presenta un comportamento meno reattivo nelle fasi di ribasso, suggerendo un minor rischio di downside ed una migliore esposizione al mercato.

Infine, per poter portare avanti una comparazione maggiormente dettagliata tra il benchmark e la strategia skewness-based, ho analizzato le principali metriche di performance, i cui risultati sono riassunti all'interno della tabella 3.

Confronto tra Strategia Skewness-Based e Benchmark (S&P 500):

Metriche	Strategia Skewness-Based	Benchmark (S&P 500)
Sharpe Ratio	1.5483	1.2499
Max Drawdown	-32.5723%	52.5559%
Calmar Ratio	0.2374	0.0039
Annualized Volatility	48.2694%	41.1748%
Annualized Return	7.7321%	7.4095%

Tabella 3

Tale analisi comparativa evidenzia come la strategia creata in questo paragrafo riesca ad ottenere risultati complessivamente superiori rispetto al benchmark, operando al tempo stesso in un contesto di rischio contenuto. Lo Sharpe Ratio della strategia skewness-based risulta essere superiore a quello dell'indice (1.5483 rispetto a 1.2499), dimostrando una migliore capacità di generare rendimento per unità di rischio. Ciò è ulteriormente corroborato dal valore del Max Drawdown più contenuto della strategia (-32.5723% rispetto a -52.5559%), il che riflette una maggiore protezione del capitale durante le fasi di ribasso. Continuando con l'analisi, anche il Calmar Ratio, che misura il rendimento annuo rispetto al Max Drawdown, risulta essere significativamente maggiore per la strategia, confermando ancora una volta, l'efficienza nel rapporto tra rendimento e massima perdita subita. Infine, è possibile notare come in termini di rendimento annualizzato, la strategia registra un valore lievemente superiore a quello dell'indice, sovraperformance che si verifica in un contesto di volatilità leggermente più elevata. In conclusione, tali risultati suggeriscono che l'utilizzo di

un momento superiore come la skewness, solitamente trascurata nelle strategie tradizionali, possa portare alla creazione di una strategia di trading che realizza un rendimento atteso più favorevole, un migliore controllo del rischio ed una robustezza operativa maggiore rispetto ad una strategia volta ad un investimento passivo nell'indice.

4.3 Relazione inversa tra VIX e S&P500 e possibili strategie di trading

In questo paragrafo, analizzo come i momenti superiori della distribuzione e le caratteristiche di coda della distribuzione neutrale al rischio possano aiutare alla determinazione di segnali di trading sull'S&P500, sfruttando le previsioni sul VIX.

Il CBOE Volatility Index (VIX) è un indice che riflette, in tempo reale, le aspettative del mercato circa l'intensità delle variazioni di prezzo dell'indice S&P500 nel breve termine. Poiché viene calcolato sulla base dei prezzi delle opzioni sull'indice con scadenze ravvicinate, il VIX fornisce una proiezione prospettica della volatilità su un orizzonte temporale di 30 giorni. Il VIX è storicamente correlato in modo inverso all'andamento dell'S&P500; per spiegare la motivazione di ciò, bisogna ricordarsi che il principale indicatore di rischio di un titolo è proprio la sua volatilità. All'aumentare della volatilità l'investitore richiederà un rendimento maggiore. Dato che i prezzi delle azioni sono scontati per il tasso di interesse corrisposto, un aumento di quest'ultimo porterà i prezzi a diminuire. Di conseguenza, quando il VIX aumenta, a causa di un aumento della volatilità, l'indice S&P500 si riduce, a causa di un aumento dei tassi di interesse (figura 12).

In questa mia analisi, quindi, propongo e valuto una strategia di trading basata sull'utilizzo di previsioni a 30 giorni del VIX generate da modelli GARCH e LSTM. L'obiettivo consiste nel valutare se le tecniche di previsione possano essere impiegate in modo efficace per sfruttare la relazione tra le aspettative di volatilità ed i rendimenti del mercato all'interno di un framework di trading sistematico.

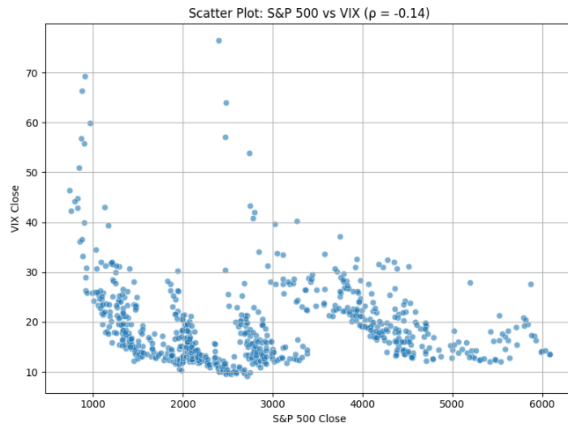


Figura 12

4.3.1 Ideazione e realizzazione della strategia

La mia analisi impiega i prezzi di chiusura aggiustati dell'indice S&P500 e del CBOE VIX, per le date di cui abbiamo i valori dei momenti della distribuzione neutrale al rischio, ottenuti rispettivamente dal sito [investing.com](https://www.investing.com)⁸⁰ e dal sito del CBOE⁸¹. I momenti della distribuzione neutrale al rischio impliciti nelle opzioni sull'S&P500, invece, sono stati estratti dal sito della Federal Reserve Bank di Minneapolis⁸². Il periodo compreso nella mia analisi va da marzo 2007 a dicembre 2024.

La previsione della volatilità realizzata costituisce un pilastro dell'impianto analitico della mia strategia, in quanto consente di cogliere i comportamenti storici del mercato e di stabilire un riferimento statistico utile per valutare l'incertezza futura. In quanto indicatore sintetico del sentiment di mercato, il VIX riflette le aspettative degli investitori in merito alla volatilità, rendendo la previsione della volatilità realizzata un passaggio preliminare logico per poter comprendere le dinamiche evolutive del VIX.

Il modello da me usato è il GARCH (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model), il quale all'interno dell'econometria finanziaria rappresenta uno strumento ampiamente consolidato. Esso è in grado di catturare la natura tempo-variante della volatilità nei dati finanziari, incorporando sia i rendimenti quadratici con lag che le varianze passate nella determinazione della varianza attuale. Inoltre, tale modello si dimostra particolarmente efficace nel rappresentare il fenomeno del clustering della volatilità, una

⁸⁰ Cronologia prezzi S&P 500 (SPX) - Investing.com

⁸¹ VIX Index Historical Data

⁸² Current and Historical Market-Based Probabilities | Federal Reserve Bank of Minneapolis

caratteristica ricorrente nei mercati finanziari.

Ai fini della calibrazione del modello GARCH, nella mia analisi ho fatto ricorso all’uso della Funzione di Autocorrelazione Parziale (PACF), la quale consente di identificare i lag significativi nella serie storica della volatilità realizzata. Tale analisi guida la costruzione delle previsioni, contribuendo a delineare il grado e la persistenza della volatilità nel tempo. Il grafico della Funzione di Autocorrelazione parziale (PACF), riportato in figura 13, evidenzia una significativa autocorrelazione parziale al primo lag, seguita da un rapido decadimento nei lags successivi. Questo comportamento suggerisce un processo a memoria breve, coerente con l’applicazione di un modello GARCH (1, n).

Per il modello GARCH (1, 1) adottato, la formulazione matematica è la seguente:

$$\sigma^2_t = \omega + \alpha_1 \cdot \sigma^2_{t-1} + \beta_1 \cdot \varepsilon^2_{t-1}$$

In questa equazione, σ^2_t rappresenta la varianza condizionale al tempo t, mentre ε_{t-1} indica il termine d’errore con lag. Il parametro ω è la costante, α_1 è il coefficiente associato alla prima varianza con lag, e β_1 è il coefficiente relativo al primo termine d’errore al quadrato.⁸³

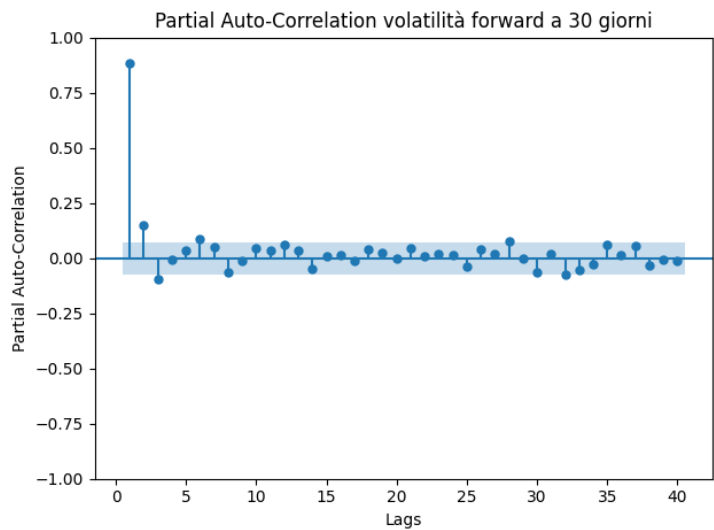


Figura 13 : Grafico PACF volatilità forward a 30 giorni

Parameter	Coefficient	Std. Error	t-stat	P> t
omega	218.997	84.597	2.589	0.01
alpha[1]	0.197	0.050	3.970	0.00
beta[1]	0.028	0.288	0.097	0.92

⁸³ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry.* (2024). UCLA.

Tabella 4 : parametri GARCH (1,1)

Sulla base delle previsioni della volatilità realizzata, il passo successivo prevede l'integrazione di ulteriori fattori predittivi all'interno del modello di previsione del VIX, impiegando metriche di coda della distribuzione neutrale al rischio implicita nelle opzioni sull'S&P500, le quali si presume riflettano informazioni incorporate da investitori informati. Attraverso un'analisi di regressione lineare, tali variabili vengono testate al fine di identificare quelle con un significativo potere esplicativo nei confronti dei movimenti futuri del VIX. Il modello di regressione adottato assume la seguente forma:

$$VIX_{t+30} = \beta_0 + \beta_1 \cdot Predicted\ volatility + \beta_2 \cdot skew + \beta_3 \cdot p10 + \beta_4 \cdot p90 + \beta_5 \cdot prIncrease + \beta_6 \cdot prDecrease$$

Dove VIX_{t+30} rappresenta la previsione del VIX a 30 giorni; skew rappresenta la skewness della distribuzione neutrale al rischio; p10 e p90 corrispondono, rispettivamente, al 10° e 90° percentile della distribuzione risk-neutral; prIncrease e prDecrease indicano la probabilità, su un orizzonte semestrale, di un incremento o una diminuzione del 20% dell'S&P500.⁸⁴

Parameter	Coefficient	Std. Error	t-stat	P> t
const	-16.7905	1.7602	-9.539	0.000
Predicted Volatility	0.1741	0.0339	5.140	0.000
skew	-3.9292	0.5199	-7.558	0.000
p10	-114.5600	12.3060	-9.309	0.000
p90	121.2669	10.8691	11.157	0.000
prIncrease	13.4400	10.9045	1.233	0.218
prDecrease	-118.0311	18.1885	-6.489	0.000

R² del modello OLS: 0.9142

Tabella 5: Sintesi della regressione delle variabili predittive

L'unica variabile che presenta una assenza di significatività statistica è "prIncrease". L'esclusione di tale variabile consente di ottenere una significatività statistica per tutte le restanti variabili al livello di confidenza del 95%, con un valore di R² pari al 91%, indicando una forte capacità esplicativa del modello nella previsione del VIX.

⁸⁴ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry*. (2024). UCLA.

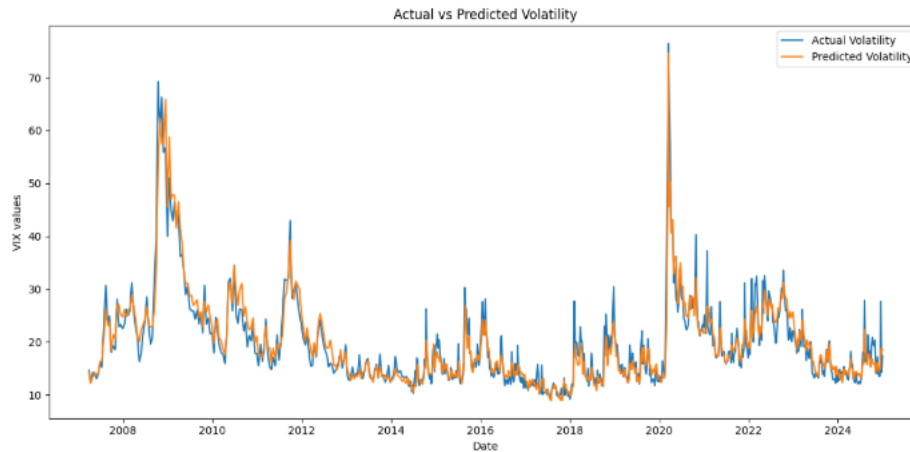


Figura 14: Valori Realizzati e Predetti della volatilità (Out of Sample)

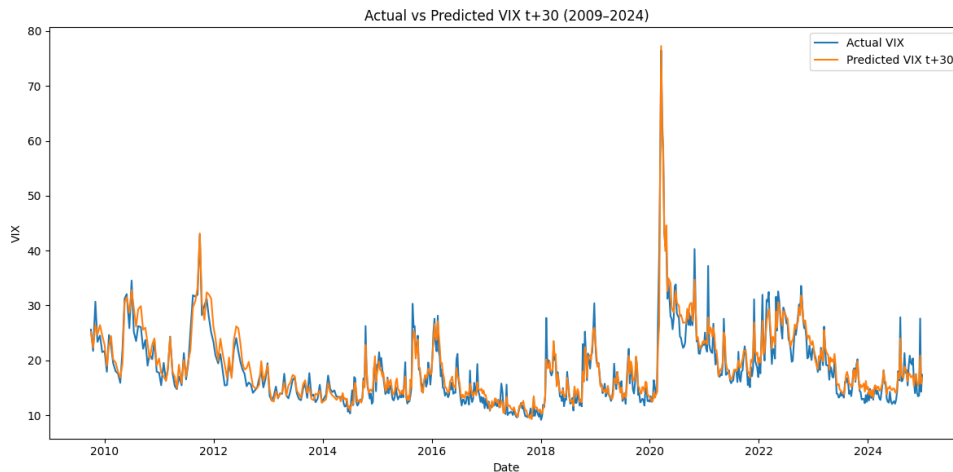
Una volta identificate le variabili predittive più rilevanti, la mia analisi si sposta sull'impiego di un modello Long-Short Term Memory (LSTM) ibrido, al fine di catturare la complessità intrinseca delle dinamiche di mercato. L'utilizzo di tecniche di regolarizzazione e dropout consente di migliorare la capacità di generalizzazione out of sample, mitigando il rischio di overfitting. Inoltre, la struttura sequenziale del modello, culminante in un denso output layer, risulta particolarmente adatta ad un compito di previsione continua come quello svolto in questa analisi. In particolare, questo modello ibrido consiste in un modello LSTM + RND che combina due fonti di informazione. Da un lato, una rete LSTM che elabora la sequenza storica del VIX e della sua volatilità prevista, ottenuta tramite il modello GARCH, catturando le dinamiche temporali; dall'altro lato, un blocco denso che utilizza variabili derivate dalla distribuzione neutrale al rischio implicita nelle opzioni sull'S&P500, come skewness, percentili e probabilità di movimenti estremi dell'indice, che riflettono le aspettative degli investitori. A differenza di un semplice modello LSTM, che lavora solo su sequenze temporali, questo modello integra anche segnali non sequenziali ma informativi in un'unica rete, migliorando di conseguenza la capacità predittiva.

All'interno della tabella 6 troviamo le metriche di performance del nuovo modello LSTM ibrido, da cui è possibile ricavare la conclusione che il modello ha una migliore capacità esplicativa rispetto al modello OLS precedentemente analizzato (R^2 pari a 93% circa invece che 91%).

Performance del modello LSTM Ibrido

```
=====
R2   : 0.9329
MSE    : 3.1755
MAE    : 1.1807
```

Tabella 6

Figura 15: Valori Realizzati vs. Predetti VIX_{t+30}

Una volta ottenuti i valori previsti del VIX, è stato possibile costruire segnali di trading sfruttando la documentata relazione inversa tra il VIX e l'andamento dell'indice S&P500. Considerando un margine di sicurezza pari al 20% per tenere conto di possibili fluttuazioni giornaliere dovute a rumore nei valori stimati del VIX_{t+30} i segnali di trading sono stati definiti come segue⁸⁵:

Posizione Long : $VIX_{t+30} < 1.2 \times VIX \text{ MA (Moving Average a 30 giorni del VIX)}$.

Posizione Short : $VIX_{t+30} > 1.2 \times VIX \text{ MA (Moving Average a 30 giorni del VIX)}$.

A questo punto ho definito tre possibili strategie di trading, una strategia Long-only, una Short-only ed una terza strategia capace di combinare la strategia Long e quella Short, per poter beneficiare dell'andamento sia delle posizioni long che di quelle short. Inoltre, ho implementato una strategia di stop-loss dinamico al fine di consolidare i profitti accumulati e limitare le perdite al variare delle condizioni di mercato. In particolare, per le posizioni long, lo stop-loss veniva attivato quando il prezzo dell'indice scendeva del 5% rispetto al massimo raggiunto dall'apertura della posizione, proteggendo così i guadagni

⁸⁵ *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry*. (2024). UCLA.

realizzati nel periodo precedente. Per quanto riguarda le posizioni short, ho applicato un criterio simmetrico, ossia il riacquisto veniva effettuato se il prezzo saliva del 5% rispetto al minimo registrato, andando così a limitare potenziali perdite.

Le tre strategie (che vanno dal 2009 al 2024) sono poi state oggetto di un backtest usando i rendimenti storici dell'S&P500 all'interno dell'arco temporale considerato. Infine, nella analisi non sono stati inclusi né costi di transazione né slippage.

Anche in questo caso, come nelle strategie precedenti, poiché non è possibile assumere direttamente posizioni long o short sull'indice, l'eventuale investitore nel realizzare questa strategia dovrebbe assumere, nella pratica, posizioni long/short sull'indice attraverso l'utilizzo di contratti futures, come gli *E-mini S&P500 Futures*.

4.3.2 Risultati della strategia

Com'è possibile comprendere dal grafico (figura 16) e dalla tabella 7, unendo le strategie Long-only e Short-only è possibile creare una strategia di trading più efficiente, con performance nettamente migliori.

La strategia combinata Long/Short si distingue infatti nettamente come la più efficiente, con uno Sharpe Ratio pari a circa 11,32, il più elevato tra le strategie analizzate, indicando un ottimo rapporto rischio rendimento. Inoltre, tale strategia presenta una volatilità annualizzata pari al 30,85%, inferiore rispetto a quella del benchmark, ed un max drawdown contenuto a -12,43%, elemento che sottolinea una efficace gestione della fase negativa del mercato. La strategia Long-only mostra anch'essa risultati solidi, con un elevato Sharpe Ratio (9,9957), una volatilità annualizzata contenuta, intorno al 30% ed un max drawdown del -10,68%, confermando la capacità di tale strategia di generare rendimenti robusti pur in presenza di una sola direzionalità del segnale.

Al contrario, la strategia Short-only evidenzia performance significativamente peggiori. Essa, infatti, presenta uno Sharpe Ratio di appena 0,5618 ed un max drawdown più elevato rispetto alle altre due strategie (-19,52%).

Il confronto col il benchmark (l'indice S&P500) conferma la superiorità della performance delle strategie basate sui segnali derivati dall'utilizzo dei valori predetti del VIX a 30 giorni. Il benchmark, infatti, presenta un max drawdown molto più accentuato (-52,56%) ed uno Sharpe ratio pari a 1,25 circa, decisamente inferiore a quello delle due principali strategie attuate

In conclusione, i risultati appena descritti, supportano con forza l'efficacia di un approccio

predittivo e sistematico basato sull'utilizzo di un modello LSTM ibrido per la determinazione dei valori futuri del VIX e il loro conseguente utilizzo per la creazione di segnali di trading. Ciò, integrato all'utilizzo di trailing stop loss dinamici, permette di generare strategie con rendimenti superiori rispetto all'investimento passivo nell'indice, sia in termini assoluti che risk-adjusted.

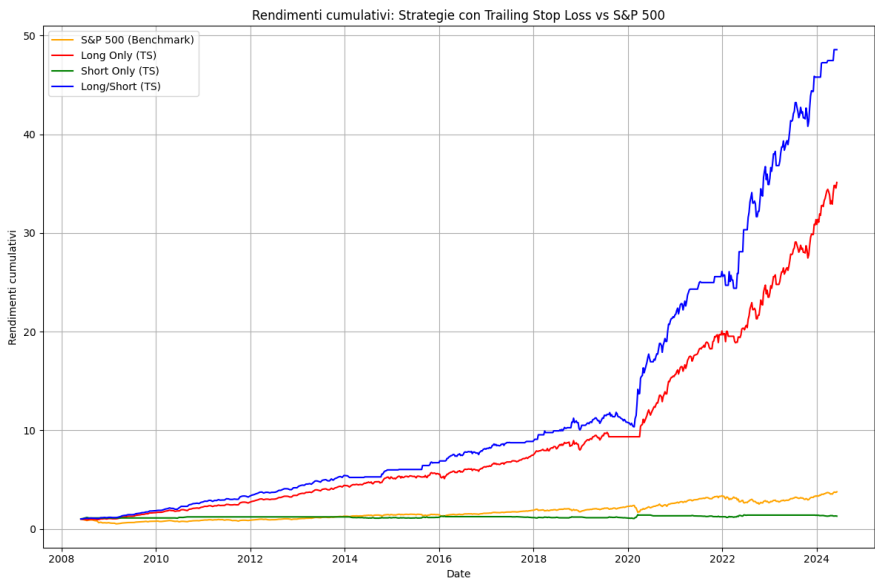


Figura 16

	Sharpe Ratio	Max Drawdown	Annualized Volatility
Long Only (TS)	9.9957	-0.1068	0.2967
Short Only (TS)	0.5618	-0.1952	0.2375
Long/Short (TS)	11.3172	-0.1243	0.3085
S&P 500 (Benchmark)	1.2499	-0.5256	0.4117

Tabella 7

Capitolo 5: Modelli e dataset alternativi per la creazione di strategie di trading

All'interno di questo capitolo, andrò a implementare le strategie di trading, basate sull'utilizzo dei momenti della distribuzione neutrale al rischio implicita nelle opzioni sull'S&P500, andandole a combinare con altri dati ed approcci per migliorarne l'efficacia. Infatti, la combinazione di dati eterogenei, con modelli di machine learning consente di superare i limiti delle strategie basate su singoli variabili o approcci deterministici.

5.1 Miglioramento della strategia skewness-based attraverso un modello di albero decisionale

In questo paragrafo, vado ad integrare ulteriori indicatori tecnici con l'obiettivo di potenziare le performance della strategia di trading basata sulla skewness, esplorando il potenziale predittivo del modello classico di machine learning di albero decisionale. Tale scelta è motivata dall'osservazione che le caratteristiche strutturali degli alberi decisionali risultano particolarmente adatte alla natura categoriale di tale strategia attuata. In effetti, l'approccio skewness-based si fonda sulla formulazione di decisioni binarie di acquisto o vendita, determinate dal superamento di un threshold da parte di uno specifico indicatore. Questa logica operativa rispecchia i principi fondamentali alla base degli alberi decisionali. Alla base del funzionamento di un modello di albero decisionale, vi è un processo ricorsivo di suddivisione dello spazio delle caratteristiche in sottoinsiemi sempre più omogenei. A ogni livello della struttura gerarchica, il modello seleziona le variabili e i threshold che minimizzano una misura di impurità prestabilita, proseguendo nella segmentazione finché ulteriori partizioni non determinano una riduzione significativa dell'impurità. Tra le diverse metriche disponibili, ho adottato l'indice di Gini, una misura ampiamente utilizzata per quantificare il grado di "impurità" tra le classi all'interno di una regione decisionale. Dal punto di vista formale, l'indice di Gini per una regione decisionale è definito come:

$$\sum p_v (1-p_v)$$

Dove v rappresenta le classi distinte presenti nella regione e p_v la probabilità stimata di selezionare casualmente, con reinserimento, un'osservazione appartenente alla classe v . Più basso è il valore dell'indice Gini, maggiore è la purezza della regione; un valore pari a zero indica una separazione perfetta, ossia un sottoinsieme totalmente omogeneo senza errori di classificazione.

5.1.1 Creazione e addestramento del modello

Il modello è stato addestrato con l'obiettivo di prevedere la direzione del movimento del prezzo dell'indice a un giorno di distanza. Su tale base, è stata implementata una strategia di trading piuttosto semplice: una previsione di un incremento del prezzo dell'indice, generava un segnale di acquisto, mentre una previsione di riduzione del prezzo dell'indice, attivava un segnale di vendita dello stesso. Una volta

definito tale modello, il passo successivo ha riguardato il processo di selezione delle variabili esplicative (feature selection). Sulla base del dataset disponibile e dei dati ricavabili da esso, ho potuto identificare un insieme ottimale di variabili significative per poter migliorare la capacità predittiva del modello e di conseguenza implementare l'efficacia della strategia operativa.

Il set di variabili da me identificato comprende le seguenti:

- i) Skewness: considerata la centralità della skewness nella strategia di trading “skewness-based” che questo modello propone di migliorare, questo momento superiore della distribuzione neutrale al rischio è stato inclusa nel modello di albero decisionale.
- ii) Probabilità di un aumento del 20% dell'indice – Probabilità di una riduzione del 20% dell'indice (presenti nel dataset ricavato dal sito della FED di Minneapolis): come evidenziato negli scorsi capitoli, le stime di probabilità di rialzo e di ribasso spesso presentano movimenti sincronizzati, rendendo difficile l'identificazione della direzione implicita attesa. Per affrontare questa problematica, ho utilizzato la differenza tra le due stime, con l'obiettivo di sfruttare la loro relazione relativa come potenziale indicatore della traiettoria prevista dell'indice S&P500.
- iii) Segnali di trading generati dalla strategia skewness-based: al fine di aumentare le capacità di tale strategia, ho impiegato un metodo di bootstrapping. Nello specifico, i segnali generati da tale strategia sono stati forniti come variabile in input al modello di albero decisionale, con l'obiettivo di migliorarne l'accuratezza e la precisione, attraverso un processo di apprendimento del modello.
- iv) MACD (Moving Average Convergence Divergence): un indicatore di momentum basato sul trend, composto da due linee, ossia la linea MACD e la linea del segnale. La prima è derivata sottraendo la media mobile esponenziale (EMA) a

26 periodi da quella a 12 periodi, mentre la seconda è tipicamente la media mobile esponenziale a 9 periodi della linea MACD stessa. L'uso delle medie mobili esponenziali pone maggiore enfasi sulle variazioni recenti dei prezzi, consentendo al MACD di reagire in modo dinamico ai movimenti dell'indice. Un segnale rialzista è generato quando la linea MACD incrocia dal basso la linea del segnale (e viceversa per i segnali di ribasso).

- v) RSI (Relative Strength Index): esso è un altro indicatore di momentum, progettato per quantificare la condizione di ipercomprato o ipervenduto di un asset. Il valore dell'RSI oscilla tra 0 e 100, con valori elevati che tipicamente indicano una condizione di ipercomprato da parte del mercato, suggerendo che il prezzo potrebbe essere prossimo ad una correzione o ad un rintracciamento (e viceversa).⁸⁶

5.1.2 Risultati

Per andare ad analizzare la performance del modello appena descritto, ho usato la stessa metodologia di backtesting, introdotta precedentemente nelle altre strategie. Ciò significa che ho usato i dati storici dell'indice S&P500, per andare ad analizzare i ritorni cumulativi della strategia per valutarne la performance passata e stimare come si sarebbe comportata se fosse stata applicata in tempo reale. Tali risultati sono riassunti all'interno della figura 16 e della tabella 8:

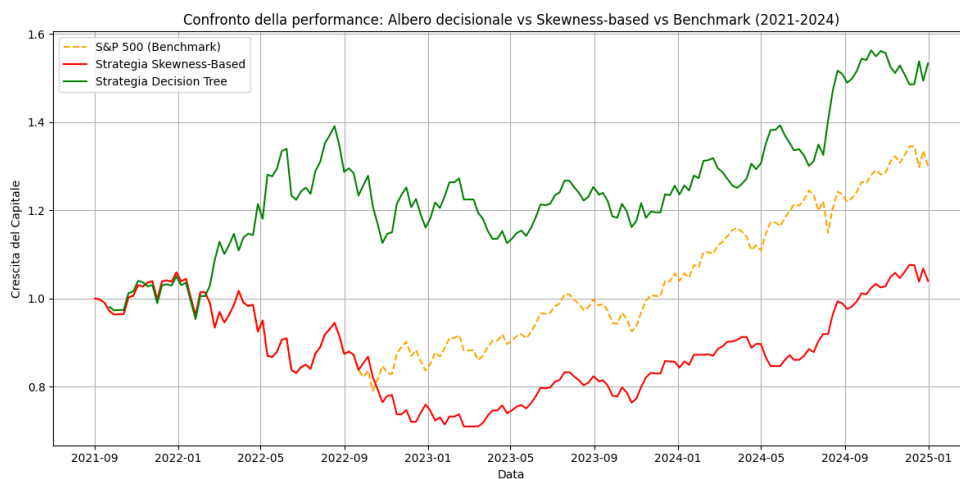


Figura 16

⁸⁶ Directional forecasts with Risk-Neutral probabilities and Skewness-Based trading strategy. (2024). New York University (NYU).

Confronto delle Metriche di Performance tra le Strategie

Strategia	Sharpe Ratio	Volatilità Annualizzata (%)	Max Drawdown (%)
Skewness-Based	0.362948	36.5188	-33.024
Decision Tree	1.84599	37.805	-19.086
Benchmark (S&P 500)	1.2499	41.178	-52.56

Tabella 8

Come si può osservare da grafico, il modello ad albero decisionale è riuscito a distaccarsi dalla fase di stallo del mercato, già nelle prime fasi del periodo di test, mantenendo una performance costantemente superiore sia rispetto al benchmark (S&P500), sia rispetto alla strategia skewness-based, simulata come se l'investimento avesse lo stesso orizzonte temporale del periodo di test del modello decision tree.

Andando ad analizzare le metriche di performance descritte nella tabella 8, è possibile affermare che le strategie a confronto presentano significative differenze in termini di performance rischio-rendimento. La strategia basata sull'albero decisionale presenta lo Sharpe Ratio migliore (1,85), indicando così un rendimento molto efficiente rispetto al rischio assunto. Ciò, nonostante presenti una volatilità annualizzata in linea sia con la strategia skewness-based, che col benchmark. Infine, la strategia ad albero decisionale contiene efficacemente le perdite massime, con un Max drawdown del -19,09%, di molto inferiore sia al valore della strategia skewness, che dell'indice S&P500.

Questi risultati evidenziano la potenziale efficacia dell'integrazione del modello ad albero decisionale all'interno della strategia di trading skewness-based, suggerendo che tale approccio possa contribuire significativamente al miglioramento della capacità predittiva e dell'efficienza operativa complessiva.

5.2 Utilizzo delle RWDs in strategie di trading

Nel precedente capitolo, la disponibilità limitata di dati ha impedito la implementazione di modelli di machine learning più sofisticati, i quali avrebbero potuto contribuire ad una migliore identificazione delle dinamiche sottostanti del mercato. Un esempio, che verrà utilizzato all'interno di questo paragrafo, è rappresentato dalla famiglia dei metodi di gradient boosting (come il modello XGBoost), ampiamente impiegati in numerosi ambiti

applicativi, tra cui previsione di volatilità ([Teller et al., 2022](#))⁸⁷ e la creazione di strategie di trading ([Qin et al., 2013](#))⁸⁸. Tali modelli si basano su una sequenza di “weak learners”, come possono esserlo gli alberi decisionali, che vengono combinati iterativamente al fine di migliorarne progressivamente la performance.

All'interno di questo paragrafo, quindi, andrò ad implementare un modello di machine learning più sofisticato, unendo le capacità predittive di un modello LSTM ed un XGBoost, con l'obiettivo finale di realizzare una strategia di trading sull'S&P500.

Prima di realizzare la strategia di trading però, andrò a implementare il dataset a mia disposizione, trasformando i momenti della distribuzione neutrale al rischio (Q-measure), in momenti della distribuzione sotto la misura reale (P-measure).⁸⁹

5.2.1 Passaggio da una misura risk-neutral (Q) ad una real-world (P)

Sebbene le distribuzioni neutre al rischio (RNDs) forniscano probabilità teoriche derivate dalla valutazione delle opzioni, esse tendono spesso a trascurare l'avversione al rischio reale insita nei mercati. In questo paragrafo, quindi, vado a ricalibrarle verso distribuzioni nel mondo reale (RWDs), provando ad offrire un framework potenzialmente più accurato e operativo per la previsione finanziaria ed il processo decisionale.

Questa idea di trasformazione della RND in RWD si inserisce sulla scia del lavoro di [Stephen J. Strommen](#)⁹⁰, il quale ha condotto una approfondita analisi sul rapporto tra generatori di scenari basati sulla misura reale (P) e quelli basati sulla misura di rischio neutro (Q). Strommen propone l'utilizzo della misura reale a fini previsionali, evidenziando come essa incorpori l'avversione al rischio propria del mondo reale, mediante l'inclusione di un premio per il rischio nei tassi di sconto, garantendo così valutazioni coerenti con il mercato e simulazioni di scenari più realistici.

Le principali differenze tra la misura reale (P-measure) e la misura di rischio neutro (Q-measure) sono le seguenti:

⁸⁷ A. Teller, U. Pigorsch, and C. Pigorsch, “Short- to long-term realized volatility forecasting using extreme gradient boostin,” SSRN Electronic Journal, 2022.

⁸⁸ J. L. S. S. G. Qin, Qing-Guo Wang, “Linear and nonlinear trading models with gradient boosted random forests and application to Singapore stock market,” Journal of Intelligent Learning Systems and Applications, 2013

⁸⁹ *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives*. (2023). Fordham University.

⁹⁰ Stephen J. Strommen. “Understanding the Connection between Real-World and Risk-Neutral Scenario Generators”. In: Society of Actuaries Research Institute (Aug. 2022).

- i) A differenza della misura di rischio neutro, che presuppone un atteggiamento neutrale al rischio al fine di prevenire arbitraggi, la misura reale incorpora le preferenze e l'avversione al rischio degli investitori. Nel caso di investitori con una marcata avversione al rischio, la misura reale può attribuire probabilità più elevate a scenari negativi estremi, rispetto alla misura di rischio neutro, influenzando in maniera significativa i risultati previsti.
- ii) La P-measure tiene conto di numerose dinamiche di mercato reali, tra cui domanda e offerta, avversione al rischio e condizioni economiche prevalenti. Queste variabili possono generare variazioni tra le metriche P e Q, specialmente in periodi di incertezza o di stress dei mercati.
- iii) Le aspettative degli investitori e le informazioni di cui dispongono possono contribuire alle discrepanze tra le metriche Q e P. Infatti, esse possono divergere se gli investitori hanno aspettative diverse per il futuro o se utilizzano dati differenti nelle loro proiezioni.

La trasformazione della RND fornita dalla FED di Minneapolis in RWD risulta fondamentale per lo sviluppo di strategie di investimento che riflettano in modo più accurato le dinamiche reali di mercato. Sebbene le RND siano utili per comprendere le aspettative di mercato secondo misure neutrali al rischio, esse non tengono conto delle effettive preferenze al rischio e i comportamenti degli operatori di mercato. Le RWD sono progettate per incorporare l'avversione al rischio ed il comportamento degli investitori nel mondo reale, offrendo una rappresentazione più realistica dei possibili andamenti futuri del mercato. Attraverso l'adattamento delle RND in funzione della skewness e della kurtosis osservate nei rendimenti di mercato, le RWD forniscono un quadro più completo per la previsione dei risultati finanziari. L'integrazione delle RWD nelle strategie di investimento accresce l'accuratezza delle previsioni, allineando le stime probabilistiche alle dinamiche empiriche del mercato. Questo allineamento è essenziale per sviluppare strategie di trading robuste, capaci di resistere a fasi di volatilità o anomalie non rilevate dalle sole probabilità neutrali al rischio.⁹¹

⁹¹ *Unlocking Gold Market Insights– A holistic approach using Risk-Neutral and Real-World data.* (2024). UCLA.

5.2.2 Metodologia per il passaggio da distribuzioni neutrali al rischio a distribuzioni nel mondo reale

La metodologia da me adottata per la trasformazione della RND in RWD si fonda sul framework di calibrazione introdotto da Fackler (1990), il quale usa una funzione di calibrazione C per rimappare la densità di probabilità cumulata sotto la misura risk neutral $F_Q(x)$, in una nuova funzione cumulata nel mondo reale ($F_P(x) = C_u \cdot F_Q(x)$). Correntemente con ciò, la densità sotto la P-measure consiste nella derivata di tale funzione, ossia:

$$f_P(x) = \frac{dC_u \cdot f_Q(x)}{dF_Q(x)}$$

All'interno del mio codice, la RND viene inizialmente approssimata tramite una distribuzione skew-normal, i cui parametri sono ottenuti dai momenti della RND implicita nei prezzi delle opzioni sull'S&P500, ricavata dal sito della FED di Minneapolis. La skewness presente in quel dataset viene trasformato, quindi, in un parametro di forma coerente con la specifica della skew-normal, da cui si derivano la PDF (Probability Density Function) e la CDF (Cumulative Distribution Function) neutrali al rischio (figura 17).

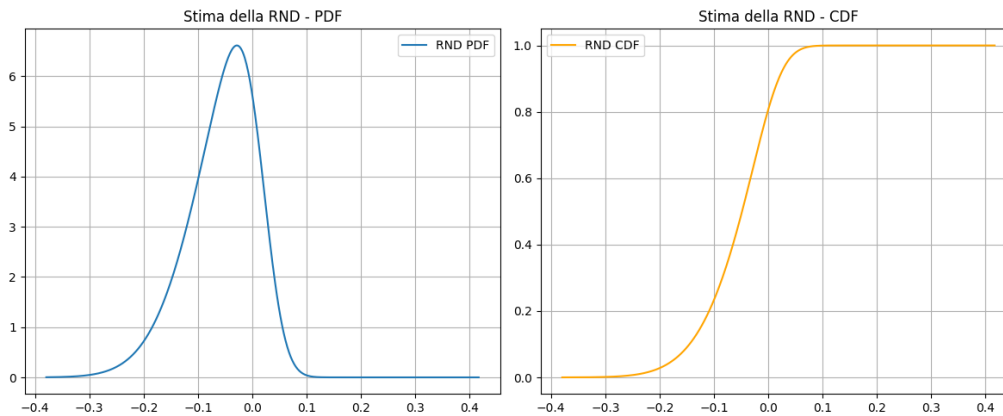


Figura 17

La funzione di calibrazione C_u viene, a questo punto, modellata parametricamente tramite una distribuzione Beta, preferita per la sua versatilità nell'assumere diverse forme, caratteristica che la rende particolarmente adatta alla calibrazione della RND al fine di riflettere in modo accurato le osservazioni empiriche del mondo reale. La funzione di calibrazione assume, dunque, la seguente forma:

$$C_u(u) = \frac{\int h^{(\alpha-1)} (1-h)^{(\beta-1)} dh}{B(\alpha, \beta)}$$

Dove $B(\alpha, \beta)$ è la distribuzione beta e α e β sono i parametri di forma della distribuzione, che vengono stimati mediante Maximum Likelihood Estimation (MLE) applicata ai valori $u = F_Q(S_T)$ della CDF neutrale al rischio.

La trasformazione real-world viene poi ottenuta componendo la CDF neutrale al rischio con la CDF della distribuzione Beta (figura 18).⁹²

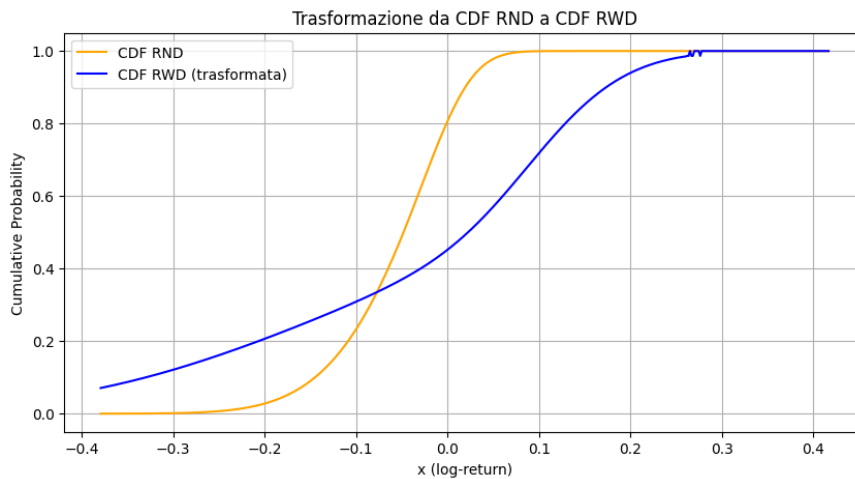


Figura 18

Attraverso la derivata di tale trasformazione, è poi possibile ottenere la densità real-world, la quale viene regolarizzata tramite l'uso di un filtro gaussiano, al fine di mitigare instabilità locali e rendere la distribuzione più congeniale ad utilizzi successivi.

Di conseguenza, dalla PDF real-world si ricavano i momenti statistici (media, deviazione standard, skewness, kurtosis) e successivamente anche le probabilità real-world di aumento o diminuzione del 20% dell'indice S&P500 nei 6 mesi successivi (figura 19 e 20).

⁹² *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives.* (2023). Fordham University.

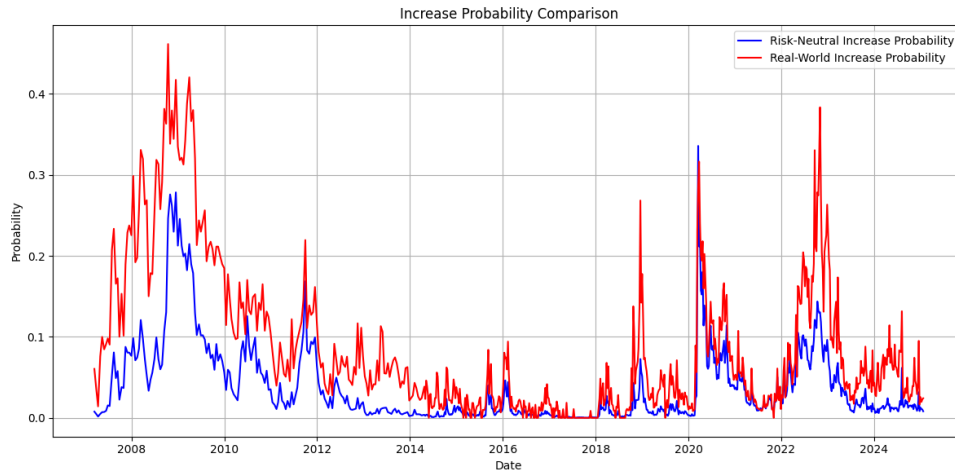


Figura 19

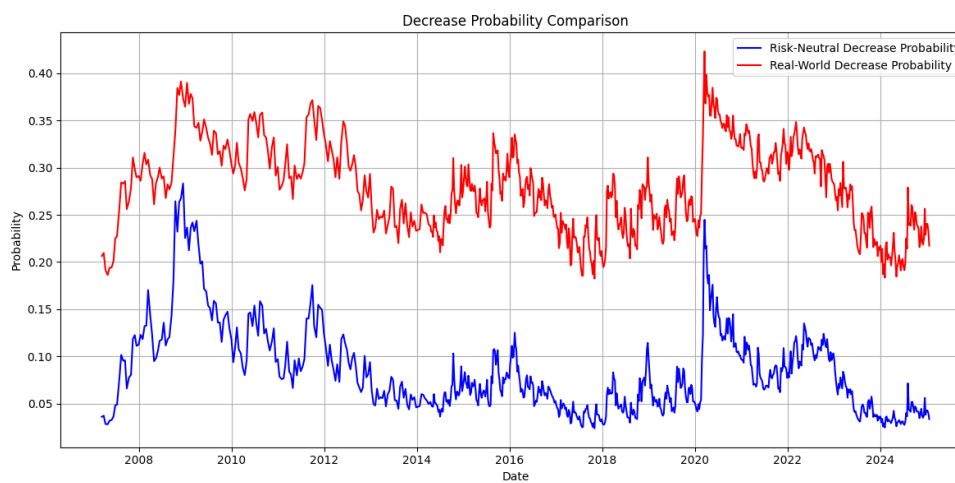


Figura 20

Dalle figure 19 e 20 è possibile trarre una serie di considerazioni rilevanti. Per prima cosa in entrambi i grafici, le probabilità real-world risultano essere sempre maggiori delle rispettive risk-neutral. Questa divergenza sistematica che si nota tra le due misure è dovuta al fatto che la RND sottostima le probabilità estreme, sia in aumento che in diminuzione, perché la misura reale tiene conto dell'avversione al rischio e delle aspettative di mercato, mentre la misura di rischio neutrale tende ad appiattire gli eventi tail-risk. Inoltre, nei picchi evidenti, ossia le tre principali crisi politico-finanziarie presenti nell'arco temporale da me considerato (crisi finanziaria globale del 2008, crisi pandemica del 2020, guerra russo-ucraina 2022), la risposta della RWD è più intensa e più rapida, suggerendo che la misura reale incorpora più efficacemente l'informazione ed il sentiment di mercato. Di conseguenza, è possibile affermare che la ricalibrazione dalla RND alla RWD consenta di ottenere una stima più

aderente alle aspettative del mercato e di ottenere una visione più prudentziale, in linea con un comportamento di mercato dominato da avversione al rischio.

5.2.3 Preparazione dei dati e PCA

Nel processo di preparazione dei dati per la creazione del modello predittivo, ho condotto una attività di feature engineering, volta a cogliere le dinamiche e le strutture latenti del mercato. Le variabili derivate includono rapporti di rendimento aggiustato per il rischio, indicatori di sentiment di mercato e termini di integrazione, progettati per offrire una rappresentazione completa del comportamento dei mercati finanziari. Le variabili sono quindi:

- i) Variabili di rendimento aggiustato per il rischio: al fine di valutare la performance corretta per il rischio, ho calcolato il rapporto tra il rendimento atteso (`mean_rwd`) e la deviazione standard (`std_rwd`), metrica comunemente utilizzata per identificare opportunità rischio-rendimento favorevoli. Inoltre, ho creato una variabile composita di skewness e kurtosis (`skew_kurt_composite`), con l'obiettivo di catturare simultaneamente l'asimmetria ed il rischio di coda della distribuzione real-world dei rendimenti.
- ii) Variabili di sentiment di mercato: il sentiment di mercato è stato quantificato tramite una media ponderata dei rendimenti attesi (`mu_weighted_avg`), successivamente sottoposta ad una media mobile su una finestra semestrale. Tale procedura ha lo scopo di cogliere le tendenze di fondo di medio periodo, che spesso riflettono l'orientamento generale degli operatori di mercato.
- iii) Termini di interazione: per catturare le possibili interazioni tra diverse forze di mercato, ho introdotto termini di interazione come il prodotto tra la probabilità reale di ribasso e quella di rialzo (`rw_interaction = pr_dec * pr_inc`), la quale sintetizza il grado di incertezza o tensione del mercato.

Successivamente a questa fase di feature engineering, ho utilizzato l'analisi delle componenti principali (PCA) per trasformare lo spazio delle variabili in un insieme di componenti linearmente non correlate, che rappresentano la direzione di massima varianza nei dati. Questa trasformazione, non solo è utile a ridurre la dimensionalità del dataset, ma attenua anche la multicollinearità, migliorando così anche il potere predittivo una volta che

verrà costruito il modello.⁹³

Prima dell'applicazione della PCA, ho effettuato una normalizzazione dei dati, al fine di standardizzare le variabili, garantendo che ciascuna contribuisse in modo equilibrato alla analisi. Successivamente la PCA è stata applicata alle variabili standardizzate ed ho mantenuto le componenti che cumulativamente spiegavano una porzione significativa della varianza. Il grafico della varianza cumulativa (figura 21) mostra che le prime tre componenti spiegano quasi il 100% della varianza del dataset. In particolare, la prima componente spiega circa il 69% e la seconda porta il totale oltre il 90%. Ciò, evidenzia come una porzione limitata di componenti principali sia sufficiente a catturare la maggior parte dell'informazione contenuta nei dati, permettendo una riduzione della dimensionalità, senza perdita del contenuto informativo.

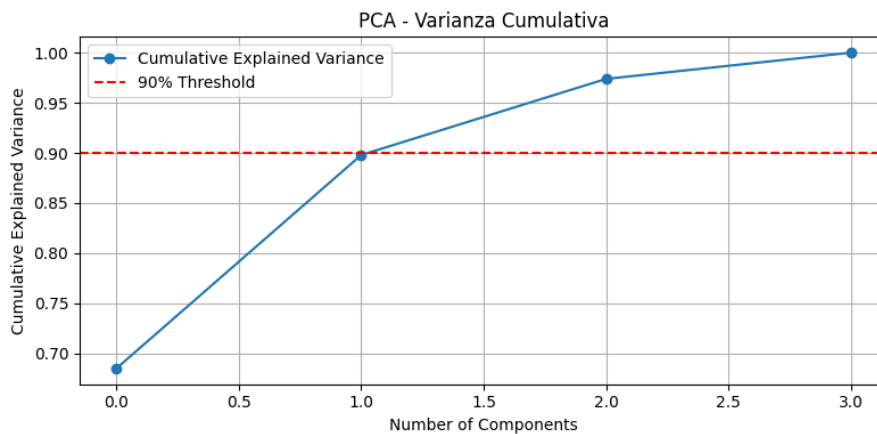


Figura 21

Di conseguenza, il numero di componenti mantenute per la creazione del modello predittivo è stato determinato sulla base del superamento di un threshold (90%) da parte della varianza spiegata cumulata, con l'obiettivo di catturare le variabili più informative, evitando al tempo stesso il rischio di overfitting.

Per comprendere la composizione delle componenti principali ho realizzato una heatmap che mi permette di ottenere una analisi dei loading (figura 21). Come possiamo vedere da tale heatmap, la prima componente principale è significativamente influenzata da tutte le feature considerate, in particolare dal rapporto tra rendimento atteso e deviazione standard e dal composito di skewness e kurtosis. Ciò, suggerisce che la PC1 rappresenta una misura aggregata di rischio sistemico, che cattura simultaneamente il rendimento corretto per il

⁹³ *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives.* (2023). Fordham University.

rischio e le caratteristiche di forma della distribuzione dei rendimenti. La seconda componente principale è dominata dal termine di interazione, ossia il prodotto tra la probabilità di forti aumenti e quella di forti ribassi ($\pm 20\%$). Tale componente, quindi, può essere interpretata come un indicatore di tensione o disequilibrio di mercato, riflettendo la coesistenza di rischi di coda bilaterali. La terza componente principale presenta un contributo positivo del composito skewness-kurtosis ed uno negativo del termine di interazione. Questa dinamica può essere associata ad una analisi della direzionalità dei rendimenti estremi, ossia se il rischio percepito si concentra prevalentemente su una coda della distribuzione. Infine, la quarta componente principale è influenzata, in particolare, positivamente dal rapporto μ/std .

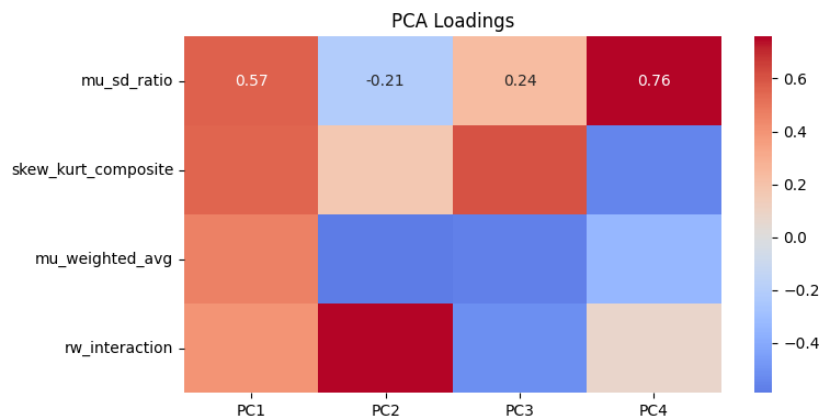


Figura 21

Le variabili ottenute dall'analisi delle componenti principali (PCA), unitamente alle variabili ottenute nel processo di feature engineering, costituiscono un input raffinato per la creazione di un modello predittivo, tramite la tecnica ensemble. Il successivo paragrafo illustrerà l'effettivo utilizzo di tali variabili nell'addestramento di un modello Ensemble, che combina un modello XGBoost ed uno LSTM, analizzandone la capacità predittiva e analizzando la performance della strategia di trading derivata dalle sue previsioni.

5.2.4 Sviluppo del modello Ensemble

Come visto nel paragrafo precedente, la base del modello predittivo risiede in una attenta attività di feature engineering e preparazione dei dati. Attraverso l'utilizzo della PCA è stata effettuata una riduzione della dimensionalità del dataset, mantenendo al contempo gli aspetti più rilevanti dell'informazione contenuta nei dati. Per la componente LSTM del modello Ensemble, il dataset è stato trasformato in sequenze temporali, passaggio essenziale per

catturare le dinamiche temporali tipiche dei mercati finanziari.

Il modello Ensemble è quindi composto da due modelli distinti: XGBoost ed LSTM, ciascuno in grado di catturare specifiche caratteristiche strutturali dei dati. La struttura di gradient boosting propria dell’XGBoost consente un apprendimento efficace, mediante metodi ensemble basati sull’utilizzo di alberi decisionali. Ho, quindi, condotto una ottimizzazione approfondita degli iperparametri (selezionati poi sulla base di metriche di performance) tramite grid search, valutando 2880 combinazioni con una strategia di cross-validation a 3 fold, per un totale di 8640 fit riferiti al modello con orizzonte semestrale. Le reti LSTM invece sono state progettate per elaborare sequenze temporali, con l’obiettivo di catturare le correlazioni dinamiche che caratterizzano l’evoluzione dei mercati. Ho poi standardizzato le variabili e creato sequenze a passo temporale costante, le quali servivano come input per il modello. Il modello è stato quindi allenato tramite una fase di tuning iperparametrico, con l’obiettivo di individuare l’architettura ottimale e i parametri che minimizzassero l’errore di previsione.⁹⁴

La performance di ciascun modello è stata valutata attraverso alcune misure statistiche (tabella 9) applicate alle rispettive previsioni (mu/std ratio).

◆ XGBoost
Mean: -0.10151737
Median: -0.09842491
Std: 0.05625218
◆ LSTM
Mean: -0.084501274
Median: -0.07259357
Std: 0.06952567

Tabella 9

Il modello XGBoost presenta sia una media che una mediana leggermente negativa, segnalando una tendenza complessivamente ribassista. La deviazione standard è leggermente inferiore a quella del modello LSTM, suggerendo una maggiore concentrazione delle previsioni attorno alla media.

Allo stesso modo, il modello LSTM evidenzia anch’esso media e mediana leggermente negativi, suggerendo di conseguenza una tendenza ribassista.

Successivamente, ho tracciato le curve di apprendimento per entrambi i modelli XGBoost e

⁹⁴ *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives.* (2023). Fordham University.

LSTM. Tali curve (figure 22 e 23) hanno fornito indicazioni utili sul processo di apprendimento, evidenziando il divario tra performance in training e in test, e guidando gli eventuali aggiustamenti nei modelli.

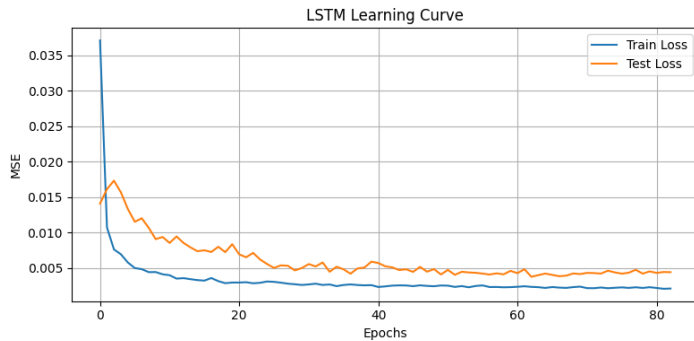


Figura 22

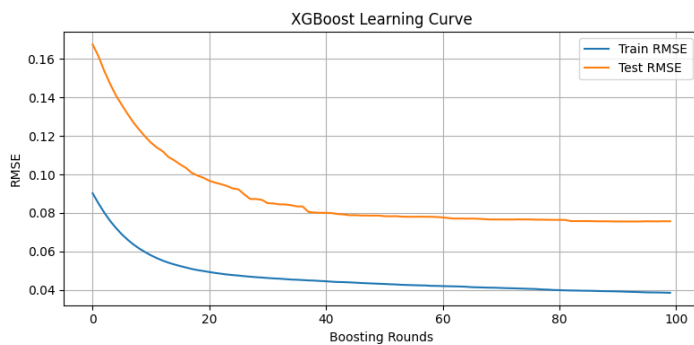


Figura 23

L'approccio Ensemble adottato combina i punti di forza del modello XGBoost e del modello LSTM, per costruire un framework predittivo robusto (tabella 10). L'Ensemble sfrutta la maggiore variabilità catturata dall'LSTM e la maggiore stabilità delle previsioni fornite da XGBoost, con l'obiettivo di bilanciare le debolezze individuali dei singoli modelli (figura 24).

	MSE	MAE	Mean	Median	Std Dev
XGBoost	0.005631	0.056229	-0.091527	-0.094577	0.042914
LSTM	0.003904	0.045740	-0.084501	-0.072594	0.069526
Ensemble	0.004045	0.046672	-0.088014	-0.085533	0.051267

Tabella 10

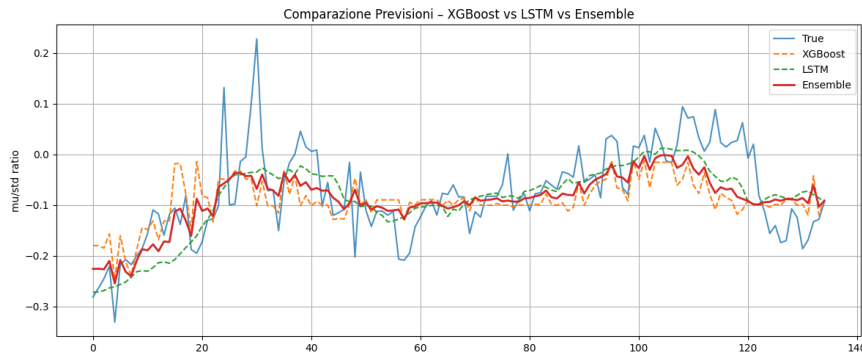


Figura 24

5.2.5 Strategia di Trading

La strategia di trading da me sviluppata, si basa sull'utilizzo del μ/std ratio, ossia il rapporto tra rendimento atteso e rischio, predetto attraverso il modello Ensemble, come segnale di trading. Il threshold usato per questa strategia è banalmente il valore mediano della sua distribuzione ed in base ad esso vengono generati due tipologie di segnali: un segnale long sull'S&P500, per previsioni del valore del μ/std ratio superiori al 50° percentile, ed un segnale short sull'S&P500 per valori inferiori. Successivamente, tali segnali vengono tradotti in posizioni operative con un holding periodo fisso di 20 giorni. Ciò significa che, ogni volta in cui si genera un segnale long o short, la posizione lunga o corta viene mantenuta per i 20 giorni successivi. Tale holding period è stato scelto in base ad una analisi di correlazione tra il μ/std ratio ed i rendimenti futuri dell'S&P500, nell'arco temporale analizzato. Il risultato di tale analisi (riassunto nella figura 25) consiste nel fatto che calcolando le correlazioni tra il μ/std ratio ed i rendimenti ad 1, 5, 10 e 20 giorni, ho potuto osservare che l'orizzonte a 20 giorni presenta una correlazione più significativa.

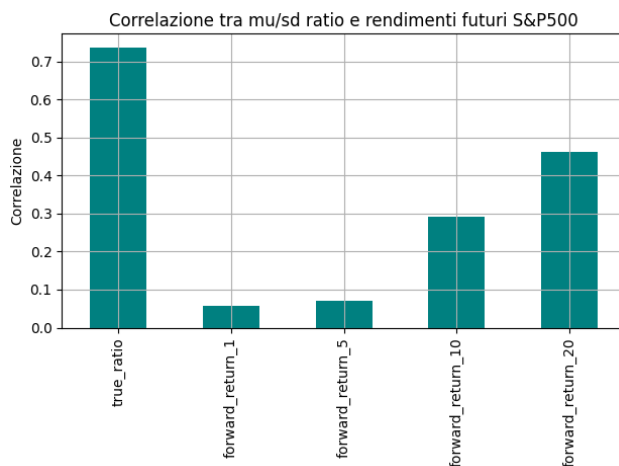


Figura 25

La performance della strategia è stata quindi calcolata moltiplicando i rendimenti giornalieri dell'indice S&P500 per l'indicatore di posizione corrente, long o short. I rendimenti derivanti dalle posizioni lunghe e corte, sono stati poi sommati per costruire la serie dei rendimenti della strategia. Da essa, è possibile derivare le curve di rendimento cumulato, utili per il confronto tra la performance della strategia e l'andamento dell'indice.

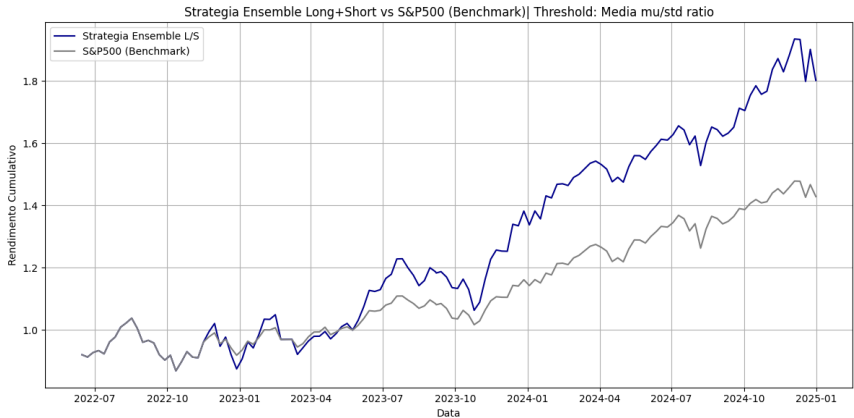


Figura 26

La figura 26 mostra l'andamento del rendimento cumulativo della strategia Ensemble confrontato con quello dell'indice S&P500, usato come benchmark (dal luglio 2022 al gennaio 2025). È possibile notare una performance significativamente superiore da parte della strategia, la quale a partire dal secondo semestre del 2022 mostra una crescita più rapida e costante. Ciò, suggerisce come il modello Ensemble sia stato in grado di generare valore sia nelle fasi rialziste che in quelle di correzione, sfruttando al meglio la sua abilità di aprire posizioni long o short sull'indice, in base all'andamento del rapporto rendimento atteso-rischio.

Confronto delle Metriche di Performance tra le Strategie:

Strategia	Sharpe Ratio	Volatilità Annualizzata (%)	Max Drawdown (%)
Ensemble	2.1597	45.8582	-16.308
Benchmark (S&P 500)	1.2499	41.178	-52.56

Tabella 11

La tabella 11 riassume numericamente quanto detto finora. Infatti, la strategia Ensemble mostra un maggiore Sharpe Ratio, indicando una migliore efficienza rischio-rendimento, ed un minor Max Drawdown (-16.30% rispetto a -52.56%), che indica una notevole capacità da parte della strategia di proteggere il capitale anche in scenari avversi. La strategia

Ensemble presenta, però, una volatilità leggermente superiore, la quale, però, risulta essere ampiamente giustificata dal netto miglioramento della performance, evidenziata nello Sharpe Ratio.

Conclusioni

La presente tesi ha indagato in profondità il contenuto informativo delle opzioni sull'S&P500, concentrandosi in particolare sull'utilizzo delle distribuzioni neutrali al rischio al fine di valutarne il potenziale predittivo e la loro applicazione pratica in contesti di trading. A partire dal capitolo 3, è stata analizzata l'utilità delle RND implicite, evidenziando come esse contengano informazioni rilevanti per anticipare la direzione dei mercati e possano risultare utili anche per i policymakers. L'analisi empirica condotta mediante modelli statistici (come OLS) e di deep learning (come LSTM) ha confermato una certa capacità predittiva delle distribuzioni implicite alle opzioni, pur con evidenti limiti nei momenti di instabilità dei mercati.

Nel capitolo 4, ho poi sviluppato e testato tre strategie di trading basate sui momenti delle distribuzioni neutrali al rischio. Una prima strategia più semplice basata su threshold del primo momento della distribuzione, una seconda strategia denominata skewness-based più avanzata ed infine un approccio che mirava a sfruttare la relazione inversa tra VIX ed S&P500. Le simulazioni su dati storici, da me effettuate, hanno evidenziato rendimenti potenzialmente interessanti, con una performance costantemente superiore rispetto quella del benchmark di riferimento, rappresentato dall'investimento passivo nell'indice S&P500. Nel capitolo 5, infine, ho aggiunto modelli più avanzati di machine learning, come decision tree ed ensemble methods, applicati sia alle distribuzioni neutrali al rischio che a quelle real-world. Ciò ha rappresentato un passo in avanti della mia ricerca, verso una maggiore capacità delle strategie ad adattarsi al contesto di mercato, migliorando così la qualità dei segnali e la performance delle strategie.

Tuttavia, i risultati ottenuti devono essere interpretati con cautela. I backtest delle varie strategie, infatti, sono stati condotti in condizioni ideali, trascurando elementi fondamentali presenti nei mercati reali. In particolare, i costi di transazione, i bid-ask spread, la presenza di slippage e le limitazioni legate alla liquidità effettiva degli strumenti scelti per la strategia, possono ridurre drasticamente la profittabilità attesa. Inoltre, l'utilizzo di dati storici, pur essendo necessario per l'addestramento e la valutazione dei modelli, comporta una loro limitata capacità di adattarsi a regimi di mercato futuri, non osservati in passato, continuando a

performare positivamente. Alla luce di ciò, tale ricerca offre numerosi spunti per possibili sviluppi futuri. Un primo ampliamento potrebbe riguardare l'integrazione di tecniche di machine learning ancora più

sofisticate, come le reti neurali profonde o i modelli basati su apprendimento per rinforzo, i quali potrebbero permettere di identificare in maniera migliore i pattern informativi dietro le RND implicite. Un altro ampliamento naturale potrebbe riguardare l'applicazione di quanto sviluppato ad indici differenti o a panieri di titoli settoriali, per poterne valutare la generalizzabilità e la robustezza. Ulteriori miglioramenti, infine, potrebbero derivare da sviluppi del passaggio dalla misura risk-neutral alla misura reale, incorporando magari proxy macroeconomici o ulteriori dati.

In conclusione, all'interno di questa tesi, ho dimostrato come, nonostante i limiti operativi sopraelencati, le distribuzioni neutrali al rischio implicite nei prezzi delle opzioni sull'S&P500, rappresentino uno strumento informativo potente e versatile. Esse, infatti, se integrate opportunamente con tecniche avanzate di analisi dei dati, possono costituire una base solida per la costruzione di strategie di trading profittevoli.

Bibliografia

- Ait-Sahalia, Y. and Lo, A. (1998) Non-Parametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *The Journal of Finance*, 53, 499-547.
- Ait-Sahalia, Y. and Brandt, M.W. (2001) Variable Selection for Portfolio Choice. *Journal of Finance*, 56, 1297-1351. <https://doi.org/10.3386/w8127>
- Ayres, H. F., 1963, Risk aversion in the warrant markets, (Massachusetts Institute of Technology).
- Arrow, K.J. (1964) The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing. *Review of Economic Studies*, 31, 91-96.
- Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, 22(3), 265–290. <https://doi.org/10.2307/1907353>
- Bachelier Louis: Théorie de la spéculation (1900).
- Bahra Bhupinder, 1997, Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England, Threadneedle Street, London, EC2R 8AH
- Back, K., 1993, Asymmetric information and options, *Review of Financial Studies* 6, 435 472.
- Baker, M. and Wurgler, J. (2006). Investor sentiment and the cross-section of stock returns. *The Journal of Finance*, 61(4):1645–1680.
- Bali, T. G., & A. Hovakimian, 2009, Volatility spreads and expected stock returns, *Management Science* 55, 1797-1812.
- Bali, T. G. and Murray, S. (2012). Does risk-neutral skewness predict the cross-section of equity option portfolio returns? *SSRN Electronic Journal*.
- Barberis Nicholas, Ming Huang, Preferences with frames: A new utility specification that allows for the framing of risks, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Volume 33, Issue 8, 2009
- Barone Gaia, 2012, Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu, CreateSpace.
- Bates, D. S. (1991). The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets. *The Journal of Finance*, 46(3), 1009–1044. <https://doi.org/10.2307/2328552>

- Black, F., 1975, Fact and fantasy in the use of options, *Financial Analysts Journal* 31, 36-72.
- Black, F., & M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637.
- Bollerslev, T., Tauchen, G. & Zhou, H. (2009). "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia." *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.
- Boness, A. J., 1964, Elements of a theory of stock-option value, *The Journal of Political Economy* 72, 163-175.
- Borochin, P., Chang, H., and Wu, Y. (2020). The information content of the term structure of risk-neutral skewness. *Journal of Empirical Finance*, 58:247–274.
- Borsa Italiana. (n.d.). Le opzioni: definizione e funzionamento - Borsa Italiana. <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm>
- Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621–651. <http://www.jstor.org/stable/2352653>
- Bronzin Vinzenz: *Theorie der Prämien-geschäfte* (1908).
- Cao, H. H., 1999, The effect of derivative assets on information acquisition and price behavior in a rational expectations equilibrium, *Review of Financial Studies* 12, 131 163.
- Castelli Charles: *The Theory of Options in Stocks and Shares* (1877).
- Conrad, J., Dittmar, R. F., and Ghysels, E. (2013). Ex ante skewness and expected stock returns. *The Journal of Finance*, 68(1):85–124.
- Chan, K., P. Chung, & W.-M. Fong, 2002, The informational role of stock and option volume, *Review of Financial Studies* 15, 1049-1075.
- Chen, J. (2024, February 19). Index Option: Option contracts based on a benchmark index. Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/i/indexoption.asp>
- Cremers, M., & D. Weinbaum, 2010, Deviations from put-call parity and stock return predictability, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 45, 335-367.
- Debreu Gerard, 1959, *Theory of Value; An axiomatic analysis of economic equilibrium*, New Haven, Yale University Press.

- Detemple, J., & L. Selden, 1991, A general equilibrium analysis of option and stock market interactions, *International Economic Review* 32, 279-303.
- Diamond, D. W., & R. E. Verrecchia, 1987, Constraints on short-selling and asset price adjustment to private information, *Journal of Financial Economics* 18, 277-311.
- *Directional forecasts with Risk-Neutral probabilities and Skewness-Based trading strategy*. (2024). New York University (NYU).
- Easley, D., M. O'Hara, & P. S. Srinivas, 1998, Option volume and stock prices: Evidence on where informed traders trade, *The Journal of Finance* 53, 431-465.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987.
- *Enhancing Financial Forecasts: bridging market probabilities with Real-World perspectives*. (2023). Fordham University.
- Fan, Z., Xiao, X., and Zhou, H. (2020). Moment risk premia and stock return predictability. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 57(1):67–93.
- Feldman, R. (2015, February 7). *Market-Based Probabilities: a tool for policymakers*
- Fundamentals of Options - CFA Institute. (n.d.).
<https://www.cfainstitute.org/sites/default/files/-/media/documents/book/rf-publication/2013/Fa>
- Gisiger Nicolas, 2010, Risk-Neutral probabilities explained - Nicolas Gisiger. (n.d.). MAS Finance UZH ETHZ, CEMS MIM, M.A. HSG.
- Harris, R. D., Li, X., and Qiao, F. (2018). Option implied betas and the cross section of stock returns. *Journal of Futures Markets*, 39(1):94–108.
- Hull, J. C., *Opzioni, futures e altri derivati*. Pearson, 11° ed., 2022.
- Hull, John C., *Machine learning in Business: Un'Introduzione alla Scienza dei Dati*, KDP, 2021.
- Kraus, A., & Litzenberger, R. H. (1973). A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage. *The Journal of Finance*, 28(4), 911–922.
<https://doi.org/10.2307/2978343>
- Matsuda Kazuhisa, 2004, Dynamics of Risk-Neutral Densities Implied by Option Prices, Department of Economics, The Graduate Center, The City University of New York.

- Todd Mitton, & Vorkink, K. (2007). Equilibrium Underdiversification and the Preference for Skewness. *The Review of Financial Studies*, 20(4), 1255–1288. <http://www.jstor.org/stable/4494802>
- Neumann, M. and Skiadopoulos, G. S. (2012). Predictable dynamics in higher order risk-neutral moments: Evidence from the sp 500 options. SSRN Electronic Journal.
- *Options Based Probability Distributions, More Than Just a Tool for Policy Makers.* (2024). University of California, Berkeley.
- Shimko, David. (1993). Bounds of probability. *Risk*. 6. 33-37.
- Slack, S. (2024, August 21). What is the S&P500? A Comprehensive Guide. Investing.com. <https://www.investing.com/academy/trading/what-is-the-sp-500/>
- Skouras S., Risk Neutral Forecasting. Santa Fe, NM: Santa Fe Institute, 2000.
- Sprenkle, C. M., 1961, Warrant prices as indicators of expectations and preferences, *Yale economic essays* 1, 178-231.
- Stephan, J. A., & R. E. Whaley, 1990, Intraday price change and trading volume relations in the stock and stock option markets, *The Journal of Finance* 45, 191-220.
- Strommen Stephen J. “Understanding the Connection between Real-World and Risk-Neutral Scenario Generators”. In: Society of Actuaries Research Institute (Aug. 2022).
- Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771–818. <https://doi.org/10.2307/2329207>
- Stilger, P. S., Kostakis, A., and Poon, S.-H. (2014). What does risk-neutral skewness tell us about future stock returns? SSRN Electronic Journal.
- S&P500 The gauge of the U.S. Large-Cap market. (n.d.). <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/additional-material/sp-500-brochure>
- *Riding the Tails: The Alpha in Asymmetry.* (2024). UCLA.
- Risk-Neutral probabilities explained - Nicolas Gisiger. (n.d.). MAS Finance UZH ETHZ, CEMS MIM, M.A. HSG.
- Qin J. L. S. S. G., Qing-Guo Wang, “Linear and nonlinear trading models with gradient boosted random forests and application to Singapore stock market,” *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*, 2013

- Teller A., U. Pigorsch, and C. Pigorsch, “Short- to long-term realized volatility forecasting using extreme gradient boostin,” SSRN Electronic Journal, 2022.
- Ultralytics. (n.d.). *Long Short-Term Memory (LSTM) - Discover how Long Short-Term Memory (LSTM) networks excel in handling sequential data, overcoming RNN limitations, and powering AI tasks like NLP and forecasting.*
- *Unlocking Gold Market Insights– A holistic approach using Risk-Neutral and Real-World data.* (2024). UCLA.
- Xing, Y., Zhang, X., and Zhao, R. (2010). What does the individual option volatility smirk tell us about future equity returns? *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(3):641–662
- Whaley, R. E. (1993). Derivatives on market volatility. *The Journal of Derivatives*, 1(1):71–84.