



**Dipartimento di Economia e Finanza**

**Indirizzo Banche ed Intermediari Finanziari**

**Il *Value at Risk* per la misurazione del  
rischio di mercato: un approccio basato  
sul metodo Monte Carlo**

**Relatore:**

**Prof. Hlafo Alfie Mimun**

**Correlatore:**

**Prof. Marco Scarsini**

**Candidato:**

**Nunzio Lavela**

**Matricola 783881**

**Anno Accademico 2024/2025**



*A Rossella,  
il mio rifugio nei giorni di tempesta.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduzione al <i>Risk Management</i>: sviluppo e regolamentazione</b>	<b>1</b>
1.1 L'evoluzione del <i>Financial Risk Management</i> : dalla prevenzione alla gestione strategica . . . . .	2
1.2 Definizione e processo di gestione dei rischi finanziari . . . . .	4
1.2.1 Tassonomia dei rischi finanziari . . . . .	5
1.2.2 Il processo di gestione del rischio . . . . .	7
1.3 <i>Framework</i> normativo . . . . .	10
1.3.1 La gestione del rischio finanziario nelle banche: gli Accordi di Basilea . . . . .	11
1.3.2 Il rischio ESG nel settore finanziario: la <i>Task Force on Climate-related Financial Disclosures</i> . . . . .	16
<b>2 La stima del rischio di mercato: i modelli <i>Value at Risk</i></b>	<b>19</b>
2.1 Le caratteristiche del rischio di mercato . . . . .	19
2.2 Introduzione ai modelli <i>Value at Risk</i> . . . . .	22
2.2.1 L'intervallo di confidenza . . . . .	23
2.2.2 L'orizzonte temporale . . . . .	24
2.3 L'approccio parametrico per il calcolo del VaR . . . . .	26

2.3.1	Ipotesi alla base del modello . . . . .	26
2.3.2	Il calcolo del VaR parametrico: gli approcci <i>delta normal</i> e <i>asset normal</i> . . . . .	30
2.3.3	Applicazione a una posizione . . . . .	32
2.3.4	Il VaR di un portafoglio . . . . .	34
2.3.5	I limiti del modello . . . . .	38
2.4	Le simulazioni storiche . . . . .	41
2.4.1	La stima del VaR di una posizione . . . . .	43
2.4.2	I limiti del modello . . . . .	45
2.4.3	<i>The Hybrid Approach</i> . . . . .	46
2.4.4	<i>VaR without correlations</i> . . . . .	48
2.5	Il metodo Monte Carlo . . . . .	50
2.5.1	La generazione di numeri casuali . . . . .	51
2.5.2	Acceptance-Rejection method . . . . .	53
2.5.3	The Box-Muller Algorithm . . . . .	54
2.5.4	Simulazione dei rendimenti e calcolo del valore del portafoglio simulato . . . . .	56
2.5.5	Esempio di applicazione del metodo Monte Carlo . . . . .	58
2.5.6	I limiti del modello . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Analisi dei modelli <i>Value at Risk</i> su un portafoglio eterogeneo</b>	<b>63</b>
3.1	Test di validazione dei modelli VaR . . . . .	64
3.1.1	<i>Test di Kupiec</i> . . . . .	65
3.1.2	<i>Conditional Coverage Test</i> . . . . .	68
3.2	La struttura del portafoglio in analisi . . . . .	71
3.3	Modelli parametrici per la stima del VaR . . . . .	75
3.3.1	Il metodo parametrico tradizionale . . . . .	76
3.3.2	Il metodo parametrico basato su <i>EWMA</i> . . . . .	81

3.4	Modelli di simulazione per il calcolo del VaR . . . . .	86
3.4.1	L'approccio delle simulazioni storiche . . . . .	87
3.4.2	Il metodo Monte Carlo tradizionale . . . . .	91
3.5	Confronto tra i modelli e conclusioni . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Modello avanzato di simulazione Monte Carlo per la stima del rischio di mercato</b>	<b>103</b>
4.1	Tecniche di riduzione della varianza . . . . .	104
4.1.1	<i>Importance Sampling</i> . . . . .	104
4.1.2	<i>Stratified Sampling</i> . . . . .	107
4.2	Modellizzazione della volatilità: il modello GARCH . . . . .	109
4.3	Implementazione del metodo Monte Carlo per la stima del VaR . . . . .	112
4.3.1	Analisi empirica dei risultati . . . . .	114
4.3.2	Confronto con i modelli tradizionali . . . . .	119
4.4	Applicazione ad un portafoglio <i>crypto</i> : robustezza in ambienti ad alta volatilità . . . . .	128
4.4.1	Struttura e composizione del portafoglio . . . . .	129
4.4.2	Analisi comparativa delle <i>performance</i> . . . . .	131
	<b>Conclusioni</b>	<b>140</b>
	<b>Appendice</b>	<b>143</b>
A.1	Teoremi limite . . . . .	143
A.2	Codici Python . . . . .	144
	<b>Bibliografia</b>	<b>182</b>



# Introduzione

In un'epoca in cui i mercati finanziari sono influenzati da eventi geopolitici, crisi sanitarie globali e innovazioni tecnologiche, comprendere e misurare il rischio non è più solo una necessità per gli operatori del settore, è un imperativo strategico. Il rischio di mercato, in particolare, rappresenta una delle fonti principali di incertezza per chiunque gestisca un portafoglio, sia esso composto da strumenti tradizionali o complessi. In questo contesto mutevole e spesso imprevedibile, la misurazione del rischio non può più basarsi su strumenti semplicistici, che assumono un mondo finanziario statico e distribuzioni simmetriche. Serve un approccio più flessibile, realistico e robusto.

Questa tesi nasce dalla volontà di affrontare, in modo rigoroso ma accessibile, la problematica della misurazione del rischio di mercato attraverso il Value at Risk (VaR), proponendo un'evoluzione concreta rispetto agli approcci tradizionali. La ricerca parte da una constatazione chiara: i metodi classici di stima del VaR presentano limiti evidenti, specialmente quando vengono applicati a mercati complessi e turbolenti. Le ipotesi di normalità dei rendimenti, di volatilità costante o di linearità delle variazioni risultano spesso troppo lontane dalla realtà. Questa differenziazione tra teoria e pratica può portare a sottostime significative del rischio effettivo, mettendo in difficoltà banche, fondi e investitori nei momenti in cui la precisione della misurazione è più cruciale.

L'obiettivo centrale del lavoro è individuare un metodo di stima del VaR che

sia in grado di rappresentare con maggiore accuratezza il rischio di mercato, superando le limitazioni dei modelli tradizionali. A tal fine, è proposto un modello di stima del VaR basato sulla simulazione Monte Carlo, ma implementato con tre elementi che lo rendono decisamente più realistico e adatto a contesti di instabilità: la distribuzione t-Student, per tener conto delle *fat tails* osservate empiricamente nei rendimenti; un processo GARCH(1,1), per modellare in modo dinamico e credibile la volatilità; la tecnica dell'*importance sampling*, che consente di migliorare l'efficienza della simulazione, concentrandosi sugli eventi rari e potenzialmente più dannosi.

Nella prima parte del lavoro viene ricostruito il percorso evolutivo che ha portato alla nascita e all'affermazione del concetto di *Value at Risk*, a partire dalla trasformazione della gestione del rischio nelle istituzioni finanziarie. Viene analizzato il processo attraverso cui il *risk management* si è evoluto da funzione puramente reattiva a strumento strategico di controllo e prevenzione, fino a diventare una componente centrale nelle scelte operative. Successivamente, si approfondisce il quadro normativo di riferimento, con particolare attenzione agli *Accordi di Basilea* e ai requisiti regolamentari che qualsiasi modello di misurazione del rischio, incluso quello proposto in questa tesi, è tenuto a rispettare.

Successivamente l'analisi entra nel merito delle tre principali metodologie utilizzate per stimare il VaR: l'approccio parametrico, la simulazione storica e il metodo Monte Carlo. Ciascun modello viene analizzato in modo critico, a partire dalla sua formulazione matematica fino alle implicazioni operative, mettendo in luce i presupposti statistici su cui si fonda e i limiti che ne condizionano l'applicabilità nella realtà dei mercati. In particolare, la simulazione Monte Carlo viene inizialmente introdotta nella sua versione più semplice, basata su ipotesi standard e generazione casuale dei rendimenti. Questa rappresentazione "classica" funge da base per sviluppare, nei capitoli successivi, un'estensione più avanzata del metodo. La terza

parte dell'elaborato è dedicata all'analisi empirica dei modelli tradizionali. Dopo aver costruito un portafoglio eterogeneo, ciascun modello viene testato sulla stessa base dati per confrontarne la capacità di catturare il rischio effettivo. I risultati sono valutati mediante tecniche di *backtesting*, tra cui il test di *Kupiec* e quello di *Christoffersen*, allo scopo di misurare la frequenza e la distribuzione delle violazioni, cioè dei giorni in cui la perdita effettiva supera quella stimata dal modello. Questa fase ha rappresentato un passaggio cruciale per identificare i limiti concreti degli approcci tradizionali e motivare la necessità di un'estensione più sofisticata della simulazione Monte Carlo.

L'ultima parte è interamente incentrata sul nuovo approccio proposto. Il modello è stato sviluppato in ambiente *Python*, al fine di generare migliaia di traiettorie simulate dei rendimenti, incorporando la volatilità stimata da un modello GARCH e adottando una distribuzione t-Student per i residui. Per aumentarne la precisione, è stata integrata una strategia di *importance sampling* centrata sulla coda sinistra della distribuzione, quella cioè che rappresenta le perdite più gravi e meno frequenti. Questo approccio consente di ottenere stime del VaR più stabili e coerenti, anche in presenza di shock di mercato. Il modello è stato testato su due portafogli distinti: uno composto da strumenti tradizionali e uno interamente costituito da criptovalute. Quest'ultimo caso, in particolare, è stato utile per testare la robustezza del modello in condizioni di volatilità estrema, asimmetria dei rendimenti e discontinuità strutturali.

Nel complesso, questo lavoro si propone di creare un ponte tra rigore metodologico e rilevanza applicativa, offrendo un modello di misurazione del rischio che sia realmente efficiente nell'affrontare l'incertezza dei mercati contemporanei.



# Capitolo 1

## Introduzione al *Risk Management*: sviluppo e regolamentazione

L'evoluzione dei mercati finanziari, caratterizzata dall'interconnessione dei mercati globali, dall'introduzione di strumenti complessi e dall'ingresso di nuovi soggetti specializzati, porta con sé un costante sviluppo innovativo ma anche l'aumento dei rischi da dover fronteggiare.

Questo capitolo tratta il processo evolutivo che ha affrontato il *risk management* per restare al passo dei mercati finanziari, dagli albori fino ai giorni nostri. Inoltre, approfondisce la struttura di tale settore analizzando il processo seguito dagli operatori al fine di mitigare il rischio. Verrà, infine, esaminata la normativa di riferimento al fine di comprendere come il diritto influenza la misurazione del rischio.

## 1.1 L'evoluzione del *Financial Risk Management*: dalla prevenzione alla gestione strategica

*"Risk is like fire: If controlled it will help you; if uncontrolled it will rise up and destroy you"* (Theodore Roosevelt)

Come sottolineato dal 26° presidente degli Stati Uniti d'America, il rischio, se non adeguatamente controllato, può comportare perdite ingenti ma, quando viene compreso e gestito, può diventare uno dei più grandi strumenti di crescita. A questo proposito, gli operatori finanziari, una volta compresa l'importanza della gestione della pluralità dei rischi a cui sono esposti tutti i soggetti dei mercati finanziari, hanno iniziato ad introdurre pratiche di risk management, a partire dal dopoguerra con lo sviluppo dei mercati finanziari nei paesi più industrializzati.

La storia del *Financial Risk Management* è stata analizzata da R. Tedeschi in un articolo pubblicato da "Il Sole 24 Ore" nel 2016 [21]. Come espresso dall'autore, la gestione dei rischi finanziari nasce nel 1916, in Francia, con l'introduzione di tale pratica fra le sei funzioni primarie del management di un'impresa. Solo negli anni '50, in America, inizia a svilupparsi una versione embrionale di *risk management* in cui, i soggetti operanti sui mercati obbligazionari utilizzano le *duration* dei bond per misurare la sensibilità dei prezzi delle obbligazioni alle variazioni dei rendimenti di mercato, mentre, coloro che operano sul mercato azionario, utilizzano il *beta* ( $\beta$ ) introdotto dal modello CAPM (anni '60) come coefficiente di misurazione del comportamento di un'azione rispetto al mercato. Già all'epoca, gli operatori del rischio di credito iniziano a pubblicare dei rating degli emittenti dei crediti e dei debitori, esprimendo sinteticamente una valutazione del merito creditizio di questi ultimi.

Le diverse misure di rischio sono espresse in unità di misura differenti e ciò rende impossibile una valutazione complessiva di portafogli complessi come quelli delle

banche. Solo negli anni '80, dopo i fallimenti delle banche americane legati all'innalzamento dei tassi d'interesse, si sviluppa l'idea che attività e passività bancarie debbano essere gestite coordinatamente.

In questo periodo, Dennis Weatherstone, amministratore delegato di J.P. Morgan, chiede ai propri analisti di produrre ogni giorno, entro le 4.15 p.m., un documento che esprimesse, in una sola cifra, quanti soldi rischia la banca su tutti i portafogli in essere con un determinato intervallo di confidenza (99%), dando così vita al VaR (*Value at Risk*).

Successivamente, J.P. Morgan decide di pubblicare la propria metodologia di misurazione dei rischi sotto il nome di *RiskMetrics*, portando così alla nascita di un numero sempre crescente di modelli non solo per la stima del rischio di mercato, ma anche del rischio di credito (come ad esempio *CreditMetrics*), di liquidità, di tasso e operativo.

Inizia in quegli anni la proliferazione di studi e pubblicazioni sulla gestione del rischio, introducendo modelli di volta in volta più sofisticati. Nasce anche la figura del *Risk Manager*, grazie al quale le grandi aziende e le istituzioni finanziarie hanno per la prima volta una figura specializzata che si occupa unicamente di tale ambito.

La crescita di tale settore vede una forte battuta d'arresto con la crisi finanziaria del 2008. Fino ad allora, gli operatori del settore si erano affidati ciecamente ai modelli matematici elaborati, ma con un evento così catastrofico c'è bisogno di ritornare sui propri passi. Anche le agenzie di rating affrontano un momento difficile, a causa di un vistoso calo di credibilità in conseguenza alle non corrette assegnazioni dei rating nei crediti cartolarizzati. Inoltre, i *risk manager* risultarono troppo dipendenti, nello svolgimento del proprio lavoro, dai responsabili delle funzioni crediti ed eccessivamente orientati al raggiungimento di bonus sul raggiungimento di obiettivi a breve termine.

La gestione del rischio è divenuta sempre più importante a seguito delle diverse crisi avvenute negli ultimi decenni che, impattando in modo significativo su variabili macroeconomiche (tassi di interesse, tassi di cambio), mercati finanziari (prezzi degli strumenti finanziari) e materie prime, influenzano i rendimenti dei portafogli degli investitori. Infatti, il fenomeno della globalizzazione non porta con sé solamente vantaggi: l'interconnessione delle economie dei vari paesi fa sì che una crisi, che può sembrare circoscritta ad un solo territorio, si propaghi velocemente in tutto il mondo come nel caso della crisi finanziaria del 2008 o la più recente crisi derivante dal conflitto russo-ucraino.

A diversi anni dalla crisi finanziaria, la regolamentazione in materia di rischi è divenuta sempre più stringente, con l'introduzione continua di nuovi standard da rispettare per evitare il ripetersi di un fenomeno di tale portata. Il *Chief Risk Officer* (CRO) è divenuta una figura di rilievo al pari del *Chief Financial Officer* (CFO) e risponde del suo operato direttamente all'amministratore delegato (CEO).

Ad oggi le sfide in ambito di gestione dei rischi sono numerose: a partire dalla normativa sempre più rigida ed in continua evoluzione a cui bisogna far fronte, alla nascita di nuovi rischi, anche non finanziari, che richiedono l'implementazione dei modelli esistenti al fine di comprendere l'incidenza di variabili qualitative; infine, l'emergere dell'intelligenza artificiale richiede un'analisi approfondita delle opportunità legate a tale tecnologia ma anche una valutazione dei rischi che possono nascerne (*fonte: R. Tedeschi, 2016 [21]*).

## **1.2 Definizione e processo di gestione dei rischi finanziari**

Per affrontare al meglio i rischi che possono sopraggiungere quando si è detentori un portafoglio di strumenti finanziari, è fondamentale, innanzitutto, definirli

a priori ed analizzare come possono generarsi e cosa possono comportare. Solo successivamente, attraverso una corretta gestione di tali rischi, sarà possibile comprendere al meglio come affrontarli .

### 1.2.1 Tassonomia dei rischi finanziari

Una classificazione dei rischi finanziari è fornita dal *Glossario finanziario, Borsa Italiana*:

- *rischio di mercato*: relativo alle variazioni del valore di mercato degli asset detenuti in portafoglio derivanti da variazioni di fattori di mercato; tale fenomeno verrà approfondito nel prossimo capitolo.
- *rischio di credito*: è il rischio che, in un rapporto creditizio, il debitore non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi di pagamento di interessi e di rimborso del capitale.

Generalmente, più elevato è il rischio di credito, più elevato sarà il tasso d'interesse richiesto dall'emittente del prestito per remunerare la maggiore esposizione a tale rischio (*premio al rischio*). Quest'ultimo, non è influenzato solo da eventi legati al debitore, ma anche dal ciclo economico; si riduce nei periodi di espansione economica, mentre aumenta nei periodi di recessione. Qualora si verificasse l'eventualità che l'emittente di un titolo non sia in grado di corrispondere gli interessi maturati, le agenzie di rating provvedono a ridurre il rating attribuitogli (*downgrading*); le obbligazioni di società più rischiose dal punto di vista della solvibilità, sono quelle che offrono i maggiori rendimenti, proprio perchè gli investitori sono disposti ad assumersi un rischio elevato solo in cambio di un'elevata remunerazione.

- *rischio di liquidità*: può nascere quando non si riesce a far fronte a deflussi di cassa inattesi e, nel tentativo di superare la difficoltà, si vendono titoli a

lungo termine ad un prezzo inferiore del valore reale di questi ultimi.

Quanto maggiore è l'illiquidità di un titolo, tanto più gli investitori richiedono un premio al rischio in aggiunta al rendimento del titolo. Tale situazione spiega perchè il grado di liquidità è un fattore che influenza il tasso di interesse di un titolo, ove gli investimenti con elevate caratteristiche di liquidità sono remunerati con tassi di interesse più bassi a parità di tutte le altre condizioni. Pertanto, affinché gli investitori siano incentivati ad acquistare titoli a lungo termine (maggiormente soggetti al rischio di perdita in conto capitale), deve essere offerto loro un premio. Tale premio per il rischio di liquidità può essere attribuito al fatto che i titoli a lungo termine sono più sensibili alle oscillazioni dei tassi di interesse rispetto a quelli a breve termine.

- *rischio di tasso*: si manifesta in variazioni del valore di mercato degli asset detenuti dovute al variare dei tassi di interesse di mercato.

Una variazione dei tassi d'interesse durante vita di un prestito provoca due effetti: un *effetto reinvestimento*, cioè la possibilità di investire la liquidità liberata ad un tasso superiore, un *effetto valore*, dato dal valore dei titoli ottenuto scontandone i payoff periodici al tasso di rendimento effettivo, negativo per il rialzo dei tassi. Sono pertanto esposti maggiormente a tale rischio i detentori di obbligazioni a tasso fisso, poichè un aumento nei tassi di interesse (superiore ai tassi di interesse pagati sulle obbligazioni) comporta un deprezzamento delle stesse. Esiste infatti una correlazione inversa tra prezzo e rendimento del titolo a scadenza, rappresentata da una curva (nota come *curva prezzo-rendimento*) ad inclinazione decrescente.

Oltre a quelli tradizionali, negli ultimi anni hanno ottenuto una crescente rilevanza anche alcuni rischi non propriamente finanziari, che possono comunque influire su un portafoglio d'investimento. Il *rischio operativo*, ad esempio, si origina dall'inadeguatezza dei processi interni ad un'azienda ma, a partire dal 2006,

con l'introduzione di Basilea II, tale rischio ha bisogno di essere considerato nel calcolo dei requisiti patrimoniali delle banche, poichè una scarsa o inadeguata gestione può comportare conseguenze negative anche sul valore dei titoli aziendali. Un'ulteriore fenomeno non finanziario, sempre più monitorato, è certamente il *rischio reputazionale*, poichè una variazione del giudizio che banche o aziende hanno guadagnato nel tempo può impattare valore dei propri titoli. Infine, il *rischio ESG* (*Environmental, Social, Governance*) è quello derivante da problematiche ambientali, sociali o di governance che possono impattare su un portafoglio d'investimento. Ad oggi, nonostante sia uno dei più recenti, è anche uno dei più importanti da monitorare, data la crescente rilevanza che queste tematiche hanno sia per gli investitori (una scarsa considerazione di queste questioni porterebbe le aziende ad incorrere nel cosiddetto *rischio reputazionale*), sia per le autorità di vigilanza, le quali richiedono un report accurato di sostenibilità alle aziende che, se violassero la normativa *ESG*, potrebbero incorrere in severe sanzioni (*fonte: Glossario finanziario, Borsa Italiana [14]*).

### **1.2.2 Il processo di gestione del rischio**

In questo paragrafo, verranno approfonditi gli standard pubblicati nel 2003 dalla *Federation of European Risk Management Associations* (FERMA) [1] in merito al processo gestionale dei rischi.

Il risk management protegge e dà valore all'organizzazione e ai suoi stakeholder, sostenendo gli obiettivi dell'organizzazione tramite l'elaborazione di metodi e modelli che consentono uno svolgimento delle attività presenti e future in modo coerente e controllato. Inoltre, incentiva il miglioramento del processo decisionale e della pianificazione, tramite la comprensione dell'attività commerciale, della volatilità e degli elementi positivi o negativi di ogni progetto. Per di più contribuisce

all’allocazione efficace del capitale e delle risorse all’interno dell’organizzazione, ottimizzando l’efficienza operativa.

Il processo inizia con l’*identificazione del rischio*, che richiede una conoscenza approfondita sia dell’organizzazione stessa (del mercato nel quale opera, degli obiettivi strategici e operativi e dei fattori critici di successo) sia dei rischi che possono generarsi dall’attività aziendale (vedi 1.2.1). Questo facilita una corretta analisi del rischio tramite una forma strutturata, che favorisce la descrizione e la valutazione del fenomeno, per esempio tramite l’aiuto di una tabella come la seguente:

<b>N.</b>	<b>Categoria</b>	<b>Descrizione</b>
1	Denominazione del rischio	
2	Estensione del rischio	Descrizione qualitativa degli eventi, dimensioni, tipologia e fattori correlati
3	Natura del rischio	Strategico, operativo, finanziario, cognitivo o di conformità
4	Stakeholder	Parti in causa e loro aspettative
5	Quantificazione del rischio	Rilevanza e probabilità
6	Tolleranza o propensione al rischio	Impatto finanziario, valore a rischio, probabilità e dimensione di perdite/guadagni, obiettivi di controllo
7	Controllo del rischio	Strumenti di gestione, fiducia nei controlli, protocolli di revisione
8	Azioni di miglioramento	Raccomandazioni per ridurre il rischio
9	Strategia aziendale	Funzione responsabile dello sviluppo della strategia

Tabella 1.1: *Descrizione del rischio (fonte: FERMA, 2003)*

Successivamente, bisogna effettuare una *stima del rischio* in termini di probabilità di manifestazione dell'evento e di possibili conseguenze che quest'ultimo può generare. Per stimare la probabilità, sarà necessario elaborare modelli basati non solo sui valori storici di accadimento ma che riescano a valutare anche i possibili scenari futuri che possono influenzare tale misura. Le conseguenze da analizzare saranno sia negative (minacce) che positive (opportunità) e sarà da considerare come impattano sulla strategia e sull'attività operativa dell'organizzazione, ma anche sulla preoccupazione degli stakeholders.

Il processo di analisi genera un *profilo di rischio* che assegna un voto di rilevanza ad ogni rischio così da classificarlo, al fine di determinarne l'importanza relativa rispetto agli altri rischi e all'area operativa in cui può presentarsi.

Una volta terminato tale processo, si passa a selezionare e attuare le misure che consentono di gestire il rischio. Qualsiasi sistema rivolto al trattamento di un rischio deve consentire il regolare funzionamento dell'azienda e deve essere conforme alla normativa vigente. Innanzitutto è necessario determinare il costo di attuazione delle misure individuate, successivamente bisogna calcolare la perdita attesa in caso di assenza di iniziative, al fine che il management possa decidere se attuare o meno la strategia.

I report dei *risk manager* sono rivolti sia ai soggetti interni all'azienda che a quelli esterni. Livelli differenti all'interno di un'organizzazione necessitano di informazioni differenti sul processo di *risk management*.

Il consiglio di amministrazione (CDA) deve conoscere i rischi più significativi ed i possibili effetti sul valore degli azionisti, deve sapere in che modo si pensa di affrontare un'eventuale crisi e gestire le comunicazioni con gli investitori laddove necessario. Le unità operative, invece, devono essere a conoscenza solo dei rischi della propria area e, al loro verificarsi, segnalarli in modo tempestivo alla dirigenza.

Esternamente, le società devono informare i propri stakeholders attraverso un report ufficiale che descriva i processi utilizzati per identificare i rischi, il modo in cui vengono affrontati ed i sistemi di controllo esistenti.

Infine, è necessario eseguire controlli *ex-post* e rivedere costantemente i risultati degli standard per identificare opportunità di miglioramento. Le organizzazioni operano in ambienti dinamici, è quindi necessario identificare il suo ambiente e i cambiamenti interni per effettuare le opportune modifiche ai sistemi. Il processo di controllo deve garantire l'esistenza di un monitoraggio adeguato delle attività dell'organizzazione, nonché la comprensione e il rispetto delle procedure. Qualsiasi processo deve inoltre stabilire se le misure adottate hanno prodotto i risultati sperati o se maggiori conoscenze avrebbero contribuito a prendere decisioni migliori e a trarre insegnamenti utili per future verifiche (*fonte: FERMA, 2003 [1]*).

### **1.3 *Framework* normativo**

Alle crisi avvenute nel mondo finanziario è sempre susseguita l'introduzione di nuove normative. Ciò accade perchè il diritto non mira a prevedere un fenomeno che può generare un dissesto ma, al manifestarsi di quest'ultimo, interviene per far sì che tale evento non si verifichi nuovamente.

Se per le aziende sono previsti standard non vincolanti per il processo di gestione del rischio (vedi 1.2.2), per le banche invece esistono norme obbligatorie da rispettare per tutelare sia i clienti sia l'intero sistema finanziario. Tra i più rilevanti *framework* normativi in ambito bancario ci sono sicuramente gli *Accordi di Basilea*. In questo paragrafo sarà approfondita l'evoluzione di tali accordi per comprendere da quale necessità nascono e quali sono le conseguenze di tali regolamenti per gli intermediari. Infine, verrà approfondito un altrettanto importante quadro normativo europeo, quello sul rischio ESG, al fine di analizzare come la so-

stenibilità ha mutato le scelte di investimento e di gestione dei rischi delle imprese e delle istituzioni finanziarie.

### 1.3.1 La gestione del rischio finanziario nelle banche: gli Accordi di Basilea

Nel 1988, il Comitato di Basilea, partecipato dagli enti regolatori del G-10, ha introdotto un set di regole sui requisiti patrimoniali che le banche devono rispettare che prende il nome di *Basilea I* (recepito dalla Comunità Europea tramite la Direttiva 89/647/CEE). Tale accordo nasce al fine di rendere le banche più solvibili ed evitare che queste assumano rischi eccessivi. Inoltre, c'è bisogno di creare una normativa unica per il raggiungimento del cosiddetto *level playing field*, ossia il non generare delle distorsioni competitive legate alle differenti normative dei vari paesi. Per raggiungere questi scopi, viene introdotto un coefficiente di solvibilità, pari al rapporto tra *Capitale Regolamentare (RC)* e *attività ponderate per il rischio* pari almeno all'8%:

$$\frac{\text{Capitale Regolamentare}}{\text{Attività Ponderate per il Rischio}} \geq 8\%$$

Il capitale regolamentare è composto da *Tier I Capital* e *Tier II Capital*: il primo include il capitale sociale ed alcune riserve come la riserva obbligatoria o gli utili accantonati a riserve; il secondo è composto da una serie di riserve subordinate come le riserve di rivalutazione o strumenti ibridi di patrimonializzazione. Per quanto riguarda le RWA, le attività sono ponderate con dei fattori in base alla natura dell'esposizione e alla rischiosità delle controparti: la cassa e i titoli di stato di un paese OCSE non vengono considerati (ponderati allo 0% perchè non considerati rischiosi); i crediti verso le banche dei paesi OCSE sono ponderati al 20%, mentre i prestiti garantiti da ipoteca al 50%; infine, i crediti verso privati

o banche e paesi non OCSE sono considerati i più rischiosi, quindi ponderati al 100%.

Questo *framework* presenta diversi limiti: l'unico rischio considerato è il rischio di credito e non c'è una distinzione in base al merito creditizio della controparte ma solo in base alla natura della stessa; un credito verso un'azienda non meritevole assorbe la stessa quantità di capitale regolamentare di un credito erogato ad un'azienda meritevole dal punto di vista creditizio.

Al fine di superare tali limiti, nel 2004 viene introdotto *Basilea II*, recepito tramite la Direttiva 2006/48/CEE.

Il nuovo accordo è basato su tre pilastri:

- requisiti patrimoniali minimi;
- vigilanza prudenziale;
- disciplina di mercato.

Il primo pilastro prevede la revisione dei requisiti patrimoniali di Basilea I. Il coefficiente di solvibilità resta all' 8% ma viene modificato il capitale regolamentare con l'introduzione di un *Tier III Capital*, composto da prestiti subordinati a copertura dei rischi di mercato. L'innovazione principale però è prevista per il calcolo delle attività ponderate per il rischio, per il quale vengono considerati, oltre al rischio di credito, anche il rischio di mercato e il rischio operativo:

$$\frac{\text{Regulatory capital}}{RWA_{cr} + RWA_{mk} + RWA_{op}} \geq 8\%$$

Per la stima del rischio di credito, vengono introdotti nuovi metodi di valutazione del merito creditizio basati su due tipi di approcci. Il primo prevede che le banche possono sviluppare un modello di rating interno, poichè hanno già a disposizione tutte le informazioni dei propri clienti (*approccio IRB*): tale metodologia prevede

che le banche possano stimare da sole le PD (*Probability of Default*<sup>1</sup>) dei creditori e far riferimento per le altre misure ai valori prefissati dalle autorità (*approccio F-IRB*) oppure possono misurare con metodologie proprie anche tutti gli altri parametri<sup>2</sup> (*approccio A-IRB*).

Il secondo metodo per la valutazione del merito creditizio (*approccio standard*) prevede l'utilizzo di rating assegnati dalle agenzie di rating. Una valutazione migliore del merito creditizio comporterà un peso minore nel calcolo degli RWA, inoltre la natura della controparte comporterà scale di ponderazione diverse. Di seguito, è possibile notare un esempio di scala di rating di *Standard & Poor's*:

Classe di merito	Coefficienti di ponderazione del rischio				ECAI S&P
	Banche centrali	Enti pubblici	BMS <sup>3</sup>	Imprese e altri	
1	0%	20%	20%	20%	da AAA a AA-
2	20%	50%	50%	50%	da A+ a A-
3	50%	100%	50%	100%	da BBB+ a BBB-
4	100%	100%	100%	100%	da BB+ a BB-
5	100%	100%	100%	150%	da B+ a B-
6	150%	150%	150%	150%	CCC+ e inf.

Tabella 1.2: *Mapping dei rating rilasciati da Standard & Poor's Rating Services (fonte: Banca d'Italia)*

<sup>1</sup>La Probabilità di Default esprime con quale probabilità la controparte di un'esposizione creditizia possa non riuscire più a ripagare il proprio debito.

<sup>2</sup>Si tratta di Maturity, LGD (Loss-Given-Default) ed EAD (Exposure-at-Default):

- Maturity: rappresenta la scadenza dell'esposizione creditizia;
- EAD: esprime l'ammontare dell'esposizione creditizia nel momento di default della controparte;
- LGD: indica la quota di esposizione che la banca crede di non poter più recuperare in alcun modo.

<sup>3</sup>BMS: Banche Multilaterali di Sviluppo

Per la stima del rischio di mercato, c'è la possibilità sia di usare un metodo standardizzato, sia di utilizzare modelli interni come VaR o stress test (verranno analizzati nei prossimi capitoli).

Per il rischio operativo, invece, è previsto un metodo di base (*Basis Indicator Approach*), secondo cui il requisito patrimoniale per il rischio operativo è pari al 15% della media del margine operativo lordo degli ultimi 3 anni, o un'approccio standardizzato, per il quale vengono suddivise le linee operative e per ognuna viene applicato un determinato coefficiente di ponderazione.

Il secondo pilastro prevede un processo di controllo prudenziale articolato in due fasi:

- ICAAP (*Internal Capital Adequacy Assessment Process*): consiste in una valutazione interna della banca in merito alla sua adeguatezza patrimoniale, in cui non terrà conto solo dei rischi citati nel primo pilastro ma di qualsiasi tipo di minaccia. Inoltre, dovrà specificare le strategie aziendali per fronteggiare questi fenomeni.
- SREP (*Supervisory Review and Evaluation Process*): è effettuato dall' Autorità di Vigilanza che, attraverso un sistema di controlli, esprime un giudizio sull'ICAAP e, se necessario, applica misure correttive.

Infine, il terzo pilastro specifica gli obblighi informativi degli istituti creditizi, che dovranno fornire informazioni al pubblico, ogni 6 mesi, in merito ai sistemi di misura e di controllo utilizzati per la valutazione del rischio affinché il mercato sia in grado di valutare correttamente l'effettivo profilo di rischio assunto dalla banca stessa.

Con il sorgere della crisi finanziaria del 2008, gli standard di Basilea II vennero considerati già non più adatti a fronteggiare un fenomeno di tale portata, quindi, nel 2010, è stato pubblicato *Basilea III*, recepito in Unione Europea tramite la

Direttiva 2013/36/UE.

Il nuovo *framework* conferma il coefficiente di solvibilità all'8% ma aumenta il capitale di alta qualità (Common Equity Tier 1, CET1) che deve essere pari almeno al 4,5% delle RWA. Vengono inoltre introdotti: un *Buffer di conservazione del capitale* per le fasi di stress pari al 2,5% delle RWA; un *Buffer di capitale anticiclico*, a livello nazionale, tra 0% e 2,5% che permette di conservare capitale per le crisi; il *Leverage ratio* per imporre un limite minimo alla leva finanziaria pari al 3%.

Vengono infine introdotti 2 indicatori di liquidità:

- LCR (*Liquidity Coverage Ratio*): è un indice di breve periodo, introdotto per far sì che le banche dispongano di un'adeguata quantità di attività prontamente liquidabili per far fronte ad uno scenario di stress di 30 giorni consecutivi.

$$LCR = \frac{\text{Attività prontamente liquidabili}}{\text{Deflussi di cassa netti}} \geq 100\%$$

- NSFR (*Net Stable Funding Ratio*): indicatore di lungo periodo, che richiede alle banche di tenere il passivo patrimoniale stabile in relazione all'attivo patrimoniale per un'orizzonte temporale di 12 mesi.

$$NSFR = \frac{\text{Importo Disponibile di Finanziamento Stabile}}{\text{Importo Richiesto di Finanziamento Stabile}} \geq 100\%$$

Al numeratore rientreranno tutte le passività della banca, i quali valori contabili verranno ponderati per un fattore che ne riflette il grado di stabilità; allo stesso modo, al denominatore i valori contabili delle attività della banca verranno moltiplicati per un fattore che ne indica il relativo grado di smobilizzo.

Nel 2017, il Comitato di Basilea ha approvato un pacchetto integrativo di riforme, comunemente chiamato *Basilea IV*. La principale novità è l'introduzione di un

*output floor* che evita riduzioni eccessive nel definire i requisiti patrimoniali delle banche, quindi l'ammontare dei diversi RWA ottenuti con l'applicazione dei modelli interni non potrà essere inferiore al 72.5% (*output floor*) di quanto calcolato utilizzando l'approccio standard. Per il rischio creditizio, nel modello standard, al fine di contenere le discrezionalità di cui le banche precedentemente potevano beneficiare nell'individuare classi con un RWA più contenuto, vengono modificati diversi fattori di ponderazione; nel modello IRB, vengono fissati dei valori minimi per LGD (pari al 25% per le esposizioni senza garanzie reali, che scende al 15% in caso di presenza della garanzia), EAD (collegato ai valori dei fattori di conversione dei crediti) e PD (il valore minimo sale da 3 a 5 *basis point*).

Nel rischio operativo, il modello Standard definisce che l'ammontare del capitale regolamentare da predisporre per fronteggiare i rischi operativi sarà determinato dal prodotto tra BIC (*Business Indicator Component*, che rappresenta la sommatoria dei diversi ricavi bancari) e ILC (*Internal Loss Multiplier*, che tiene in considerazione l'entità delle diverse perdite operative registrate negli ultimi dieci anni). Infine, per il rischio di mercato, la banca deve definire i fondi propri considerando tutte le posizioni del portafoglio di negoziazione (*trading book*) e tutte le posizioni non riferibili all'attività di negoziazione (*banking book*) che sono soggette al rischio di cambio e alle posizioni in merci (*fonti: A. Resti e A. Sironi, 2008 [19]; G. Di Giorgio [6], 2020; M. Ferfoggia, 2024[9]*).

### **1.3.2 Il rischio ESG nel settore finanziario: la *Task Force on Climate-related Financial Disclosures***

Nella sezione precedente, è stata approfondita la regolamentazione in merito ai rischi finanziari tradizionali ma, negli ultimi anni, è diventato inevitabile considerare la crescente attenzione delle istituzioni verso la sostenibilità. Questa tendenza ha influenzato anche il mondo finanziario che è costretto a restare al passo con le

nuove normative. In tema di *risk management*, il *Financial Stability Board* (FSB) ha dato vita nel 2015 alla *Task Force on Climate-related Financial Disclosures* (TCFD) al fine di introdurre una normativa per la reportistica dei rischi finanziari legati alla sostenibilità. Nel 2017, la TCFD pubblica il *final report "Recommendations of the Task Force on Climate-related Financial Disclosures"* secondo cui i rischi legati al cambiamento climatico sono tra i più importanti ma anche quelli meno compresi, poichè molte organizzazioni percepiscono erroneamente le implicazioni del cambiamento climatico come a lungo termine, quindi non necessariamente rilevanti per le decisioni che devono prendere oggi. Gran parte dei settori economici sono influenzati dai rischi climatici e dalla transizione verso un'*economia green*; sebbene i cambiamenti rappresentino un rischio significativo, possono creare anche importanti opportunità per le società che si concentrano su soluzioni per la mitigazione e l'adattamento al cambiamento climatico: si stima che la transizione richiederà circa 1 trilione di dollari di investimenti all'anno per il prossimo futuro, generando nuove opportunità di investimento. La *Task Force* ha il compito di sviluppare un quadro per la divulgazione finanziaria dei rischi climatici uguale per tutti e che sia utile agli investitori per comprendere i rischi legati al cambiamento climatico. Sono state elaborate quattro raccomandazioni chiave per la disclosure finanziaria dei rischi climatici, applicabili a tutte le organizzazioni, che danno la possibilità di fornire informazioni utili per la redazione dei report finanziari, con particolare attenzione ai rischi e alle opportunità legati alla transizione. Le raccomandazioni si articolano su quattro livelli:

- *Governance*: l'organizzazione deve supervisionare e gestire i rischi e le opportunità legate al cambiamento climatico;
- *Strategy*: gli impatti attuali e futuri dei rischi legati al clima sulle strategie dell'organizzazione;

- *Risk Management*: i processi attuati per identificare, valutare e gestire i rischi legati al cambiamento climatico;
- *Metrics and Target*: metriche e obiettivi utilizzati per valutare e gestire i rischi e le opportunità legati al cambiamento climatico.

Le raccomandazioni mirano ad essere ambiziose, ma allo stesso tempo pratiche per una rapida adozione, migliorando la qualità delle divulgazioni finanziarie sugli effetti del cambiamento climatico e aumentando il coinvolgimento degli investitori con il *top management* su queste tematiche. Le raccomandazioni forniscono una base solida per degli investitori per valutare correttamente e attribuire un prezzo ai rischi e alle opportunità legate al clima (fonte: *Recommendations of the Task Force on Climate-related Financial Disclosures*, TCFD, 2017 [20]).

## Capitolo 2

# La stima del rischio di mercato: i modelli *Value at Risk*

I mercati finanziari sono una delle principali fonti di rischio non solo per le istituzioni bancarie ma anche per gli investitori e le imprese operanti in tali mercati. Al fine di adottare strategie di mitigazione e controllo del rischio di mercato, è necessario comprenderlo e misurarlo adeguatamente, così da poterne cogliere anche le opportunità che ne derivano. In questo capitolo, viene presentata un' introduzione al rischio di mercato, nella quale vengono esaminate le caratteristiche e le componenti proprie di questo rischio. Successivamente, vengono analizzati i modelli tradizionali per la stima del rischio di mercato, approfondendone i pregi e i limiti di ciascuno.

### 2.1 Le caratteristiche del rischio di mercato

Un'approfondimento sugli elementi distintivi del rischio di mercato è stato fornito da *A. Resti e A. Sironi* in "*Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione*"[19].

Il rischio di mercato è il rischio che una variazione di fattori di mercato comportino una variazione del valore di mercato di uno strumento finanziario o di un portafoglio di essi.

Tale rischio è uno dei più importanti da fronteggiare, poichè intacca in modo diretto le risorse finanziarie di una banca o di un'azienda, portando ad una situazione di instabilità economica e finanziaria se non si è riusciti a prevedere tale fenomeno e se non si è attuata la giusta strategia di mitigazione del rischio.

È possibile identificare diverse categorie di rischi di mercato, a seconda del fattore di rischio considerato:

- *rischio di interesse*: si parla di tale rischio quando una variazione dei tassi di interesse impatta sul valore di mercato delle posizioni assunte, ciò accade per titoli obbligazionari e per diversi contratti derivati come forward rate agreement o interest rate swap;
- *rischio di cambio*: nasce in presenza di posizioni in valuta estera, quando una variazione dei tassi di cambio comporta una variazione del valore di mercato delle posizioni;
- *rischio azionario*: si presenta quando l'andamento dei mercati azionari influisce sul valore di mercato delle posizioni (titoli azionari, stock option, ecc.);
- *rischio di commodities*: quando il valore di mercato delle posizioni è sensibile a variazioni di valore delle commodities (acquisti o vendite a pronti e a termine di merci, commodity swap, ecc.);
- *rischio di volatilità*: quando le variazioni della volatilità delle variabili considerate sopra ha impatto sul valore di mercato delle posizioni assunte (opzioni per esempio su tassi, valute, azioni, commodities, ecc.).

Come si può notare, è usato frequentemente il termine *variazione* in modo generico: il rischio non è identificato solamente nella sua accezione negativa, quale possibilità di registrare una perdita in caso di variazione negativa dei fattori di mercato, ma anche come opportunità, legata ad una possibile variazione positiva del valore di mercato del portafoglio di strumenti finanziari derivante da un andamento positivo delle condizioni di mercato. Inoltre, in ambito finanziario, è fondamentale distinguere le *variazioni attese* (le quali sono previste dagli operatori, per cui sono già presenti piani per fronteggiarle o per sfruttarle a proprio favore) dalle *variazioni inattese* (componente a più alto rischio, un cambiamento non previsto può generare perdite consistenti, per cui è importante provare a stimare la probabilità di avvenimento e l'impatto che possono avere tali variazioni).

Un' ulteriore tassonomia dei rischi di mercato, particolarmente importante nella negoziazione di strumenti derivati, è quella basata sul rischio di esposizione. Si parla di *rischio delta*, per indicare un rischio derivante dalla variazione del prezzo del sottostante; il *rischio gamma*, nasce dalla non linearità nella relazione tra valore di mercato della posizione e valore del sottostante; *basis risk*, generato dalle differenze tra variazioni di prezzo di una posizione e quelle degli strumenti di copertura utilizzati; *rischio rho*, comunemente chiamato rischio di tasso di sconto, connesso alle variazioni dei tassi utilizzati per scontare i flussi di cassa futuri; *rischio vega*, legato alla volatilità del sottostante; infine, *rischio theta*, dovuto alla perdita di valore della posizione nel tempo.

Negli ultimi decenni, lo studio del rischio di mercato ha assunto un ruolo cruciale nelle analisi degli operatori del settore in seguito alla comparsa di diversi fenomeni.

Il processo di *securitization*, operazione mediante la quale un insieme di diritti su attività illiquide sono incorporati in uno strumento negoziabile (*Glossario finanziario, Borsa Italiana*), ha favorito la diffusione di criteri di misurazione al valore

di mercato delle posizioni detenute. Inoltre, la crescita esponenziale degli strumenti finanziari derivati, ha portato con sé una maggiore attenzione a causa del rischio generato dalla variazione del valore di mercato dei prezzi dei sottostanti e della volatilità degli stessi. Infine, un altro fenomeno che ha accentuato l'importanza del rischio di mercato, è l'introduzione di nuovi standard contabili (IFRS 9) che prevedono l'iscrizione in bilancio di una vasta gamma di attività e passività finanziarie al valore di mercato (*fonte: A. Resti e A. Sironi, 2008 [19]*).

## 2.2 Introduzione ai modelli *Value at Risk*

I modelli Value at Risk nascono con l'esigenza di fornire una stima riassuntiva del rischio di mercato e sono applicabili tanto alle singole posizioni quanto ad un intero portafoglio, considerando quindi sia l'effetto correlazione tra le posizioni, sia l'interdipendenza tra i diversi fattori di rischio. Questi modelli hanno come obiettivo:

- definire e stimare la distribuzione dei fattori di rischio;
- costruire la distribuzione dei possibili valori futuri del portafoglio;
- fornire una misura sintetica della perdita potenziale che può subire l'investitore.

Il VaR è un indicatore di rischio che identifica, al variare dei fattori di mercato, la massima perdita attesa che una posizione può subire in un determinato orizzonte temporale, con un certo intervallo di confidenza. Si può notare che il VaR misura la *massima perdita potenziale*, quindi è una misura probabilistica, la cui probabilità è determinata dall'intervallo di confidenza scelto. Inoltre, il VaR, per definizione, ammette l'esistenza di una perdita superiore a quella stimata, ma non

fornisce alcuna indicazione per quantificarla. Occorre, infine, determinare l'orizzonte temporale, in modo da rispettare le aspettative del detentore del portafoglio in termini di durata dell'investimento.

### 2.2.1 L'intervallo di confidenza

La scelta dell'intervallo di confidenza determina la probabilità con cui ci si aspetta di registrare la massima perdita del portafoglio:

$$P(\text{perdita} < VaR) = c$$

dove  $c$  rappresenta il livello di confidenza scelto.

Quindi, se si opta per un intervallo di confidenza al 99%, significa che si vuole determinare la massima perdita che si ha con una probabilità estremamente elevata; oppure, la massima perdita che si può subire, tale che vi sia una possibilità solo dell' $(1 - c)\%$  che quella effettiva sia superiore a quella stimata.

L'intervallo di confidenza esprime, quindi, il grado di avversione al rischio dell'intermediario finanziario: tanto meno vorrà rischiare, tanto più elevato sarà l'intervallo. È necessario precisare che la scelta di un livello di confidenza troppo basso può comportare una sottostima del rischio e quindi ad avere perdite significative nel caso di eventi estremi. Inoltre, si rischierebbe di allocare meno capitale di quanto richiesto dagli standard imposti dal *Comitato di Basilea* e di aumentare il rischio di insolvenza della banca. D'altro canto, un livello di confidenza eccessivamente elevato non è sempre efficiente perchè, anche se si evita con grande probabilità una perdita, si rischia di accantonare troppo capitale per soccombere alle eventuali perdite, riducendo la capacità di investimento della banca. Si rischia, inoltre, di sottostimare la probabilità di avvenimento di eventi estremi e quindi non riuscire a fronteggiarli al loro verificarsi.

Generalmente, è utilizzato un VaR al 95% o al 99%: il primo, genera una misura di rischio meno estrema, evitando di imporre requisiti di capitale eccessivi e risulta più stabile del VaR al 99% perchè è meno sensibile alle code della distribuzione dei rendimenti; il secondo, è utilizzato per portafogli più rischiosi o per contesti più volatili ed è una misura più conservativa. La normativa di Basilea III impone per gli intermediari finanziari il calcolo del VaR al 99% per aumentare la prudenza e per avere una misura conforme a tutti gli istituti per riuscire a confrontarli meglio.

### **2.2.2 L'orizzonte temporale**

La scelta dell'orizzonte temporale lungo il quale si vuole misurare la perdita è fondamentale nel calcolo del VaR. A parità di altre condizioni, un'orizzonte temporale maggiore porta ad un VaR maggiore in conseguenza all'aumento della volatilità.

Il primo fattore da considerare in questa scelta è la profondità del mercato di riferimento della posizione considerata. Il grado di liquidità di un mercato rispecchia il tempo necessario per liquidare una posizione, infatti, la perdita massima calcolata dal VaR sarà tale solo se si può vendere il titolo entro l'orizzonte temporale. Posizioni in valuta possono essere facilmente liquidate grazie all'ampia profondità del mercato, invece, posizioni su titoli obbligazionari, generalmente, hanno bisogno di un tempo maggiore.

Al contempo, anche la dimensione della posizione risulta importante: liquidare un'esposizione rilevante rende più difficile realizzare un introito pari al valore della posizione, con la possibilità di incorrere in una perdita. In questo caso, è necessario fissare un periodo più ampio, così da permettere all'investitore di vendere in maniera graduale per evitare un danno economico eccessivo.

Un secondo fattore, fondamentale nella scelta dell'orizzonte temporale, è la strategia dell'investitore, quindi se quest'ultimo decide di operare con un ottica

speculativa o di investimento. Nel primo caso, ci sarà bisogno di un periodo di riferimento più breve (giornaliero) così che si possa valutare in qualsiasi momento quando liquidare una posizione perchè si è raggiunto il margine sperato o per non aumentare eventuali perdite. Nel caso in cui l'investitore effettui un'investimento a lungo termine, è appropriato fornire una stima del VaR calcolato lungo tutto il periodo in cui si crede di lasciare la posizione aperta. In entrambi i casi, è necessario calcolare il VaR considerando un periodo sufficientemente lungo per la stima della volatilità.

Generalmente, nella stima del VaR giornaliero, viene utilizzato un campione di almeno un anno (252 giorni di *trading*) per permettere una corretta previsione della volatilità.

Si è notato che gli strumenti finanziari, anche quando subiscono forti variazioni di prezzo nel breve termine, tendono a ritornare al loro valore medio nel lungo periodo. Per campioni più ampi, le stime risultano più accurate, contraddicendo le teorie secondo cui la maggiore ampiezza del campione disperde le informazioni sui dati più recenti del mercato. Una soluzione potrebbe essere ricavare dalla volatilità giornaliera la stima per periodi più prolungati. Assumendo che i rendimenti giornalieri siano rappresentati da variabili casuali distribuite secondo una normale con media nulla e varianza pari a  $T$ , la volatilità relativa a  $T$  giorni sarà pari a:

$$\sigma_T = \sigma_g \sqrt{T}$$

Tale relazione può essere utilizzata per trasformare la volatilità giornaliera nella volatilità del periodo di riferimento che occorre per la stima del VaR. Questa formula è basata sull'assunzione di indipendenza seriale dei  $T$  rendimenti giornalieri, quindi si ipotizza che la variazione di un fattore di mercato verificatasi in un determinato giorno è indipendente da quella avvenuta il giorno prima. Da ciò risulta evidente un limite, dato che numerosi studi empirici hanno dimostrato che

le variazioni dei fattori di mercato siano in realtà caratterizzate da fenomeni di autocorrelazione<sup>1</sup>.

## 2.3 L'approccio parametrico per il calcolo del VaR

Il metodo parametrico (varianze-covarianze) è sicuramente l'approccio più utilizzato dalle banche per il calcolo del VaR. La preferenza per questo modello, rispetto a quelli di simulazione, è dovuta alla sua semplicità di calcolo ed all'efficienza computazionale. Tale semplicità però porta alla luce dei limiti evidenti di questo approccio, dovuti alle ipotesi che stanno alla base della metodologia. In questo paragrafo verranno approfonditi i pregi ed i limiti del modello delle varianze-covarianze, così da poterlo confrontare successivamente con dei metodi alternativi.

### 2.3.1 Ipotesi alla base del modello

Uno dei pilastri del VaR parametrico è l'ipotesi che i rendimenti finanziari seguano una distribuzione normale.

Sia  $P_t$  il prezzo di un titolo alla data  $t$ , la variazione assoluta del prezzo del titolo tra le date  $t$  e  $t - 1$  sarà pari a:

$$\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$$

quindi, il rendimento del titolo tra  $t$  e  $t - 1$  sarà definito come:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

---

<sup>1</sup>A. Resti e A. Sironi, Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione, Egea, 2008.

Generalmente, come presente nel modello *RiskMetrics*, vengono utilizzate le variazioni logaritmiche dei rendimenti:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (2.1)$$

Analizzando le serie storiche dei rendimenti di un'attività finanziaria, si suppone che questi seguano una distribuzione che si può approssimare ad una normale:

$$r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

dove  $\mu$  rappresenta la media e  $\sigma^2$  la volatilità.

La funzione di densità della variabile casuale  $r_t$ , utile a descrivere come si distribuiscono i suoi valori, è data da:

$$f(r_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Per il calcolo del VaR è utile utilizzare la distribuzione normale standard, caratterizzata da media nulla e deviazione standard pari a uno.

Se consideriamo la variabile:

$$Z = \frac{r_t - \mu}{\sigma}$$

si può notare che

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{\mathbb{E}[r_t] - \mu}{\sigma} = 0,$$

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(r_t) = 1.$$

da cui la funzione di distribuzione di  $Z$  sarà:

$$\Phi(s) = P(Z \leq s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

dove

- $P(Z \leq s)$  : Probabilità che la variabile casuale  $Z$  assuma un valore minore o uguale a  $s$ .

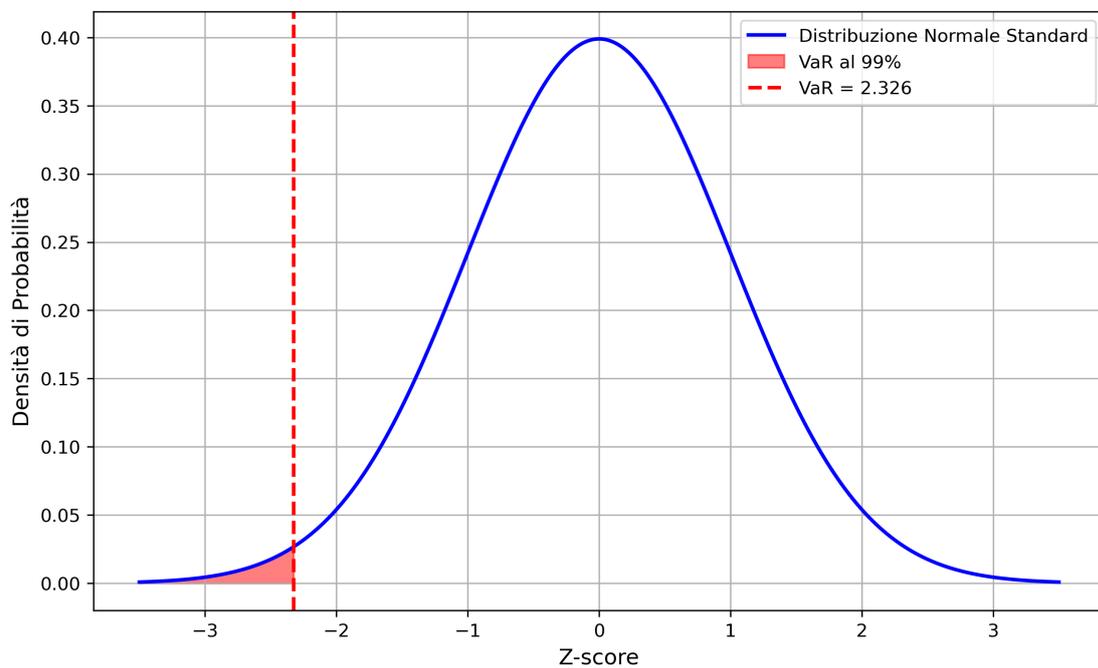
- La funzione di densità della distribuzione normale standard è data da:

$$f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Per calcolare questa funzione di distribuzione viene utilizzata la tavola dei valori della normale standard, la quale assocerà ad ogni valore di  $s$  un valore corrispondente per  $\Phi(s)$ .

Nel calcolo del VaR parametrico, questa tavola è fondamentale perchè permette di associare ad ogni livello di probabilità uno scalare  $Z_\alpha$  che sarà identificativo dell'intervallo di confidenza. Per esempio, calcolare il VaR al 99% di confidenza significa che  $\alpha$  è pari a 0,99 e quindi dalla tabella della normale standard si andrà ad identificare il valore dello scalare  $Z_\alpha$ :

$$Z_\alpha = Z_{0.99} = 2.326$$



**Fig. 2.1:** Distribuzione Normale Standard con evidenziazione del VaR al 99%.

L'ipotesi di normalità dei rendimenti è sicuramente la più importante, ma non è l'unica. Affinchè il VaR Parametrico possa fornire una stima coerente e affidabile del rischio di mercato, esso si basa su altre tre assunzioni fondamentali:

1. *I rendimenti sono indipendenti e identicamente distribuiti (IID).*

Questa assunzione implica che  $r_t$ , il rendimento al tempo  $t$  di un asset, non dipende dai rendimenti dei giorni precedenti (*indipendenti*) e che la distribuzione di  $r_t$  è la stessa in ogni periodo con  $\mu$  e  $\sigma^2$  costanti (*identicamente distribuiti*).

Questo significa che per ogni  $k \neq 0$ , i rendimenti  $r_t$  e  $r_{t+k}$  sono statisticamente indipendenti. La funzione di densità dei rendimenti resta invariata nel tempo:

$$f(r_t) = f(r_{t+k}), \quad \forall t, k$$

2. *La correlazione tra asset è costante nel tempo.*

Il rischio viene stimato tramite la *matrice di varianza-covarianza*, assumendo che le correlazioni tra asset restino costanti nel tempo, trascurando la possibilità che esse possano registrare delle variazioni al variare delle condizioni di mercato.

La *matrice di varianza-covarianza*  $\Sigma$  è definita come:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Dove:

- $\sigma_i^2$  è la varianza dell' asset  $i$ .
- $\rho_{ij}$  è la correlazione tra i rendimenti degli asset  $i$  e  $j$ .

### 3. *Le variazioni di valore del portafoglio sono lineari*

Viene assunto che il valore del portafoglio registri variazioni in modo lineare rispetto ai fattori di mercato. Ciò significa che le variazioni di prezzo sono proporzionali alle variazioni nei rendimenti degli asset.

$$\Delta P_t = \sum_{i=1}^n w_i \Delta P_{i,t}$$

e il rendimento giornaliero del portafoglio è dato da:

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

Questa ipotesi permette di stimare il rischio del portafoglio usando la deviazione standard dei rendimenti, senza considerare effetti non lineari come quelli presenti negli strumenti derivati.

Tali ipotesi sono fondamentali in questo approccio poichè, senza queste ultime, non si potrebbe costruire un modello semplice ed efficiente. Tuttavia, come vedremo successivamente, è proprio da queste assunzioni che nascono i principali limiti dell'approccio parametrico.

### **2.3.2 Il calcolo del VaR parametrico: gli approcci *delta normal* e *asset normal***

Per il calcolo del VaR parametrico, è necessario stimare la sensibilità del valore degli asset detenuti in portafoglio alle variazioni dei fattori di mercato.

L'approccio *delta normal*, è finalizzato all'introduzione di un coefficiente  $\delta$  che associa il valore delle attività finanziarie con quelle dei fattori di rischio. In particolare, si collega la distribuzione delle variazioni dei fattori di mercato alla distribuzione delle variazioni del valore di mercato degli asset detenuti; così facendo

anche la distribuzione di probabilità delle variazioni di prezzo degli asset può essere considerata come una normale e il VaR viene calcolato come multiplo della deviazione standard<sup>2</sup>:

$$VaR = |VM \cdot \delta \cdot Z_\alpha \cdot \sigma| \quad (2.2)$$

dove:

- $VM$  è il valore di mercato dell'asset o del portafoglio;
- $\delta$  è il coefficiente di sensibilità del portafoglio rispetto al fattore di rischio;
- $Z_\alpha$  è il quantile della distribuzione normale standard corrispondente al livello di confidenza desiderato;
- $\sigma$  è la deviazione standard del fattore di rischio sottostante.

Questo metodo si basa sull'approssimazione lineare della variazione di valore degli strumenti finanziari rispetto ai fattori di rischio sottostanti. Tale approssimazione, può risultare imprecisa quando si analizzano portafogli contenenti strumenti che presentano un'elevata non-linearità, come le opzioni *deep in-the-money* o *deep out-of-the-money*<sup>3</sup>.

L'approccio *asset normal*, è quello previsto dalla versione originaria del modello *RiskMetrics* di *J.P. Morgan*. È il metodo standard utilizzato per portafogli composti da asset tradizionali (azioni, obbligazioni, valute). In questo caso, vengono

---

<sup>2</sup>A. Resti e A. Sironi, *Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione*, Egea, 2008.

<sup>3</sup>Le opzioni *deep in-the-money* hanno un prezzo d'esercizio molto inferiore o molto superiore rispetto al prezzo del sottostante (a seconda che si tratti rispettivamente di un'opzione *call* o *put*, il che le rende quasi uguali al sottostante stesso. Viceversa, le opzioni *deep out-of-the-money*, hanno un prezzo d'esercizio molto superiore (per le *call*) o molto inferiore (per le *put*) rispetto al prezzo del sottostante, rendendole meno sensibili alle variazioni del mercato e quindi con scarsa probabilità di esercizio.

utilizzati come fattori di rischio le variazioni logaritmiche dei prezzi delle attività finanziarie, imponendo che seguano una normale:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

dove:

- $r_t$  è il rendimento logaritmico dell'asset al tempo  $t$ .
- $P_t$  e  $P_{t-1}$  sono rispettivamente il prezzo dell'asset al tempo  $t$  e  $t - 1$ .
- $\mu$  è la media dei rendimenti logaritmici.
- $\sigma^2$  è la varianza dei rendimenti logaritmici.

Utilizzando questa ipotesi, il VaR può essere calcolato come:

$$VaR = VM \cdot Z_\alpha \cdot \sigma \quad (2.3)$$

L'analisi effettuata nell'approccio asset normal è più vantaggiosa, in quanto semplifica il calcolo del VaR senza introdurre alcun fattore di sensibilità.

### 2.3.3 Applicazione a una posizione

Supponiamo di voler calcolare, tramite l'approccio *delta normal*, Il VaR di un portafoglio contenente una sola obbligazione con le seguenti caratteristiche:

- *Valore nominale*: 100
- *Prezzo di mercato attuale*: 96
- *Scadenza (Maturity)*: 1 anno
- *Volatilità giornaliera del tasso di interesse*: 50 bp = 0.005
- *Livello di confidenza*: 99%, con  $Z_{0.99} = 2.33$

Dalla (2.2), possiamo notare che è necessario calcolare un fattore di sensibilità che, nel caso delle obbligazioni, è dato dalla *Duration Modificata*.

$$VaR = |VM \cdot DM \cdot Z_\alpha \cdot \sigma| \quad (2.4)$$

Poichè l'obbligazione ha una *maturity* di 1 anno e non paga cedole, la sua *Duration* è pari alla scadenza:

$$D = T = 1$$

la *Duration Modificata* si calcola con la formula:

$$DM = \frac{D}{1 + y}$$

Poichè il titolo quota 96 con valore nominale 100, il rendimento è stimato come:

$$y \approx \frac{100}{96} - 1 = 0.0417 = 4.17\%$$

possiamo quindi calcolare la *Duration Modificata*:

$$D_m = \frac{1}{1 + 0.0417} = \frac{1}{1.0417} \approx 0.96$$

Ora si hanno a disposizione tutti i parametri per il calcolo del VaR tramite la (2.4):

$$VaR_{99\%} = |96 \cdot 0,96 \cdot 2,33 \cdot 0,005| \approx 1,07$$

Ciò significa che, con una probabilità del 99%, la perdita giornaliera dovuta a variazioni nei tassi d'interesse non supererà 1.07 per l'obbligazione considerata.

Supponiamo ora, al 02/01/2025, di voler calcolare il VaR giornaliero al 99% di un'azione *Amazon (AMZN)* tramite l'approccio *asset normal*. Dato che le azioni *Amazon* sono quotate, il fattore di mercato coincide con l'attività di cui si vuole calcolare il VaR. In questo caso, risulta necessario possedere la serie storica dei prezzi giornalieri dell'azione. La serie storica deve essere abbastanza lunga, per avere una stima robusta della volatilità; una serie storica troppo lunga rischia di

andare troppo indietro nel tempo e, quindi, catturare dati non utili. In questo esempio si utilizzeranno le osservazioni dal 02/01/2024 al 02/01/2025<sup>4</sup>, calcolandone le variazioni logaritmiche giornaliere e successivamente stimando media e volatilità. Il valore di mercato dell'azione il 02/01/2025 è pari a 220,22\$ e la volatilità calcolata sull'intero anno precedente è 0,01771 pari a circa 1,77%. Possiamo calcolare il VaR utilizzando la (2.3):

$$VaR_{99\%} = 220,22 \cdot 2,33 \cdot 0,01771 \approx 9,08$$

quindi, la massima perdita giornaliera sarà pari a 9,08 con una probabilità del 99%<sup>5</sup>.

### 2.3.4 Il VaR di un portafoglio

Quando si considera il rischio di un portafoglio costituito da più *asset*, si tengono in considerazione, oltre alla volatilità, anche le covarianze dei rendimenti, poichè in questo caso tutte le attività detenute risulteranno sensibili a qualche fattore di mercato diverso, quindi è importante considerare la correlazione tra i rendimenti dei fattori di rischio.

Dato un titolo  $x$  sensibile ad un fattore di mercato  $y$ , si può dire che il rendimento del titolo  $x$  sarà uguale al rendimento del fattore di mercato  $y$  moltiplicato per lo specifico coefficiente di sensibilità tra  $x$  e  $y$ :

$$r_x = \delta_{x,y} \cdot r_y$$

La volatilità del rendimento del titolo sarà pari a

$$\sigma_x = \delta_{x,y} \cdot \sigma_y$$

---

<sup>4</sup>Sono stati utilizzati i valori forniti da *Yahoo Finance*

<sup>5</sup>L'esempio è stato sviluppato tramite un codice *Python* (A.1)

mentre, la varianza sarà data da:

$$\sigma_{r_x}^2 = \delta_{x,y}^2 \cdot \sigma_y^2$$

Si consideri ora un'altra posizione  $z$  presente in portafoglio, sensibile ad un fattore di mercato  $h$ ; la covarianza tra i due titoli sarà pari a:

$$\sigma_{x,z} = \rho_{x,z} \cdot \delta_{x,y} \cdot \sigma_y \cdot \delta_{z,h} \cdot \sigma_h$$

quindi, la variazione di valore complessiva del portafoglio  $P$  costituito da  $N$  posizioni sarà pari a:

$$\Delta VM_P = \sum_{i=1}^N VM_i \cdot r_i$$

mentre, la varianza:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N VM_i \cdot VM_j \cdot \sigma_{i,j}$$

utilizzando le relazioni precedenti, tale varianza diventa:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N VM_i \cdot VM_j \cdot \rho_{i,j} \cdot \delta_i \cdot \sigma_i \cdot \delta_j \cdot \sigma_j$$

la radice quadrata di questa espressione rappresenta la deviazione standard:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N VM_i \cdot VM_j \cdot \rho_{i,j} \cdot \delta_i \cdot \sigma_i \cdot \delta_j \cdot \sigma_j} \quad (2.5)$$

Data la normalità dei fattori di rischio e, di conseguenza, delle variazioni di valore del portafoglio, possiamo calcolare il VaR come multiplo della deviazione standard:

$$\begin{aligned}
VaR_P &= |z_\alpha| \cdot \sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |z_\alpha|^2 \cdot VM_i \cdot VM_j \cdot \rho_{i,j} \cdot \delta_i \cdot \sigma_i \cdot \delta_j \cdot \sigma_j} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (VM_i \cdot |z_\alpha| \cdot \delta_i \cdot \sigma_i) \cdot (VM_j \cdot |z_\alpha| \cdot \delta_j \cdot \sigma_j)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{i,j} \cdot VaR_i \cdot VaR_j} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Quindi, il VaR di un portafoglio è calcolato come la radice quadrata del prodotto dei VaR delle singole posizioni per il fattore di correlazione tra queste.

Vediamo ora un breve esempio di calcolo del VaR giornaliero di un portafoglio composto da 3 posizioni  $A, B, C$  caratterizzate dai seguenti valori:

- *Valori di mercato delle posizioni:*

$$VM_A = 1000, \quad VM_B = 2000, \quad VM_C = 3000$$

- *Volatilità giornaliera dei fattori di mercato:*

$$\sigma_A = 1,5\% \quad ; \quad \sigma_B = 2,0\% \quad , \quad \sigma_C = 1,2\%$$

- *Sensibilità delle posizioni ai fattori di mercato (assumendo per semplicità  $\delta = 1$  per tutte le posizioni):*

$$\delta_A = 1, \quad \delta_B = 1, \quad \delta_C = 1$$

- *Matrice di correlazione dei rendimenti:*

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fissiamo un livello di confidenza del 99%:

$$|z_\alpha| = 2,33$$

Dalla (2.5) otteniamo:

$$\sigma_P = \sqrt{\begin{aligned} &(1000^2 \cdot 0,015^2) + (2000^2 \cdot 0,020^2) + (3000^2 \cdot 0,012^2) \\ &+ 2 \cdot [1000 \cdot 2000 \cdot 0,4 \cdot 0,015 \cdot 0,02 \\ &+ 1000 \cdot 3000 \cdot 0,6 \cdot 0,015 \cdot 0,012 \\ &+ 2000 \cdot 3000 \cdot 0,3 \cdot 0,02 \cdot 0,012] \end{aligned}} = 71,51$$

Moltiplicando infine per il valore critico della distribuzione normale, otteniamo il VaR del portafoglio:

$$VaR_P = |z_\alpha| \cdot \sigma_P$$

quindi:

$$VaR_P = 2,33 \cdot 71,51 = 166,62$$

Questo valore indica la perdita massima attesa giornaliera del portafoglio con una probabilità del 99%.

Dall'esempio si può notare un'importante proprietà del VaR: grazie all'effetto diversificazione, il VaR complessivo del portafoglio risulta inferiore alla somma dei VaR delle singole posizioni considerate individualmente. Infatti, sommando i VaR delle singole posizioni senza tener conto delle correlazioni tra esse, avremmo ottenuto un VaR pari a:

$$\begin{aligned} VaR_A + VaR_B + VaR_C &= |z_\alpha| \cdot (VM_A\sigma_A + VM_B\sigma_B + VM_C\sigma_C) \\ &= 2,33 \cdot (1000 \cdot 0,015 + 2000 \cdot 0,020 + 3000 \cdot 0,012) \\ &= 2,33 \cdot (15 + 40 + 36) \\ &= 2,33 \cdot 91 = 212,03 \end{aligned}$$

Tale valore è maggiore del VaR di portafoglio calcolato precedentemente. La differenza positiva riflette il beneficio della diversificazione: la correlazione inferiore a 1 tra le diverse posizioni riduce la rischiosità complessiva del portafoglio rispetto alla somma dei rischi delle singole posizioni considerate isolatamente.

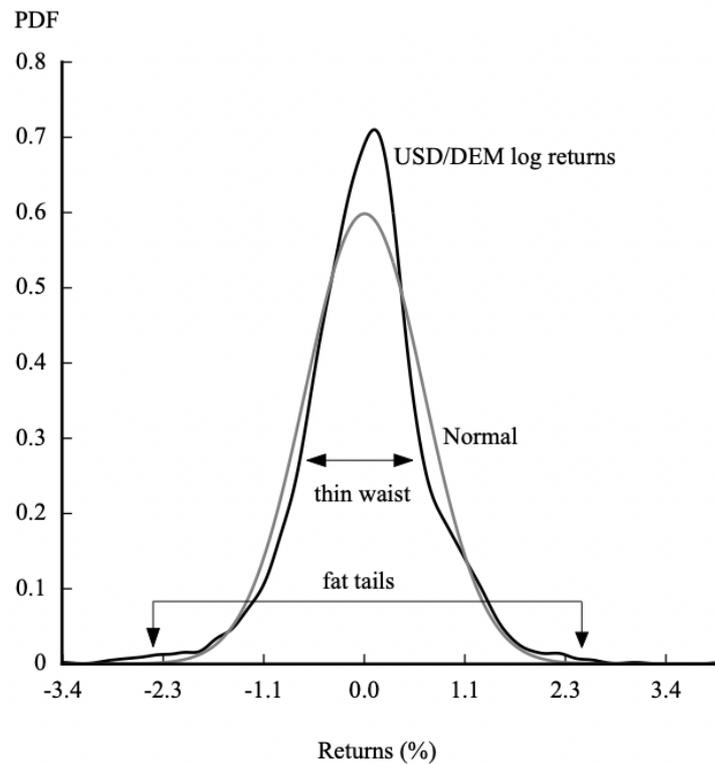
### 2.3.5 I limiti del modello

Come sottolineato precedentemente, l'approccio parametrico è sicuramente preferito dalle istituzioni finanziarie per la sua semplicità e velocità di calcolo. Questo metodo però si basa su delle ipotesi che ne generano i principali limiti.

Come riportato da *J.P. Morgan* in "*RiskMetrics Technical Document* nel 1996 [15]", l'ipotesi della normalità dei rendimenti è stata fortemente discussa già dai primi lavori di Mandelbrot (1963) e Fama (1965), i quali hanno documentato alcune caratteristiche riguardanti le proprietà statistiche dei rendimenti finanziari. Un gran numero di questi studi si concentra sui cambiamenti ad alta frequenza o giornalieri dei rendimenti logaritmici. Le loro conclusioni possono essere riassunte in quattro osservazioni fondamentali:

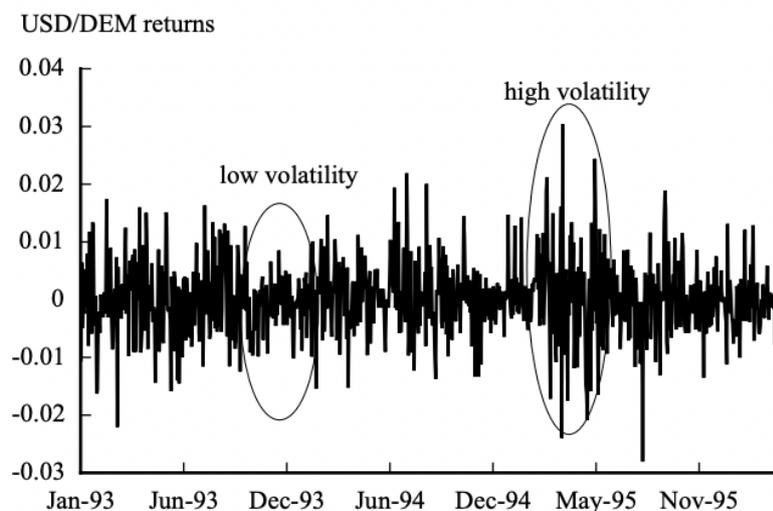
- Le distribuzioni dei rendimenti finanziari sono caratterizzate da *fat tails*. Questo significa che movimenti estremi dei prezzi si verificano più frequentemente di quanto implicato da una distribuzione normale.
- Il picco della distribuzione dei rendimenti è più alto e più stretto rispetto a quello previsto dalla distribuzione normale. Questa caratteristica (spesso definita "vita sottile"), insieme alle *fat tails*, è una caratteristica di una distribuzione leptocurtica.
- I rendimenti hanno piccole autocorrelazioni.
- I rendimenti al quadrato spesso presentano autocorrelazioni significative.

A sostegno di ciò, il grafico successivo (Figura 2.2) illustra una distribuzione leptocurtica dei cambiamenti logaritmici dei prezzi nei tassi di cambio USD/DEM per il periodo dal 28/03/1996 al 12/04/1996, confrontandola con una distribuzione normale.



**Fig. 2.2:** Confronto tra distribuzione normale e distribuzione leptocurtica. Fonte: [15].

L'approccio varianze-covarianze assume che i rendimenti sono indipendenti e identicamente distribuiti ma la volatilità non è costante e si manifesta in *cluster* e cioè periodi di alta volatilità sono seguiti da altri simili, presentando quindi eteroschedasticità. A sostegno di questa teoria, il documento tecnico di *J.P Morgan* riporta i rendimenti giornalieri du USD/DEM dal 1993 al 1995 (*fonte: J.P. Morgan and Reuters, RiskMetrics - Technical Document, 1996*[15]).



**Fig. 2.3:** Rendimenti giornalieri USD/DEM dal 1993 al 1995. Fonte: [15].

Inoltre, i rendimenti dovrebbero essere indipendenti ma si osserva empiricamente autocorrelazione nei dati finanziari. Alcuni asset, come le obbligazioni, mostrano rendimenti che dipendono dai valori precedenti. Questa ipotesi, comporta diversi errori anche nel calcolo della volatilità a  $T$  giorni tramite la formula  $\sigma_T = \sigma_G \cdot \sqrt{T}$  che ipotizza indirettamente l'indipendenza dei rendimenti. Quindi si può affermare che la volatilità varia nel tempo, infatti, proprio per questo motivo, sono stati successivamente sviluppati modelli di previsione della volatilità che potessero catturare al meglio tali variazioni, come ad esempio i modelli *GARCH*.

L'ipotesi di correlazione tra asset costante nel tempo è utile perchè semplifica il calcolo del rischio. Durante i periodi di crisi, però, asset che normalmente hanno bassa correlazione iniziano a muoversi insieme. Ad esempio, prima della crisi finanziaria del 2008 si credeva che le correlazioni tra azioni di settori diversi erano relativamente basse, ma il crollo del settore bancario ha contagiato anche settori normalmente meno correlati, come il tecnologico o il manifatturiero. Quindi, il VaR parametrico non tiene conto di questo effetto dinamico, portando a una sottostima del rischio. Inoltre, potrebbe presentarsi l'effetto *Flight-to-Quality*, in

base al quale gli investitori movimentano capitali dagli asset rischiosi verso asset più sicuri modificando le correlazioni tra classi di asset e impattando la validità del VaR.

Infine, l'ipotesi che le variazioni di valore del portafoglio sono lineari risulta valida per strumenti finanziari semplici ma strumenti derivati non hanno dinamiche lineari e quindi si potrebbe sottostimare il rischio legato ai derivati. Da tali limiti nascono i tentativi di superare i problemi connessi all'approccio parametrico sviluppando quindi modelli di simulazione.

## 2.4 Le simulazioni storiche

I modelli di simulazione per la stima del VaR provvedono alla generazione di un gran numero di possibili scenari riguardanti l'andamento futuro dei fattori di mercato. Tali approcci sono meno semplici ma più accurati dell'approccio parametrico anche se presentano dei limiti a loro volta. I modelli di simulazione sono caratterizzati da:

- *Full Valuation*: nell'approccio parametrico, viene utilizzata una stima lineare semplificata delle variazioni di valore degli asset detenuti, i quali erano collegati alle variazioni dei fattori di mercato tramite opportuni coefficienti di sensibilità. I modelli di simulazione ricalcolano il valore del portafoglio in ogni scenario simulato, al fine di garantire stime del VaR più precise, specialmente in presenza di strumenti non lineari come le opzioni.
- *Distribuzione empirica*: Gli approcci di simulazione consentono di costruire direttamente la distribuzione empirica dei rendimenti dei fattori di mercato. In questo modo, il VaR può essere determinato semplicemente identificando il percentile desiderato di questa distribuzione, senza dover ricorrere all'ipotesi di normalità.

- *Maggiore flessibilità*: Possono utilizzare distribuzioni alternative che catturano meglio caratteristiche empiriche dei rendimenti (come code pesanti o asimmetrie). Inoltre, possono considerare scenari personalizzati al fine di effettuare *stress test* realistici, migliorando l'analisi del rischio.

I modelli di simulazione storica assumono che la distribuzione empirica delle variazioni dei fattori di mercato sia stabile nel tempo, permettendo quindi di utilizzarla per la stima dell'andamento futuro. In questo caso, è fondamentale la scelta dell'intervallo temporale da cui attingere ai dati storici per il calcolo del VaR. Generalmente, quando si vuole stimare un VaR giornaliero, si costruisce una distribuzione con almeno un anno di osservazioni (circa 250). In base ai dati storici dei rendimenti dei fattori di mercato, vengono effettuate numerose simulazioni al fine di stimare la possibile evoluzione dei rendimenti dei fattori considerati. Le variazioni di valore stimate vengono ordinate in modo crescente per poi tagliare la distribuzione al percentile scelto con l'intento di eliminare valori estremi. Tale approccio, consente di evitare la stima di variabili come la correlazione o la volatilità, permettendo di superare il limite di instabilità delle variazioni previsto dall'approccio parametrico. Inoltre, l'unica assunzione che viene effettuata è che i rendimenti della distribuzione storica siano sufficienti per stimare le variazioni future ma, se i fattori di mercato non sono distribuiti normalmente e sono stabili nel tempo, tale ipotesi porta a risultati più soddisfacenti del modello delle varianze-covarianze. Infine, effettuando la *Full Valuation*, il modello riesce a stimare anche le variazioni di strumenti più complessi come i derivati<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>A. Resti e A. Sironi, *Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione*, Egea, 2008.[19]

### 2.4.1 La stima del VaR di una posizione

Di seguito viene fornito un esempio per una maggiore comprensione della metodologia utilizzata per l'approccio.

L'obiettivo è quello di calcolare il VaR giornaliero al 99% per un'opzione *call europea su Amazon (AMZN)* al 02/01/2025, utilizzando la metodologia della simulazione storica. Si utilizza un orizzonte temporale di un anno (252 giorni di mercato) per stimare la distribuzione delle variazioni di valore dell'opzione.

- *Stock Price:*  $S_0 = 220$
- *Strike Price:*  $K = 220$
- *Maturity opzione:*  $T = 30\text{giorni} = 0.0822$  anni
- *Volatilità storica annualizzata:*  $\sigma = 28.12\%$
- *Tasso risk-free:*  $r = 2\%$
- *Valore iniziale dell'opzione call:*  $C_0 = 7.50$

I rendimenti giornalieri logaritmici vengono calcolati come nella (2.1), ad esempio:

$$r_1 = \ln(172.50) - \ln(170.00) = 0.0146 = 1.46\%$$

$$r_2 = \ln(171.00) - \ln(172.50) = -0.0087 = -0.87\%$$

Utilizzando i rendimenti storici, vengono simulati 252 possibili prezzi futuri per il 02/01/2025 applicando un tasso *risk-free*:

$$\hat{P} = P_0 \cdot e^{rt}$$

ad esempio:

$$\hat{P} = 220 \cdot e^{-0.0087} = 218.09$$

$$\hat{P} = 220 \cdot e^{0.0146} = 223.21$$

Per ogni prezzo simulato  $\hat{P}$ , calcoliamo il valore dell'opzione call con il modello di Black-Scholes:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

dove:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ad esempio:

$$\hat{C}(218.09) = 6.90, \quad \hat{C}(223.21) = 8.10$$

Si calcola la variazione giornaliera del valore dell'opzione:

$$\Delta C = \hat{C} - C_0$$

ad esempio:

$$\Delta C = 6.90 - 7.50 = -0.60$$

$$\Delta C = 8.10 - 7.50 = +0.60$$

Dato che stiamo calcolando il VaR al 99% e abbiamo 252 osservazioni, il percentile 1% corrisponde alla terza perdita più grande e dunque a  $-4.05$ .

Quindi, il VaR giornaliero al 99% è:

$$VaR_{99\%} = |-4.05| = 4.05$$

Ciò significa che con una probabilità del 99%, la massima perdita giornaliera dell'opzione call su AMZN non supererà \$4.05 per contratto <sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>L'esempio è stato sviluppato tramite un codice *Python* (A.2)

## 2.4.2 I limiti del modello

Come per tutti i modelli di simulazione, il limite principale di tale metodo è determinato dal costo ingente dei calcoli necessari per sviluppare tale approccio. Nell'esempio precedente, si è fatto riferimento ad una singola posizione ma il portafoglio di un intermediario finanziario è molto più strutturato e composto da molte posizioni aperte e da strumenti complessi, quindi pensare di poter stimare ogni giorno un VaR giornaliero diventa sicuramente molto complicato.

Inoltre, questo approccio ipotizza che la distribuzione delle variazioni dei fattori di mercato sia stazionaria, assumendo che le variazioni dei prezzi osservate nel passato siano rappresentative anche per il futuro. Quindi, nel caso in cui la distribuzione empirica risulti eteroschedastica, non sarebbe costante nel tempo e non sarebbe in grado di rappresentare correttamente i rendimenti futuri. Questo problema può nascere quando il mercato subisce cambiamenti strutturali, come nuove normative o crisi finanziarie che rendono i dati storici obsoleti e non più in grado di stimare correttamente il rischio.

Un'altra limitazione è legata al numero finito di scenari disponibili dato che la simulazione storica si basa su un dataset di osservazioni passate, il che significa che il numero di possibili scenari è determinato esclusivamente dal numero di giorni presi in considerazione. Questo comporta una maggiore imprecisione per VaR con livelli di confidenza molto elevati ed inoltre non riuscirebbe a catturare eventi estremi non presenti nei dati storici. D'altro canto, se si scegliesse un periodo troppo lungo, si rischierebbe di includere dati che non riflettono le attuali condizioni del mercato.

Infine, questo metodo assegna lo stesso peso a tutte le osservazioni passate, senza dare maggiore importanza agli eventi più recenti. Questo può portare a una sottostima o sovrastima del rischio in situazioni in cui la volatilità del mercato sta

cambiando rapidamente. Per ovviare a questa rigidità, alcune varianti del metodo, come la simulazione storica ponderata esponenzialmente (EWMA), attribuiscono un peso maggiore ai dati più recenti, migliorando la capacità di adattamento alle nuove condizioni di mercato.

### 2.4.3 *The Hybrid Approach*

Jacob Boudoukh, Matthew Richardson e Robert Whitelaw, con l'intento di creare un modello che possa superare i limiti sia dell'approccio parametrico sia del modello di simulazione storica, hanno sviluppato il cosiddetto *Hybrid Approach*, un approccio che combina i due precedenti. Come pubblicato nel loro paper del 1998 "*The best of both worlds*" [4], l'approccio ibrido inizia con l'ordinare i rendimenti sul periodo di osservazione, proprio come le simulazioni storiche. Mentre il modello precedente attribuisce pesi uguali a ciascuna osservazione nella costruzione della distribuzione empirica, l'approccio ibrido attribuisce pesi esponenzialmente decrescenti ai rendimenti storici. Quindi, se nell'approccio delle simulazioni storiche calcolare il VaR al 99%, usando 1 anno di rendimenti giornalieri, significava identificare la terza osservazione più bassa, nell'approccio ibrido il numero di osservazioni dipenderà dal fatto che i rendimenti più bassi siano recenti o più nel passato. Gli autori analizzano l'affidabilità delle stime dei modelli VaR considerando tre caratteristiche:

- *unbiasedness*: una stima ottimale del VaR dovrebbe coincidere con la coda al livello di confidenza prefissato, quindi la stima del VaR dovrebbe corrispondere alla perdita attesa;
- *indipendenza delle violazioni*: le violazioni, quindi le perdite che superano quelle stimate dal VaR, non devono essere concentrate (*bunching*) ma devono essere distribuite nel tempo;

- *Mean Absolute Percentage Error (MAPE)*: è un indicatore che confronta, per un determinato periodo, il numero di violazioni attese con quelle effettivamente registrate. In questo caso, è preferibile avere valori più bassi di questo indice, poichè significa avere una stima migliore.

L'analisi empirica è condotta su un campione analizzato nel periodo che va dal 1 gennaio 1991 al 5 dicembre 1997 considerando:

- DEM: tasso di cambio Dollaro/Marco Tedesco;
- OIL: prezzo spot del petrolio greggio *Brent*;
- S&P: indice azionario S&P 500;
- BRD: indice obbligazionario *Brady (JP Morgan Brady Broad Index)*.

Vengono costruiti due portafogli, uno equamente ponderato delle quattro serie di rendimenti (*EQW*) ed uno pari alla media delle statistiche sugli eventi di coda per le quattro serie (*AVG*). Il primo consente di valutare il comportamento dei metodi di stima del VaR in presenza di una parziale diversificazione degli eventi di coda. La serie AVG, invece, permette di ampliare la numerosità campionaria (6656 osservazioni), fornendo statistiche più affidabili grazie all'incremento dell'osservazione aggregata. L'analisi viene condotta su una finestra temporale di 250 giorni di negoziazione. Lo studio mostra un significativo miglioramento della precisione delle stime attraverso l'approccio ibrido, rispetto ai metodi tradizionali. In particolare, per il VaR al 99%, il *MAPE* dell'approccio ibrido è inferiore del 30%-43% rispetto all'approccio parametrico e di circa il 14%-28% rispetto alla simulazione storica. L'approccio ibrido si dimostra particolarmente efficace nel trattamento delle serie con code pesanti, come il prezzo del petrolio e l'indice obbligazionario Brady. Il test di indipendenza mostra che l'autocorrelazione degli eventi di coda è più bassa per l'approccio ibrido rispetto agli altri metodi, indicando una migliore capacità

di adattamento ai cambiamenti nelle condizioni di mercato (*fonte: J. Boudoukh, M. Richardson e R. Whitelaw, The best of both worlds, 1998*).

#### 2.4.4 *VaR without correlations*

Uno studio finalizzato al superamento dei limiti della simulazione storica è fornito da Giovanni Barone-Adesi, Kostas Giannopoulos e Les Vosper in "Var without correlations for portfolios of derivative securities", nel 1999 [2]. In questo paragrafo, verrà trattato l'approccio sviluppato dagli autori per superare l'assunzione secondo cui la simulazione storica considera tutti gli scenari passati con la stessa probabilità (ipotesi appropriata solo se i rendimenti sono i.i.d.) che però non viene rilevata empiricamente, date le variazioni della volatilità nel tempo.

In questo approccio, non è imposta alcuna distribuzione teorica ma viene utilizzata la distribuzione storica dei rendimenti, adattata alle condizioni di mercato attuali, attraverso una riscalfatura dei rendimenti residui in funzione della volatilità attuale, tramite il modello *GARCH*. Viene utilizzato un modello ARMA-GARCH(1,1):

$$\begin{aligned} r_t &= \lambda r_{t-1} + h_t e_t, \quad e_t \sim N(0, h_t) \\ h_t &= \chi(e_{t-1}^2 - c) + \beta h_{t-1} \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  rappresenta il coefficiente del termine AR(1),  $h$  la volatilità condizionale,  $\chi$  e  $\beta$  sono delle costanti e  $e_t$  è il residuo.

Questo residuo viene standardizzato dividendo il residuo stimato  $\hat{e}_t$  per la corrispondente stima della volatilità giornaliera  $\hat{h}_t$ :

$$e_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\hat{h}_t}$$

Questo approccio non utilizza esplicitamente le correlazioni tra gli asset ma vengono estratti parti della distribuzione dei rendimenti storici, preservando in modo

implicito la correlazione tra gli asset. Per la simulazione di un percorso di rendimenti futuri, vengono selezionati casualmente "i" giorni di rendimenti storici  $e^*$  da un dataset  $H$ :

$$e^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_T^*\}, \quad e_i^* \in H, \quad i = 1, \dots, 10 \text{ giorni}$$

Per ottenere il valore previsto dell'innovazione (simulata) per il periodo successivo, viene estratto un residuo standardizzato casuale dal set di dati  $H$  e viene scalato con la volatilità del periodo successivo:

$$z_{t+1}^* = e_1^* \cdot h_{t+1}$$

Il prezzo simulato nel periodo successivo è dato da:

$$p_{t+1}^* = p_t + p_t(\lambda r_t + h_t z_{t+1}^*)$$

L'utilizzo del GARCH nella simulazione storica migliora la reattività del VaR alle variazioni di volatilità ed evita la necessità di ricalibrare continuamente la matrice di covarianza, riducendo il rischio di ottenere stime incoerenti in condizioni di shock di mercato. La metodologia porta a una valutazione rapida del VaR perchè richiede semplicemente che una simulazione storica venga eseguita ogni giorno attraverso un filtro preimpostato per le serie temporali. L'affidabilità della valutazione dipende dalla qualità dei filtri utilizzati, quindi è necessario verificare l'adeguatezza di un filtro tramite il backtesting. Infine, grazie alla sua natura semi-parametrica, l'approccio proposto mantiene la flessibilità della simulazione storica senza dover imporre ipotesi rigide sulla distribuzione dei rendimenti.

*(fonte: G. Barone-Adesi, K. Giannopoulos e L. Vosper, Var without correlations for portfolios of derivative securities, Journal of Futures Markets, 1999).*

## 2.5 Il metodo Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo è stato ideato da *Stanislaw Ulam e John Von Neumann* negli anni '40 mentre erano impegnati nel progetto Manhattan per la costruzione della bomba atomica.

Il metodo nasce da un'intuizione di *Ulam* che, intento a giocare ad un solitario, pensò: "quali sono le probabilità che un solitario *Canfield*, disposto con 52 carte, vada a buon fine?". Da qui, il fisico decise di ripetere il gioco cento volte e contare il numero di partite vinte. Il campionamento statistico era già noto all'epoca ma *Ulam* pensò di utilizzare tale tecnica, attraverso dei calcolatori informatici, per risolvere problemi di diffusione neutronica. Ai due studiosi l'approccio sembrò particolarmente adatto per esplorare il comportamento delle reazioni a catena dei neutroni nei dispositivi a fissione. In particolare, si potevano stimare i tassi di moltiplicazione dei neutroni e usarli per prevedere il comportamento esplosivo delle varie armi nucleari allora in fase di progettazione<sup>8</sup>.

Tale modello viene dapprima utilizzato in finanza per il *pricing* dei prodotti derivati e solo negli anni '80 viene applicato al *risk management*. In questo ambito, si identifica la variabile aleatoria che si vuole analizzare (ad esempio, il rendimento di un titolo) e si assume che questa segua una distribuzione di probabilità predeterminata (generalmente, viene utilizzata una distribuzione normale). Successivamente, vengono generati un gran numero di scenari indipendenti, ognuno rappresentante una possibile evoluzione della variabile. Come avviene per la simulazione storica, ad ogni scenario viene ricalcolato il valore di mercato del portafoglio perchè ad ogni simulazione cambieranno i valori delle variabili input. Quindi, si avrà come output la distribuzione dei possibili valori futuri della variabile, che verrà "tagliata"

---

<sup>8</sup>R. Eckhardt, Stan ulam, John Von Neumann, and the Monte Carlo method, Los Alamos Science Special Issue (1987).

al percentile richiesto al fine di calcolare il VaR. Risulta evidente come il metodo Monte Carlo sia basato sulla *Legge dei grandi numeri (A.1)*, per cui all'aumentare del numero di simulazioni indipendenti, la media dei risultati convergerà al valore atteso della variabile casuale considerata. Il metodo trova fondamento anche nel *Teorema del limite centrale (A.2)*, per il quale la somma di una successione di variabili aleatorie i.i.d. converge ad una normale.

Prima di procedere all'applicazione del Monte Carlo per il calcolo del VaR, vengono approfondite le caratteristiche e il processo di tale metodo.

### 2.5.1 La generazione di numeri casuali

Il primo passo del modello è quello di generare dei numeri casuali che verranno utilizzati per la simulazione ma, in realtà, vengono utilizzati dei numeri cosiddetti pseudo-casuali. Questi numeri sono prodotti da algoritmi deterministici e quindi, anche se imitano a pieno il comportamento dei numeri casuali, non c'è una vera e propria casualità, dato che vengono generati in un insieme finito e quindi dopo un certo numero di iterazioni la sequenza inizia a ripetersi.

Un generatore di numeri pseudo-casuali è composto da:

- Un insieme finito  $X$ ;
- Un elemento iniziale  $x_0 \in X$ , detto *seme*;
- Una funzione di transizione  $T : X \rightarrow X$ ;
- Una funzione di uscita  $G : X \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$ , che produce il numero pseudo-casuale.

Quindi, dato un seme  $x_0$ , viene generata una sequenza  $x_1, x_2, \dots$ , calcolata ricorsivamente tramite una funzione di transizione:

$$x_j = T(x_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Successivamente, ogni  $x$  viene trasformata in un numero pseudo-casuale  $i_j$  mediante una funzione di uscita:

$$i_j = G(x_j)$$

La sequenza di numeri  $i_j$  è periodica perchè, dato che l'insieme  $X$  è finito, esisteranno due indici  $l \neq h$  tali che  $x_l = x_h$ . Quindi,  $T(x_l) = T(x_h)$ , da cui si deduce che la sequenza è periodica. Ciò dimostra la possibilità di prevedere, almeno in teoria, i numeri generati dall'algoritmo ma, nella pratica, è molto difficile, poichè la quantità di numeri generati e la lunghezza del periodo rendono l'analisi impraticabile. Un affidabile generatore di numeri casuali soddisfa le seguenti condizioni:

- *Uniformità statistica*: la sequenza generata non deve poter essere facilmente distinta da un campionamento realmente casuale.
- *Velocità*: il generatore deve essere abbastanza veloce da non rallentare la simulazione dato che, in molte applicazioni, è necessario generare un numero elevatissimo di valori casuali.
- *Lunghezza del periodo*: trattandosi di una sequenza periodica, il periodo deve essere sufficientemente lungo da non influenzare negativamente i risultati in applicazioni estese.
- *Riproducibilità*: è importante che la sequenza generata sia riproducibile, ad esempio per fini di debugging o test.
- *Portabilità*: il generatore dovrebbe essere compatibile con diversi sistemi informatici e restituire la stessa successione su tutte le piattaforme<sup>9</sup>.

Una volta generate delle variabili uniformi, è necessario trasformarle in variabili non uniformi, al fine di ricondurle alla distribuzione scelta in partenza (di solito,

---

<sup>9</sup>Valerio Marchisio, Computational tools for finance, 2023, Lecture notes[17]

una distribuzione normale). Per farlo è possibile utilizzare diversi algoritmi; in questa sede ne verranno presentati due: l'*Acceptance-Rejection method* e il *Box-Muller Algorithm*.

## 2.5.2 Acceptance-Rejection method

Sia  $X$  una variabile casuale con densità  $f(\cdot)$  e funzione di distribuzione cumulativa  $F_X(\cdot)$ . Si supponga che sia difficile simulare direttamente un valore di  $X$  e quindi si considera un'altra variabile casuale  $Y$  con densità  $g(\cdot)$ , dalla quale sia semplice generare campioni. Se esiste una costante  $a \geq 1$  tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq a \quad \text{per ogni } x,$$

allora sarà possibile simulare un valore di  $X$  seguendo il seguente algoritmo:

1. Genera un valore  $Y$  secondo la densità  $g(\cdot)$ .
2. Genera un numero  $U$  distribuito uniformemente in  $[0, 1]$ .
3. Se  $U \leq \frac{f(Y)}{a \cdot g(Y)}$ , accetta  $Y$ .
4. Se  $U > \frac{f(Y)}{a \cdot g(Y)}$ , riparti dallo *step 1*.

Per dimostrare che questo algoritmo funziona correttamente, viene definita  $B$  come l'evento in cui il valore  $Y$  è stato accettato.

Si vuole dimostrare che  $\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$ . Viene osservato innanzitutto che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(Y \leq x \mid B) \\ &= \frac{\mathbb{P}((Y \leq x) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si può quindi calcolare il denominatore  $\mathbb{P}(B)$  come:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(Y)}{ag(Y)}\right) = \frac{1}{a}$$

Mentre, il numeratore in (2.7) soddisfa:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((Y \leq x) \cap B) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}((Y \leq x) \cap B \mid Y = y) g(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left((Y \leq x) \cap \left(U \leq \frac{f(Y)}{ag(Y)}\right) \mid Y = y\right) g(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^x \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(y)}{ag(y)}\right) g(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{ag(y)} \cdot g(y) dy \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x f(y) dy \\
 &= \frac{F_X(x)}{a}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{\mathbb{P}((Y \leq x) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{F_X(x)/a}{1/a} = F_X(x)$$

Come volevasi dimostrare<sup>10</sup>.

### 2.5.3 The Box-Muller Algorithm

Questo algoritmo utilizza due variabili casuali  $U_1$  e  $U_2$  indipendenti ed uniformemente distribuite su  $(0, 1)$ , per generare due variabili indipendenti  $N(0, 1)$ :

- Genera due variabili indipendenti uniformi  $U_1$  e  $U_2$ )
- Pone:  $X = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$ ,  $Y = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2)$

Si vuole dimostrare che  $X$  e  $Y$  sono due variabili casuali indipendenti con distribuzione normale standard. Passaggio al sistema di coordinate polari:

$$R := \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \theta := \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

---

<sup>10</sup>Martin Haugh, Generating random variables and stochastic processes, 2017, Lecture Notes, IEOR E4703: Monte Carlo Simulation, Columbia University[12].

allora  $R$  e  $\theta$  sono le coordinate polari del vettore  $(X, Y)$ . Si può scrivere la trasformazione inversa come:

$$X = R \cos(\theta), \quad Y = R \sin(\theta)$$

Dall'algoritmo:

$$R = \sqrt{-2 \log(U_1)}, \quad \theta = 2\pi U_2$$

poichè  $U_1$  e  $U_2$  sono indipendenti, anche  $R$  e  $\theta$  lo sono. Inoltre:

$$\theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \Rightarrow f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

La densità di  $R$  è:

$$f_R(r) = r e^{-r^2/2}, \quad r \geq 0$$

quindi la densità congiunta in coordinate polari è:

$$f_{R,\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \geq 0$$

Per dimostrare la distribuzione congiunta, viene calcolato:

$$\mathbb{P}(X \leq x_1, Y \leq y_1) = \mathbb{P}(R \cos(\theta) \leq x_1, R \sin(\theta) \leq y_1)$$

Usando la formula del cambio di variabili (con Jacobiano  $r$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x_1, Y \leq y_1) &= \iint_A \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r^*(\theta)} r e^{-r^2/2} dr d\theta \end{aligned}$$

dove  $A = \{(r, \theta) : r \cos(\theta) \leq x_1, r \sin(\theta) \leq y_1\}$  rappresenta il dominio in coordinate polari. Passando di nuovo alle coordinate cartesiane:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

Infine:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x_1, Y \leq y_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y_1} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2/2} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_1} e^{-y^2/2} dy\end{aligned}$$

Questo mostra che  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , e sono indipendenti<sup>11</sup>.

## 2.5.4 Simulazione dei rendimenti e calcolo del valore del portafoglio simulato

Una volta generate le variabili uniformi pseudo-casuali, trasformate successivamente in variabili non uniformi per adattarle alla distribuzione predeterminata, si procede alla simulazione dei rendimenti delle attività finanziarie detenute in portafoglio. La simulazione è basata sulla scelta di un modello stocastico che descriva l'andamento del prezzo di mercato dell'attività, il più utilizzato per gli strumenti finanziari è il *Moto Browniano Geometrico*, il quale rappresenta un processo stocastico continuo.

Il moto browniano geometrico viene descritto tramite l'equazione differenziale stocastica (SDE):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove:

- $S_t$  rappresenta il prezzo del titolo al tempo  $t$ ;
- $\mu$  è il rendimento atteso del titolo;
- $\sigma$  è la volatilità;

---

<sup>11</sup>Martin Haugh, Generating random variables and stochastic processes, 2017, Lecture Notes, IEOR E4703: Monte Carlo Simulation, Columbia University[12].

- $dW_t$  è un incremento del moto browniano standard, che introduce la componente aleatoria.

Si può notare come sia contenuta una parte deterministica ( $\mu S_t dt$ ) ed una stocastica ( $\sigma S_t dW_t$ ), che rappresentano l'incertezza dei mercati finanziari. Risolvendo tale equazione, si ottiene che i prezzi siano distribuiti secondo una log-normale:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

dove  $S_0$  è il prezzo iniziale,  $S_T$  quello finale al tempo  $T$  e la variabile aleatoria è generata a partire da una distribuzione normale standard  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Da qui deriva la formula che permette di simulare il valore futuro del prezzo:

$$S_T = S_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right]$$

Ora bisogna suddividere l'intervallo temporale in intervalli discreti di ampiezza  $\Delta t$  per permettere la simulazione di prezzi per ogni passo temporale:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right]$$

Una volta simulati i prezzi, verranno calcolati i rendimenti logaritmici e costruita la distribuzione dei rendimenti. Per ogni scenario, si ottiene il valore simulato del portafoglio.

Se si considera un portafoglio iniziale di valore  $V_0$ , il valore simulato al tempo  $T$  nello scenario  $i$  sarà:

$$V_T^{(i)} = V_0 \cdot e^{R^{(i)}}$$

dove  $R^{(i)}$  è il rendimento simulato nello scenario  $i$ .

Nel caso di un portafoglio diversificato, vengono simulati i rendimenti di ciascun asset in modo indipendente e poi, per far valere l'effetto correlazione, vengono trasformati tramite *decomposizione di Cholesky* nella matrice di covarianza  $\Sigma$ , ottenendo un nuovo vettore di rendimenti simulati correlati. Il rendimento simulato

complessivo del portafoglio si calcola poi come media ponderata:

$$R_{\text{portafoglio}}^{(i)} = \sum_{j=1}^n w_j \cdot R_j^{(i)}$$

dove  $w_j$  rappresenta l'investimento iniziale nell'asset  $j$ , e  $R_j^{(i)}$  è il rendimento simulato del medesimo asset nello scenario  $i$ . Infine, per ogni scenario simulato, si ottiene la *perdita* del portafoglio rispetto al valore iniziale:

$$L^{(i)} = V_0 - V_T^{(i)}$$

Ripetendo questa simulazione per un numero elevato di iterazioni (tipicamente 10.000), si ottiene una distribuzione empirica delle perdite, che costituisce la base per la stima del Value at Risk secondo l'approccio Monte Carlo (*fonte: JC Hull, E. Barone, et al., Opzioni, futures e altri derivati, Pearson, 2009.[13]*).

### 2.5.5 Esempio di applicazione del metodo Monte Carlo

Al fine di comprendere al meglio il funzionamento del metodo Monte Carlo per il calcolo del VaR, si analizza l'esempio riportato anche per il calcolo del VaR parametrico (2.3.3). Si considera un investitore che detiene un portafoglio composto da una sola azione Amazon (AMZN), il cui prezzo di mercato al 2 Gennaio 2025 è pari a  $S_0 = 220,22$ . Si vuole stimare il VaR giornaliero al 99% tramite simulazione Monte Carlo. Partendo dalla serie storica giornaliera dei prezzi del titolo AMZN, vengono calcolati i rendimenti logaritmici, dai quali è possibile ottenere media ( $\mu$ ) e deviazione standard ( $\sigma$ ):

$$\mu = 0,00153, \quad \sigma = 0,01768$$

Questi parametri rappresentano rispettivamente il rendimento atteso giornaliero e la volatilità storica giornaliera del titolo.

Viene assunto che i rendimenti giornalieri siano distribuiti secondo una variabile normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  e si simulano 10.000 possibili scenari futuri secondo il seguente modello stocastico:

$$R^{(i)} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

dove  $\Delta t = 1$  giorno.

Per ciascuno dei 10.000 scenari generati, si calcola il prezzo simulato della singola azione secondo la formula del moto browniano geometrico:

$$S_T^{(i)} = S_0 \cdot \exp(R^{(i)})$$

dove  $S_0 = 220,22$  è il valore corrente del titolo.

Quindi, la perdita nello scenario  $i$ -esimo è data dalla differenza tra il valore attuale dell'azione e il valore simulato:

$$L^{(i)} = S_0 - S_T^{(i)}$$

La distribuzione delle perdite rappresenta la stima empirica delle perdite potenziali in un giorno.

Il VaR al 99% è ottenuto come il primo percentile della distribuzione simulata delle perdite:

$$\text{VaR}_{99\%} = \text{Percentile}_{1\%}(L)$$

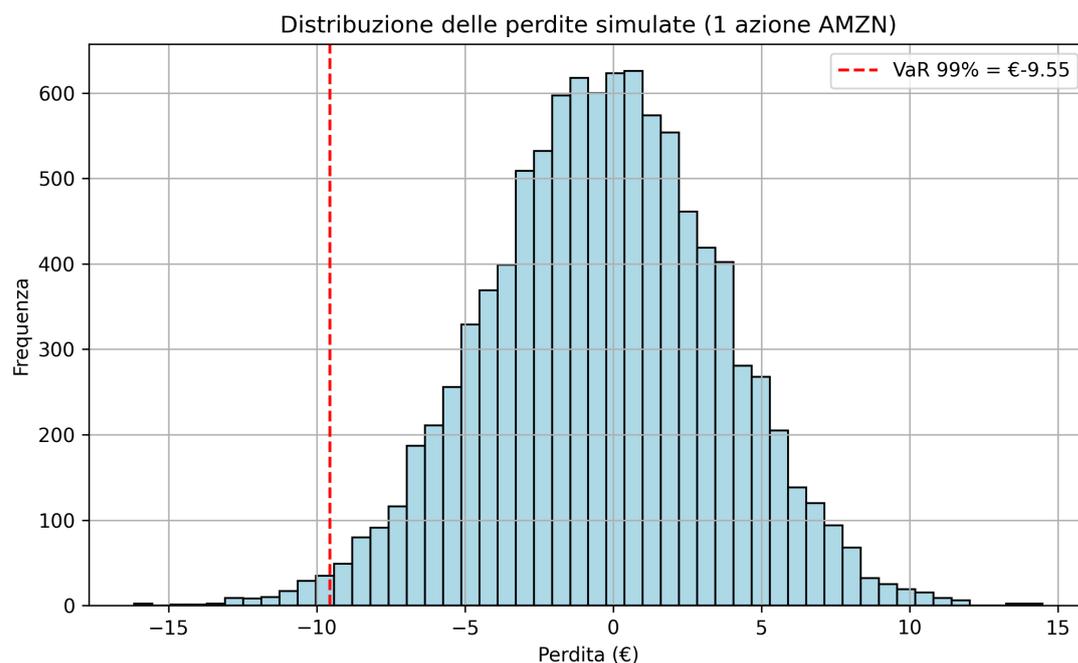
Nel caso specifico, si ottiene:

$$\text{VaR}_{99\%} = 9,55$$

Il che significa che, con una probabilità del 99%, la perdita massima giornaliera sulla singola azione AMZN non supererà \$9,55. Come si può notare, questa perdita potenziale è diversa rispetto a quella stimata con il metodo parametrico, nel prossimo capitolo, infatti, verranno confrontati i tre approcci per verificare quale conduce ad una stima migliore<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>L'esempio è stato sviluppato tramite un codice Python (A.3)



**Fig. 2.4:** Distribuzione delle perdite simulate su una sola azione AMZN (Simulazione Monte Carlo, livello di confidenza 99%)

## 2.5.6 I limiti del modello

Il metodo Monte Carlo presenta una serie di vantaggi propri dei modelli di simulazione come la flessibilità e la *full valuation*, inoltre permette anche di generare traiettorie al fine di descrivere non solo il valore finale del fattore di mercato ma anche tutto l'andamento di quest'ultimo; come ogni metodo, però, presenta anche diversi limiti.

Generalmente, il metodo Monte Carlo assume che i rendimenti siano normalmente distribuiti e che seguano un processo stocastico come il moto browniano geometrico. Come visto nell'approccio parametrico, l'utilizzo della normale standard per simulare rendimenti può condurre ad una sottostima del rischio, soprattutto negli scenari di coda (*tail events*), i quali sono invece quelli più rilevanti per

la misurazione del VaR.

Inoltre, si assume generalmente che i parametri stimati (media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ ) siano stazionari, ma in realtà la volatilità dei rendimenti varia nel tempo, spesso in modo improvviso e persistente. Questa assunzione di costanza di  $\mu$  e  $\sigma$  nel metodo Monte Carlo classico costituisce una semplificazione forte che ne limita l'affidabilità in contesti di alta turbolenza di mercato.

Un ulteriore limite è rappresentato dall'assunzione di indipendenza seriale dei rendimenti, dato che i mercati mostrano autocorrelazioni non trascurabili, soprattutto a frequenze elevate (*intradaily*), che non verrebbero catturate dalla simulazione.

Un altro aspetto, proprio del metodo Monte Carlo, riguarda il suo elevato costo computazionale, poichè la qualità della stima ottenuta dipende dal numero di scenari generati: affinché il risultato sia statisticamente stabile, è spesso necessario simulare decine di migliaia di traiettorie. Tuttavia, la convergenza è lenta, in quanto l'errore standard della stima si riduce in modo inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero di simulazioni. Questo significa che, per dimezzare l'errore, sarà necessario quadruplicare il numero di simulazioni, con un conseguente aumento del tempo di calcolo. Nei portafogli complessi o in ambienti con risorse computazionali limitate, ciò può rappresentare un ostacolo significativo all'applicabilità pratica del metodo<sup>13</sup>.

Alla luce di quanto esposto, il metodo Monte Carlo è particolarmente efficace quando si lavora con strumenti derivati complessi o distribuzioni non lineari, ma risulta meno utile in contesti in cui le ipotesi semplificative non sono sostenibili.

Per queste ragioni, molti analisti preferiscono combinare il Monte Carlo con altre tecniche di misurazione del rischio (VaR parametrico, simulazione storica,

---

<sup>13</sup>A. Resti e A. Sironi, Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione, Egea, 2008 [19].

*expected shortfall*) per ottenere una visione più completa e robusta. Inoltre, come verrà mostrato successivamente, potrebbe essere utile cambiare le ipotesi sulle quali si poggia questo metodo al fine di superarne i limiti.

## Capitolo 3

# Analisi dei modelli *Value at Risk* su un portafoglio eterogeneo

I modelli per il calcolo del VaR approfonditi nel capitolo precedente si basano su assunzioni e metodologie di calcolo differenti. Proprio per questo motivo, le stime possono risultare sensibilmente diverse tra loro, quindi c'è la necessità di valutare quale metodo possa risultare più appropriato. In questo capitolo si affronta il *testing* dei modelli VaR applicati a un portafoglio eterogeneo con l'obiettivo di valutarne accuratezza ed efficacia. L'analisi si concentra sui seguenti aspetti fondamentali:

- La *stima del VaR di un portafoglio eterogeneo* attraverso i modelli tradizionali: metodi parametrici e approcci di simulazione;
- La validazione dei modelli mediante il *test di Kupiec*, utile a verificare se il numero di violazioni risulti coerente con il livello di confidenza prefissato;
- Il *test di Christoffersen*, attraverso il quale è possibile valutare l'indipendenza temporale delle violazioni, al fine di verificare la corretta distribuzione degli errori di stima nel tempo;

- Il calcolo della *media delle perdite eccedenti il VaR*, al fine di valutare non solo la frequenza, ma anche la gravità delle perdite oltre la soglia di rischio prevista.

In particolare, l'obiettivo è stimare il VaR giornaliero con un intervallo di confidenza pari al 99%, in linea con quanto previsto per le istituzioni finanziarie dagli *Accordi di Basilea* e con quanto evidenziato nel *Regolamento UE n. 575/2013 (CRR)*.

### 3.1 Test di validazione dei modelli VaR

In questa sezione, viene approfondita la valutazione empirica dei modelli VaR, basata sull'impiego di specifici test statistici. La bontà delle stime dei modelli VaR dipende dalla loro capacità di stimare correttamente la distribuzione delle perdite, in particolare nelle code. A tal fine, è fondamentale eseguire un processo di *backtesting*, ovvero la verifica *ex post* del modello, attraverso il confronto tra le stime del VaR e la distribuzione empirica delle perdite.

I test di validazione permettono di determinare se il numero e la distribuzione delle violazioni (ossia le osservazioni in cui la perdita effettiva supera il VaR stimato) siano coerenti con quanto previsto.

Esistono diverse tipologie di test che effettuano una verifica retrospettiva, in questa analisi saranno utilizzati:

- *Test di copertura incondizionata (unconditional coverage)*, che verifica se la frequenza delle violazioni è coerente con il livello di confidenza scelto;
- *Test di indipendenza*, che valuta se le violazioni sono distribuite nel tempo in modo casuale, senza *pattern sistematici*;

- *Test di copertura condizionata (conditional coverage)*, che combinando le due valutazioni precedenti, offre un'analisi più completa del comportamento del modello.

### 3.1.1 *Test di Kupiec*

Come riportato in *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*[16] da P.H. Kupiec, prima di sviluppare il modello dell'*Unconditional Coverage*, l'autore si è focalizzato sull'elaborazione di un altro test, il cosiddetto *Time Until First Failure test*.

#### **TUFF test**

Il test effettua un conteggio dei giorni antecedenti al verificarsi della prima violazione del VaR. Quindi, se il modello è corretto, le violazioni si presenteranno con una frequenza coerente con il livello di confidenza previsto. Il test assume come ipotesi nulla che, se il modello è valido e le osservazioni sono indipendenti, il tempo ( $T$ ) alla prima violazione segue una distribuzione geometrica con probabilità di successo  $p$ , dove  $p = \alpha$ , cioè la probabilità di violazione (ad esempio,  $\alpha = 0,01$  per un VaR con livello di confidenza del 99%). La funzione di probabilità sarà dunque:

$$\mathbb{P}(T = v) = p(1 - p)^{v-1}$$

il cui valore atteso sarà pari a  $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p}$ .

Ciò significa che, per un VaR al 99%, il primo fallimento dovrebbe statisticamente avvenire circa al 100° giorno.

Al fine di verificare la bontà del modello, viene proposto un test di verosimiglianza che confronta la probabilità teorica  $p^*$  con la probabilità stimata  $\hat{p} = \frac{1}{T}$ .

La statistica del test è definita come:

$$LR(T, p^*) = -2 \ln [p^*(1 - p^*)^{T-1}] + 2 \ln \left[ \frac{1}{T} \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{T-1} \right]$$

Sotto l'ipotesi nulla, la statistica  $LR$  si distribuisce secondo una *chi-quadro* con 1 grado di libertà. Al fine di decidere se rigettare o meno l'ipotesi, la statistica viene confrontata con i valori critici della distribuzione.

Ad esempio, con un livello di significatività dell'1%, il valore critico di una *chi-quadro* è pari a 6,635: se  $LR > 6,635$ , viene rigettata l'ipotesi nulla e quindi il modello non risulta coerente con la frequenza attesa di violazioni.

Tuttavia, il test TUFF presenta il limite di utilizzare solo la prima violazione osservata, ignorando il comportamento successivo del modello. Da ciò deriva una limitata capacità discriminante, dato che il test può accettare un modello errato o non identificare un'eventuale sottostima del rischio. Per ovviare a questo limite, lo stesso Kupiec suggerisce di integrare il test TUFF con un'analisi basata sulla valutazione complessiva dei fallimenti osservati<sup>1</sup>.

### Unconditional Coverage Test

Questo test si pone come obiettivo di verificare se la frequenza delle violazioni osservate è coerente con il livello di confidenza scelto. Supponendo che le violazioni siano indipendenti e con probabilità costante  $p = 1 - \text{confidenza}$ , il numero totale di violazioni in un campione di  $n$  osservazioni segue una distribuzione binomiale.

Il test confronta la proporzione empirica di violazioni  $\hat{p} = \frac{x}{n}$  con la probabilità teorica  $p^*$ , mediante una statistica di verosimiglianza:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{(1 - p^*)^{n-x} \cdot (p^*)^x}{(1 - \hat{p})^{n-x} \cdot \hat{p}^x} \right]$$

---

<sup>1</sup>Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, P.H. Kupiec, *The Journal of Derivatives*, 1995[16]

dove:

- $n$  è il numero totale di osservazioni;
- $x$  è il numero di violazioni osservate;
- $p^*$  è la probabilità di violazione attesa;
- $\hat{p}$  è la frequenza empirica delle violazioni.

La statistica  $LR_{uc}$  è asintoticamente distribuita secondo una *chi-quadro* con 1 grado di libertà. Confrontando il valore calcolato con i valori critici della distribuzione, si può decidere se rigettare l'ipotesi nulla secondo cui il modello produce violazioni in linea con la probabilità teorica.

Ad esempio, supponiamo di avere  $n = 250$  giorni di osservazioni (1 anno) e che si siano verificate  $x = 10$  violazioni. La frequenza empirica è  $\hat{p} = 0,04$ , mentre la probabilità attesa secondo il modello è  $p^* = 0,01$  (VaR al 99%). Calcolando la statistica  $LR_{uc}$  e confrontandola con il valore critico della distribuzione  $\chi^2(1)$ , è possibile determinare la validità del modello. Al livello di significatività del 99%, il valore critico è pari a 6,635, mentre dall'esempio  $LR_{uc} = 12,96$ , quindi viene rigettata l'ipotesi nulla ed il modello non risulta coerente con la frequenza attesa di violazioni.

Il *test di Kupiec* presenta il vantaggio di essere semplice da implementare e facilmente interpretabile, ed è riconosciuto come lo standard di riferimento per la validazione della copertura incondizionata di modelli VaR, anche in ambito regolamentare (es. Basilea II e III). Tuttavia, esso non considera la distribuzione temporale delle violazioni e quindi non rileva eventuali fenomeni di clustering. Per questa ragione, viene spesso affiancato al test di indipendenza di Christoffersen,

il quale analizza la sequenzialità delle violazioni. L'uso combinato dei due test costituisce il cosiddetto *Conditional Coverage Test*<sup>2</sup>.

### 3.1.2 *Conditional Coverage Test*

Un modello VaR affidabile non deve soltanto generare una frequenza di violazioni coerente con il livello di confidenza dichiarato, ma anche garantire che tali violazioni siano distribuite nel tempo in maniera indipendente. Il test di indipendenza proposto da Christoffersen, consente di verificare proprio questa seconda condizione, analizzando la struttura sequenziale delle violazioni tramite un modello markoviano di primo ordine.

Si consideri la sequenza binaria  $\{I_t\}$ , in cui  $I_t = 1$  se si verifica una violazione al tempo  $t$ ,  $I_t = 0$  altrimenti. Si definisce la seguente matrice di transizione:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

dove  $\pi_{ij} = \mathbb{P}(I_t = j \mid I_{t-1} = i)$  rappresenta la probabilità condizionata di osservare una violazione (o una non violazione) al tempo  $t$ , dato lo stato al tempo  $t - 1$ .

La funzione di verosimiglianza associata a questa catena di Markov, per una sequenza di  $N$  osservazioni, è pari a:

$$L(\Pi) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}$$

dove  $n_{ij}$  è il numero di volte in cui si osserva una transizione da  $i$  a  $j$ .

I massimi stimatori di verosimiglianza sono:

$$\hat{\pi}_{00} = \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}}, \quad \hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \quad \hat{\pi}_{10} = \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}}, \quad \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

---

<sup>2</sup>Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, P.H. Kupiec, *The Journal of Derivatives*, 1995[16]

Per testare l'ipotesi di indipendenza, si assume che la probabilità di violazione in un determinato giorno sia indipendente da quello precedente.

In tal caso, la matrice di transizione semplifica in:

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix}$$

La funzione di verosimiglianza sotto l'ipotesi nulla di indipendenza diventa:

$$L(\Pi_2) = (1 - \pi_2)^{n_{00} + n_{10}} \pi_2^{n_{01} + n_{11}}$$

dove lo stimatore di  $\pi_2$  è:

$$\hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

La statistica di verosimiglianza è quindi definita come:

$$LR_{\text{ind}} = -2 \ln \left( \frac{L(\Pi_2)}{L(\Pi)} \right)$$

che, sotto l'ipotesi nulla, è asintoticamente distribuita secondo una  $\chi^2$  con 1 grado di libertà.

Se  $LR_{\text{ind}}$  supera il valore critico corrispondente al livello di confidenza desiderato, si rigetta l'ipotesi nulla di indipendenza. Ad esempio, ad un livello pari a 1%, se:

$$LR_{\text{ind}} > 6,635$$

esiste dipendenza seriale tra le violazioni, ovvero tendono a ripetersi in maniera sistematica dopo che se ne presenta una.

Questo test non considera la frequenza complessiva delle violazioni (trattata dal *test di Kupiec*), ma ne valuta esclusivamente la struttura dinamica. Per questo motivo, il *test di Christoffersen* è spesso utilizzato congiuntamente a quello di

Kupiec per fornire una valutazione più completa delle performance del modello VaR: il *Conditional Coverage test*.<sup>3</sup>.

Dopo aver valutato separatamente la correttezza della frequenza delle violazioni tramite il *test di Kupiec* (copertura incondizionata) e l'indipendenza seriale delle violazioni tramite il *test di indipendenza di Christoffersen*, è possibile combinare le due componenti in un unico test congiunto: il *Conditional Coverage Test*.

Tale test ha l'obiettivo di verificare contemporaneamente:

- se il numero di violazioni risulti coerente con il livello di confidenza prefissato (*copertura incondizionata*);
- se le violazioni sono distribuite in modo indipendente nel tempo (*assenza di clustering*).

Il test congiunto si basa sul confronto tra la verosimiglianza del modello sotto l'ipotesi nulla (copertura e indipendenza) e la verosimiglianza del modello alternativo (dipendenza markoviana di primo ordine). Formalmente, la statistica del test è

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

dove:

- $LR_{uc}$  è la statistica del test di Kupiec;
- $LR_{ind}$  è la statistica del test di Christoffersen.

Sotto l'ipotesi nulla,  $LR_{cc}$  è distribuito secondo una  $\chi^2$  con 2 gradi di libertà:

$$LR_{cc} \sim \chi^2(2)$$

---

<sup>3</sup>Peter F. Christoffersen, *Evaluating interval forecasts*, *International economic review* (1998)[5]

Il *Conditional Coverage Test* rappresenta quindi uno strumento completo per la validazione dei modelli VaR, poichè consente di individuare sia modelli che sottostimano sistematicamente il rischio (bassa copertura), sia modelli in cui le violazioni tendono a concentrarsi nel tempo, segnalando dinamiche non correttamente catturate.

## 3.2 La struttura del portafoglio in analisi

L'analisi è condotta su un orizzonte temporale di dieci anni, dal 1 gennaio 2014 al 31 dicembre 2024, con frequenza giornaliera. La scelta di questo intervallo risponde all'esigenza di considerare fasi di mercato diverse tra loro come cicli di crescita economia (2016 - 2019), la crisi pandemica del 2020, la successiva fase di ripresa e le tensioni geopolitiche degli ultimi anni. Questi diversi periodi consentono di testare la capacità dei modelli VaR di adattarsi non solo a mercati stabili ma anche a periodi con alta volatilità. L'utilizzo di dati giornalieri permette di aumentare l'accuratezza delle stime fornendo un campione ampio di osservazioni, fondamentale per applicare tecniche avanzate come i modelli di simulazione.

Al fine di confrontare l'efficacia di differenti modelli di stima del VaR, è stata adottata una diversificazione di portafoglio che privilegia l'eterogeneità settoriale, geografica e di rischio tra i titoli.

Il portafoglio è composto da:

- *Apple Inc. (AAPL)*: rappresenta l'eccellenza in ambito *tech* a livello statunitense e mondiale. La scelta risponde all'esigenza di introdurre un titolo *growth* ad alta capitalizzazione, esposto al rischio di mercato ma anche a importanti potenzialità di rendimento;
- *NVIDIA Corporation (NVDA)*: leader mondiale nel settore dei semiconduttori e delle tecnologie legate all'intelligenza artificiale e al *gaming*. Questo

titolo consente di rappresentare una componente del mercato azionario spesso soggetta a variazioni di prezzo ampie e repentine, particolarmente utili per stressare i modelli di rischio;

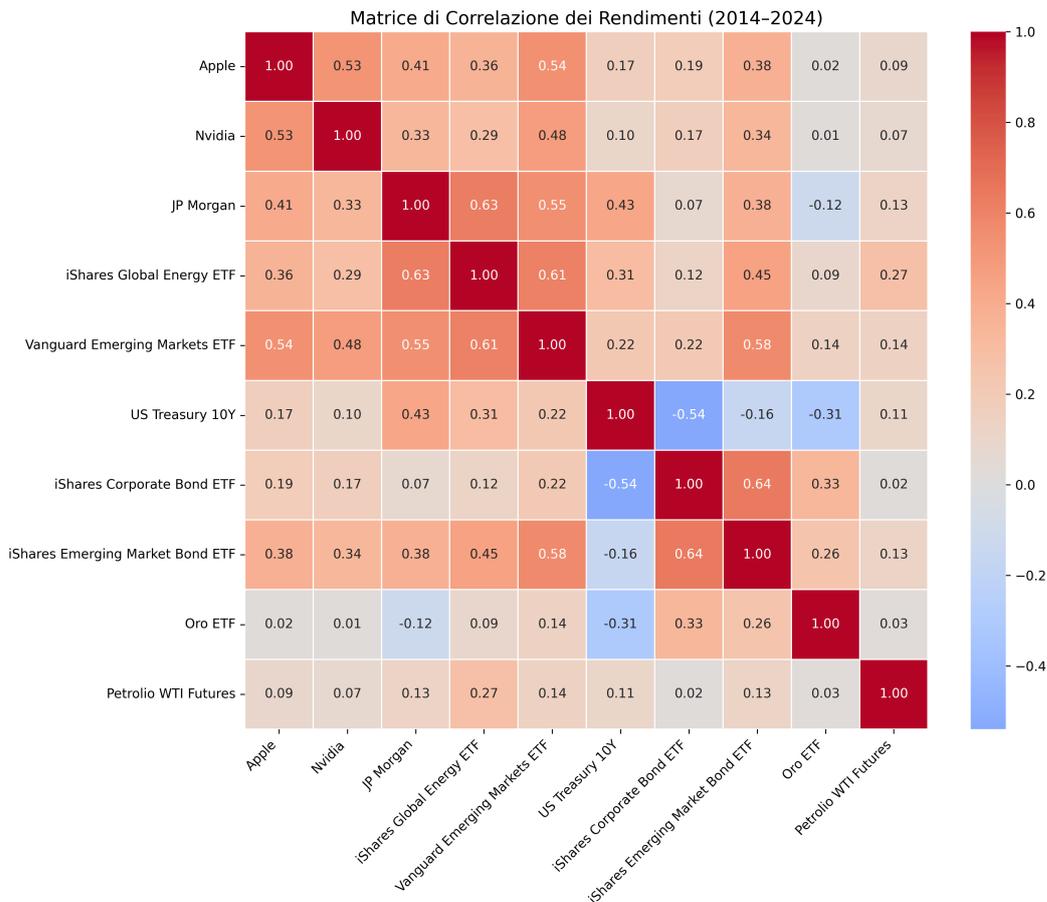
- *JP Morgan Chase & Co. (JPM)*: il titolo permette di introdurre nel portafoglio una componente finanziaria tradizionale, influenzata dall'andamento dei tassi d'interesse e dalla stabilità dell'intero sistema bancario. Risulta utile per valutare la reattività del portafoglio alle dinamiche del settore creditizio e alle politiche monetarie;
- *iShares Global Energy ETF*: questo ETF replica l'andamento di un paniere globale di aziende operanti nel settore dell'energia, tra cui petrolio e gas. È stato selezionato per rappresentare un settore ad alta volatilità, sensibile a shock esterni e, come visto negli ultimi anni, influenzato da fattori geopolitici e macroeconomici.
- *Vanguard FTSE Emerging Markets ETF*: questo ETF rappresenta un'ampia gamma di titoli azionari quotati nei mercati emergenti. Consente di valutare la sensibilità dei modelli di rischio a strumenti soggetti a elevata incertezza, instabilità politica e volatilità, caratteristiche proprie delle economie in via di sviluppo.
- *US Treasury Bond 10Y*: rappresenta il *benchmark* per eccellenza dei titoli di Stato a lungo termine. È stato selezionato al fine di introdurre una componente a basso rischio e rendimento relativamente stabile, utile a bilanciare la volatilità degli asset più rischiosi.
- *iShares Investment Grade Corporate Bond ETF*: fornisce esposizione a obbligazioni corporate ad alto merito creditizio. Rappresenta una via intermedia tra titoli a basso rischio (governativi) e strumenti più volatili. Permette di

osservare il comportamento dei modelli nei confronti di asset sensibili alla fiducia degli investitori ed agli spread creditizi.

- *iShares J.P. Morgan USD Emerging Markets Bond ETF*: rappresentate obbligazioni sovrane e corporate dei mercati emergenti denominate in dollari. Valuta la risposta dei modelli a strumenti ad alto rischio geopolitico, esposti a potenziali eventi di *default* e a oscillazioni marcate, pur mantenendo una struttura valutaria stabile.
- *SPDR Gold Shares ETF*: l'oro è storicamente considerato il bene rifugio d'eccellenza. Questo ETF rappresenta un asset decorrelato rispetto ad azioni e obbligazioni, utile per testare il ruolo di diversificazione all'interno del portafoglio in fasi di crisi o incertezza.
- *WTI Crude Oil Futures*: Il future sul petrolio WTI è tra gli strumenti più liquidi e volatili del mercato delle *commodities*. La sua presenza consente di includere un asset strettamente legato all'economia reale, ai consumi energetici e alla geopolitica. È fondamentale per valutare il comportamento dei modelli in presenza di dinamiche di prezzo fortemente instabili e imprevedibili, come avvenuto negli ultimi anni.

Si assume una ponderazione uniforme all'interno del portafoglio, quindi tutti gli asset hanno lo stesso peso.

Questa scelta è determinata dall'obiettivo di strutturare una combinazione sufficientemente eterogenea da cogliere l'impatto delle variazioni dei fattori di mercato sui diversi strumenti e non di costruire un portafoglio perfettamente diversificato in senso assoluto, perchè potrebbe non evidenziare al meglio le differenze tra i diversi modelli d'analisi.



**Fig. 3.1:** Matrice di correlazione dei rendimenti giornalieri (2015 - 2024).

Come riportato nella figura 3.1, le correlazioni tra gli asset risultano positive ma non elevate, infatti, nonostante un gran numero di correlazioni positive, il portafoglio risulta comunque ben diversificato in base ai seguenti indici calcolati:

- L'indice di concentrazione *Herfindahl-Hirschman (HHI)*: risulta pari a 0,1, valore che rappresenta un portafoglio equamente bilanciato su dieci asset. Il relativo indice di diversificazione (complemento a uno del HHI) assume dunque il valore massimo di 0,9, suggerendo un'elevata dispersione nella composizione del portafoglio;

- Media delle correlazioni tra i rendimenti giornalieri degli asset: il valore ottenuto, pari a 0,227, conferma la presenza di una correlazione positiva moderata, coerente con quanto osservato nella *heatmap*, ma comunque compatibile con un buon grado di diversificazione funzionale.
- *Diversification Ratio*: definito come il rapporto tra la media ponderata delle deviazioni standard individuali e la deviazione standard del portafoglio aggregato. Il valore calcolato, pari a 1,753, risulta significativamente superiore a 1, indicando che la combinazione dei titoli consente una riduzione efficace del rischio complessivo rispetto alla semplice somma dei rischi individuali.

Questi risultati confermano che, sebbene le correlazioni tra gli asset siano tendenzialmente positive, il portafoglio possiede comunque caratteristiche strutturali e dinamiche compatibili con un buon grado di diversificazione, soprattutto grazie alla differenziazione tra classi di attivo, settori economici e reazioni asimmetriche alle condizioni di mercato.

### 3.3 Modelli parametrici per la stima del VaR

Come anticipato nella sezione precedente, è stato preso in esame un campione di dati che va da gennaio 2014 a dicembre 2024. Al fine di garantire una stima robusta della volatilità per ciascun modello, il VaR viene calcolato nella finestra temporale 2015 - 2024, consentendo a tutti i modelli di utilizzare l'anno 2014 come *rolling window* per la calibrazione dei parametri. Per ogni modello, è stato calcolato un VaR giornaliero al 99% e, in ogni giorno, la stima effettuata viene confrontata con la perdita effettiva subita dal portafoglio, al fine di determinare il numero di violazioni presentate.

Verranno di seguito riportati i due modelli parametrici analizzati: il primo segue un'approccio tradizionale, in cui viene assunta la volatilità storica costante, mentre, il secondo, utilizza il metodo dell'*Exponentially Weighted Moving Average*.

### 3.3.1 Il metodo parametrico tradizionale

Il primo metodo utilizzato è l'approccio parametrico, con l'assunzione che i rendimenti del portafoglio siano normalmente distribuiti. In questo modello, il VaR viene calcolato ogni giorno come:

$$VaR_t = z_{99\%} \cdot \hat{\sigma}_t \cdot V_P$$

dove  $z_{99\%}$  è il quantile della distribuzione normale standard (pari a 2.33),  $\hat{\sigma}_t$  è la stima della deviazione standard del portafoglio alla data  $t$ , e  $V_P$  è il valore complessivo del portafoglio, assunto pari a 1.000.000 di dollari.

Al fine di garantire una corretta stima della volatilità, è stata utilizzata una (*rolling window*) di 250 giorni: ogni giorno, viene calcolata la matrice di covarianza dei rendimenti degli asset nelle 250 osservazioni precedenti, da cui si ottiene la volatilità del portafoglio:

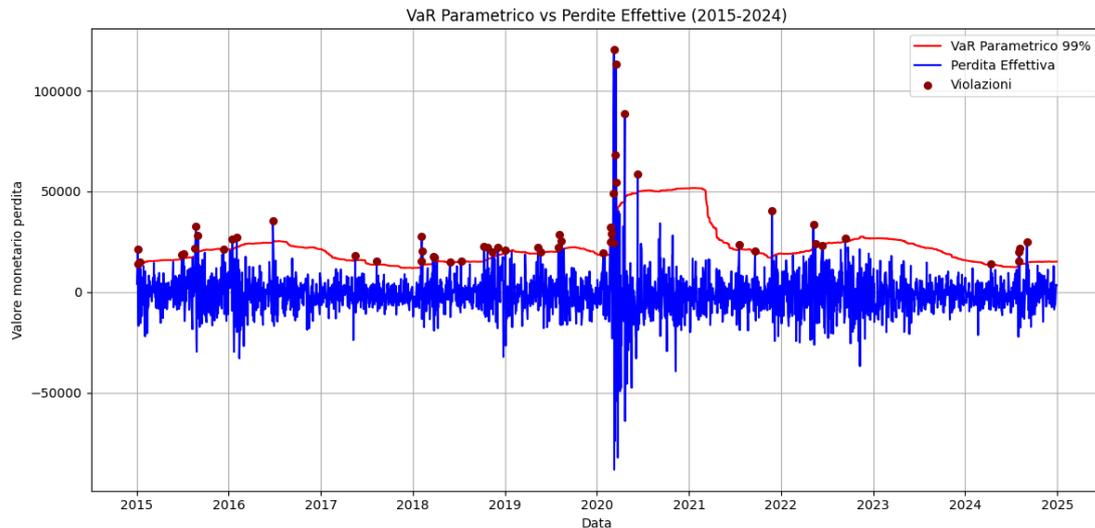
$$\sigma_t = \sqrt{w' \Sigma_t w} \quad (3.1)$$

dove  $\Sigma_t$  è la matrice di covarianza stimata alla data  $t$  e  $w$  è il vettore dei pesi, assunti uniformi tra gli asset. La volatilità così ottenuta viene poi utilizzata per stimare il VaR giornaliero.

Quindi, in ogni giorno del periodo di riferimento, viene calcolato il VaR del giorno successivo utilizzando i dati dei 250 giorni precedenti. Ogni stima effettuata, è confrontata con la perdita effettiva registrata: quando la perdita rilevata empiricamente supera quella stimata dal VaR si ha una violazione.

Nel periodo considerato, vengono registrate 2.512 osservazioni giornaliere e quindi con la scelta di un intervallo di confidenza al 99% ci si aspetta che solo

nell'1% dei casi venga osservata una violazione, quindi circa 26 violazioni. Il metodo parametrico registra ben 55 eccezioni, un numero di gran lunga superiore (circa il doppio) a quelle attese, attestandosi all'incirca ad un 2% di casi in cui il VaR non è riuscito a coprire la reale perdita effettiva.



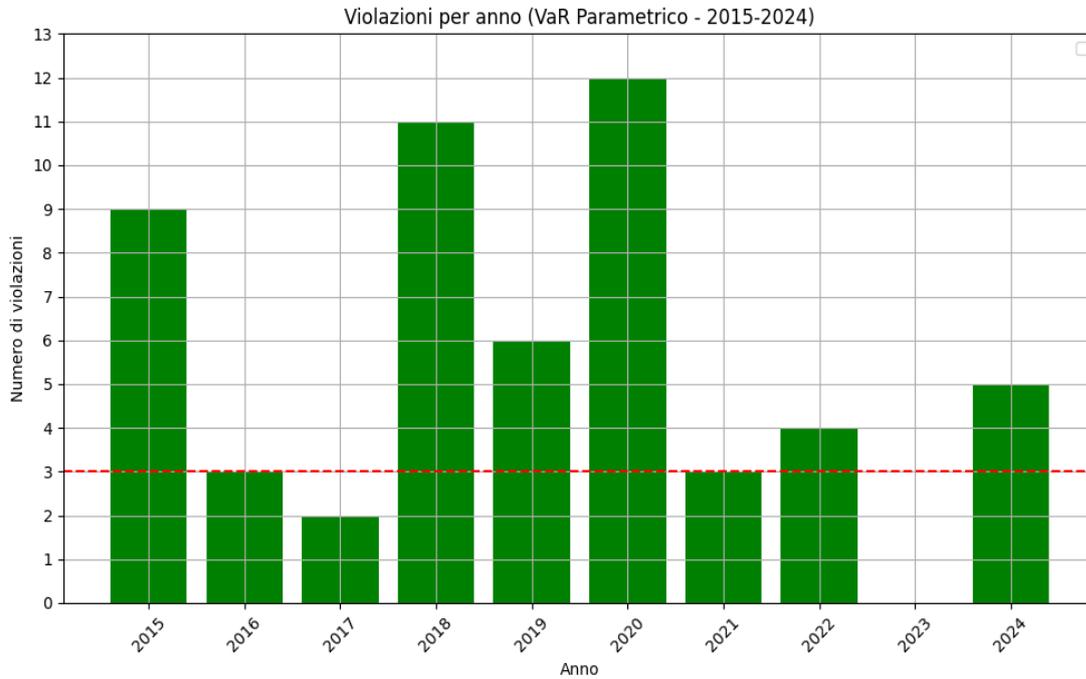
**Fig. 3.2:** Andamento VaR Parametrico 2015-2024.

Il grafico 3.2 confronta le stime del VaR parametrico con la distribuzione delle perdite effettive e segnala i giorni in cui il modello ha sottostimato il rischio.

Come è possibile notare, in periodi di alta incertezza, come ad esempio nel 2020, sembrano registrarsi il più elevato numero di violazioni. Tale problematica deriva dal fatto che in questo caso il VaR è calcolato assumendo volatilità storica costante, come previsto dall'approccio parametrico. Inoltre, la forma relativamente stabile del VaR nei periodi meno turbolenti, a fronte di oscillazioni più marcate delle perdite effettive, evidenzia una certa rigidità del modello nel seguire l'evoluzione dinamica del rischio, comportando una sovrastima dello stesso nel periodo immediatamente successivo allo shock.

Inoltre, anche in altri anni si registra un numero di violazioni ben superiori a

quelle previste, per questo nel grafico 3.3 verrà analizzata la distribuzione annuale delle eccezioni.



**Fig. 3.3:** Distribuzione annuale delle violazioni del VaR parametrico.

Considerando che un VaR al 99% di confidenza prevede che solo nell'1% dei casi venga registrata una violazione, quindi, in un anno composto da 250 giorni di *trading*, le eccezioni dovrebbero essere 2,5. Approssimando quindi a 3 il numero di violazioni che dovrebbero osservarsi per considerare il modello valido si osserva che, nel periodo di riferimento, il VaR parametrico riesce a rispettare questa soglia solo in 4 occasioni. In alcuni anni, la soglia è ampiamente superata come nel 2015, 2018 e infine nel 2020, in cui si osserva un valore quadruplo rispetto al limite di 3.

Oltre al numero delle violazioni, è importante considerare il valore medio delle perdite che eccedono il VaR nei giorni in cui si presentano, *Average Violation Loss*.

Anno	Average Violation Loss (\$)
2015	4.558,70
2016	7.122,26
2017	2.078,18
2018	4.960,54
2019	3.309,00
2020	28.638,95
2021	8.793,29
2022	3.840,58
2023	–
2024	5.725,13

I valori ottenuti risultano alquanto moderati per ogni anno, eccetto in due casi: nel 2020 si registra una perdita eccedente la stima di gran lunga maggiore rispetto a quelle presenti negli altri periodi, mentre, nel 2023, il numero di eccezioni è pari a zero quindi anche questa analisi non registrerà alcun dato. Questo dato è particolarmente rilevante in quanto, a differenza di quanto possa apparire, potrebbe non essere realmente positivo: in quell'anno, come riportato anche nel grafico 3.2, il VaR sembra sovrastimare eccessivamente le perdite e quindi il modello non risulta comunque adatto alla sua finalità.

Infine, come riportato nella sezione 3.1, non si può valutare la bontà del modello solo considerando il numero di eccezioni e l'ammontare delle perdite, per questo motivo è stata effettuata una valutazione tramite i test di *Unconditional Coverage* e *Conditional Coverage*.

Il *test di Kupiec* ha prodotto una statistica LR pari a 26,804, ben superiore al valore critico di 6,635 previsto per un VaR al 99%. Ovviamente, il *p-value* risulta prossimo allo zero, quindi è possibile rigettare l'ipotesi nulla di corretto livello di

copertura del modello, dal quale si può quindi evincere che il modello ha sottostimato ripetutamente le perdite.

Anche il *test di indipendenza di Christoffersen* fornisce esito negativo. La statistica LR è 18,514, associata a un *p-value* trascurabile. Dunque, le violazioni non si verificano in modo indipendente nel tempo, ma tendono a presentarsi in *cluster*, evidenziando come il modello non riesca a incorporare dinamiche temporali della volatilità, come quelle generate da shock sistemici o effetti persistenti.

Il *Conditional Coverage Test* conferma tale evidenza, con una statistica LR complessiva pari a 45,318 e un *p-value* prossimo a zero.

Il rigetto congiunto dell'ipotesi nulla in ogni test indica che il modello parametrico tradizionale, pur nella sua semplicità e immediatezza di calcolo, non è in grado di offrire una rappresentazione completamente affidabile del rischio di mercato in periodi di elevata turbolenza. Per questo motivo, al fine di migliorare la previsione del VaR parametrico, è spesso utilizzato un metodo che permette di stimare al meglio la volatilità: il metodo delle medie mobili esponenziali<sup>4</sup>.

Un riepilogo dei risultati ottenuti per il metodo parametrico tradizionale è riportato nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1: Risultati metodo parametrico tradizionale

<b>Descrizione</b>	<b>Valore</b>	<b>Esito</b>
VaR medio stimato (%)	2,23%	-
Numero di violazioni	55	Rigettato
<i>p-value</i> Test di Kupiec	0,000	Rigettato
<i>p-value</i> Test di Christoffersen	0,000	Rigettato
<i>p-value</i> Conditional Coverage Test	0,000	Rigettato
<b>Valutazione complessiva</b>		<b>Rigettato</b>

---

<sup>4</sup>L'analisi è stata sviluppata tramite il codice Python in Appendice (A.4)

### 3.3.2 Il metodo parametrico basato su *EWMA*

Al fine di realizzare un modello più accurato, è stata condotta un'analisi su diversi metodi di stima della volatilità e il metodo delle medie mobili esponenziali risulta quello che ha registrato una stima più robusta in applicazione a questo portafoglio; per questo motivo, è stato selezionato proprio questa metodologia per sviluppare l'approccio parametrico.

Il metodo dell'*Exponentially Weighted Moving Average* consente di stimare la volatilità utilizzando le medie mobili. Quindi, se si vuole stimare la deviazione standard di un rendimento ad un determinato istante di tempo  $t$ , viene utilizzato un campione di  $n$  osservazioni e verrà calcolata la volatilità utilizzando i dati dal periodo  $t - n$  al periodo  $t - 1$ .

Nel periodo successivo  $t + 1$  verranno utilizzati i dati da  $t - n + 1$  a  $t$ , quindi spostando in avanti la finestra temporale ma lasciando invariato il numero di osservazioni  $n$ .

Al fine di rendere la stima più accurata, viene assegnato un peso ad ogni osservazione, rappresentato da una costante  $\lambda$ , compresa nell'intervallo  $[0,1]$ , uguale per tutti ma con esponenti diversi. Gli esponenti del *decay factor* ( $\lambda$ ) sono assegnati in modo crescente, cosicchè i dati più recenti riceveranno un esponente inferiore rispetto a quelli più lontani nel tempo. Questa logica, permette di dare più peso alle osservazioni più vicine nel tempo, così da renderle più influenti per la stima della volatilità, mentre, per le osservazioni più datate il  $\lambda$  si avvicinerà a zero e quindi il dato registrato sarà praticamente ininfluenza.

Nell'analisi condotta, per ogni giorno della serie storica, viene aggiornata la matrice di covarianza utilizzando la seguente formula ricorsiva:

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) r_t r_t'$$

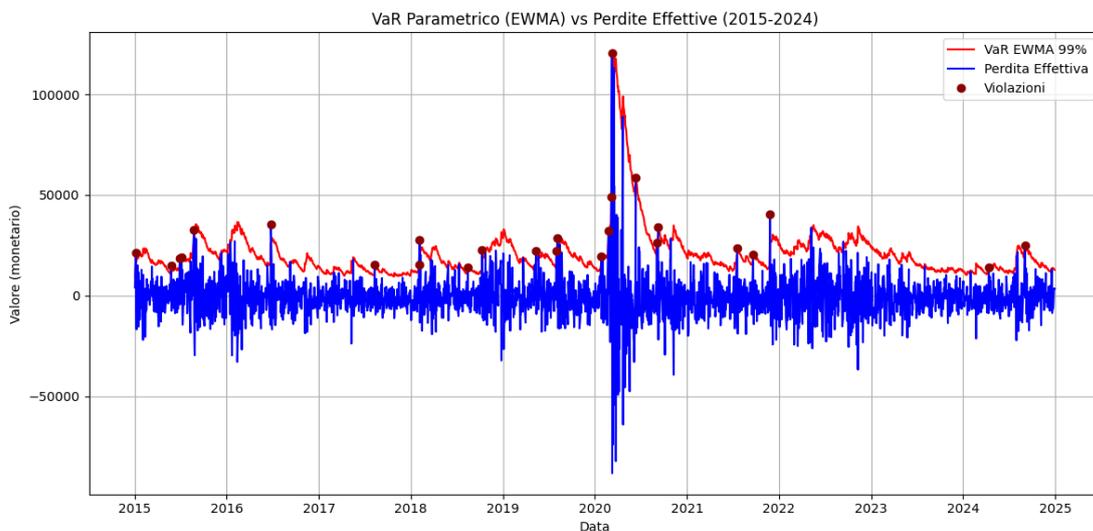
dove:

- $\Sigma_{t-1}$  è la matrice di covarianza stimata al tempo  $t - 1$ ;
- $r_t$  è il vettore rappresentante i rendimenti degli asset alla data  $t$ ;
- $\lambda$  è il parametro di decadimento (impostato a 0,94);
- $\Sigma_0$  è inizializzata come  $r_0 r_0'$ , ovvero il prodotto esterno del primo vettore di rendimenti osservato.

La scelta del *decay factor*  $\lambda = 0.94$  rispecchia quanto previsto da *Risk Metrics* e da *Basilea III*, che consigliano questo livello nel calcolo del VaR al 99%.

Successivamente, la volatilità del portafoglio viene calcolata in ciascun giorno secondo la formula 3.1.

Per la stima del VaR restano invariate tutte le altre assunzioni dell'approccio parametrico.

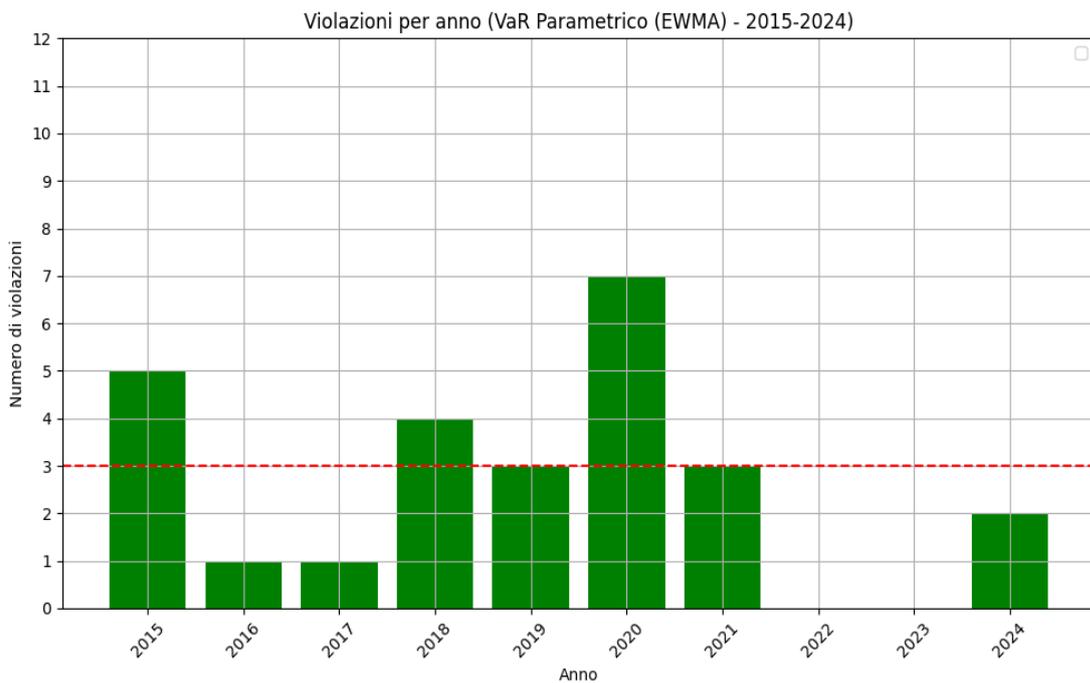


**Fig. 3.4:** Andamento VaR Parametrico con EWMA 2015-2024.

Il metodo utilizzato produce dei risultati di gran lunga migliori dell'approccio parametrico tradizionale. Nel periodo considerato, vengono registrate 26 violazio-

ni, perfettamente in linea con le 2.512 osservazioni totali ad un livello di confidenza previsto al 99%.

Dal grafico 3.4 è possibile notare come il VaR segua meglio le perdite effettive: anche in periodi di alta volatilità, come ad esempio nel 2020, la stima riesce ad adattarsi meglio e a registrare un numero inferiore di violazioni. Inoltre, nel periodo successivo allo shock, il VaR si riadatta subito e non registra periodi eccessivamente prolungati di sovrastima del rischio. Questo duplice effetto è dovuto al metodo *EWMA*: la struttura esponenziale permette di attribuire maggior peso ai rendimenti recenti, aggiornando più velocemente la stima della volatilità in presenza di movimenti improvvisi del mercato e quindi permette una maggiore reattività agli shock; questa struttura permette, inoltre, di non conservare a lungo il dato sulla volatilità dello shock così da evitare sovrastime future.



**Fig. 3.5:** Violazioni annue del VaR Parametrico con EWMA.

Considerando invece le violazioni annue registrate dal modello (3.5), risulta

evidente come negli anni 2015, 2018 e 2020 il modello continui a non fornire una corretta stima delle perdite, probabilmente questa tendenza è dovuta a periodi caratterizzati da maggiore incertezza.

Tendenzialmente, il modello tende a migliorare di gran lunga le performance, anche se negli anni 2022 e 2023 registra zero violazioni, comportamento che può essere interpretato come un segnale di sovrastima del rischio. In questi casi, si osserva un livello di allerta elevato anche in assenza di shock significativi, con una conseguente rinuncia parziale dell'efficienza in favore di una maggiore conservatività.

<b>Anno</b>	<b>Average Violation Loss (\$)</b>
2015	2.972,18
2016	9.551,85
2017	2.481,12
2018	3.359,48
2019	3.959,81
2020	8.010,50
2021	5.860,56
2022	–
2023	–
2024	1.049,32

La media delle perdite che eccede la stima del VaR risulta migliorata in ogni anno, delineando quindi una diminuzione di valore del portafoglio meno pronunciata rispetto all'approccio parametrico tradizionale. Ci si sarebbe potuto aspettare un risultato ancora migliore dal modello, poichè, anche se questo dato risulta più basso, la differenza non è molto elevata in quasi tutti gli anni. Questo fenome-

no suggerisce che, anche se il modello riduce il numero complessivo di violazioni, questi eventi si associano a perdite più consistenti.

I risultati dei test statistici di validazione del modello restituiscono un quadro complessivamente positivo.

Il *test di Kupiec* restituisce un valore della statistica LR pari a 0,031, di gran lunga inferiore del valore critico di 6,635 previsto per il VaR al 99%. Anche il *p-value*, pari a 0,861, comporta l'accettazione dell'ipotesi nulla, confermando che la frequenza delle violazioni osservate è in linea con quella attesa teoricamente. Il modello quindi riesce ad anticipare correttamente, nel periodo analizzato, il numero di giorni in cui le perdite superano la soglia di rischio stimata dal VaR.

Tuttavia, il *test di Christoffersen* ha prodotto una statistica LR pari a 4,799, con un *p-value* pari a 0,028. Questo risultato induce a rigettare l'ipotesi nulla di indipendenza seriale, evidenziando che le violazioni non sono distribuite casualmente nel tempo, ma tendono piuttosto a concentrarsi in *cluster*. Tale fenomeno suggerisce che, in alcuni periodi, il modello non riesce ad aggiornare repentinamente la stima del rischio, generando sequenze di violazioni consecutive.

Il test di *Conditional Coverage*, combinando i due test precedenti, restituisce una statistica LR pari a 4,830 con un *p-value* di 0,089. Si può dunque concludere che, nel periodo considerato, il modello parametrico con *EWMA* mostra un buon grado di affidabilità nella stima del rischio, anche se con una lieve criticità riguardante la distribuzione temporale delle eccezioni.

In conclusione, il modello risulta molto più reattivo del classico modello parametrico e riesce al meglio a coniugare la semplicità di calcolo con la precisione della stima. Tuttavia, anche se con una significativa riduzione delle violazioni, il modello non riesce a ridurre il valore delle perdite eccedenti il VaR in modo significativo, suggerendo che non sempre riesce a catturare tempestivamente la transitorietà di eventuali shock. A conferma di ciò, infatti, c'è il risultato negativo del *test di*

*Christoffersen* e quindi alla tendenza a clusterizzare le violazioni.

Il modello probabilmente risente ancora delle assunzioni tipiche di un'approccio parametrico, come ad esempio l'ipotesi di normalità dei rendimenti, che in un portafoglio bilanciato riesce ancora a fornire risultati positivi ma, in presenza di asset con elevata volatilità e con una distribuzione dei rendimenti che differisce dalla normale, potrebbe non fornire altrettanti risultati positivi<sup>5</sup>.

Un riepilogo dei risultati ottenuti per il metodo parametrico EWMA è riportata nella Tabella 3.2.

Tabella 3.2: Risultati metodo parametrico EWMA

<b>Descrizione</b>	<b>Valore</b>	<b>Esito</b>
VaR medio stimato (%)	2,08%	-
Numero di violazioni	26	Accettato
<i>p</i> -value Test di Kupiec	0,861	Accettato
<i>p</i> -value Test di Christoffersen	0,028	Rigettato
<i>p</i> -value Conditional Coverage Test	0,089	Accettato
<b>Valutazione complessiva</b>		<b>Rigettato</b>

### 3.4 Modelli di simulazione per il calcolo del VaR

In questo paragrafo, si analizzano gli approcci di simulazione per la stima del VaR. Questi metodi si differenziano dai parametrici, in quanto non si basano esclusivamente su una struttura predeterminata della distribuzione dei rendimenti, ma fanno uso diretto delle informazioni storiche oppure generano scenari simulati artificialmente. Per entrambi gli approcci, viene condotta un'analisi basata sul medesimo portafoglio utilizzato nei modelli parametrici, mantenendo inalterati

---

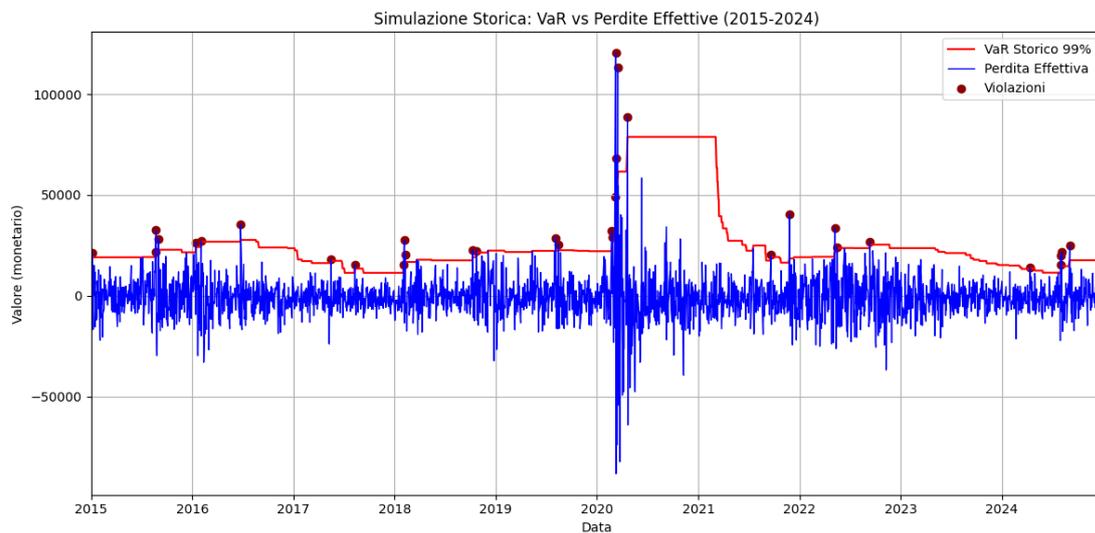
<sup>5</sup>L'analisi è stata sviluppata tramite il codice Python in Appendice (A.5)

l'orizzonte e la frequenza temporale ed il livello di confidenza (3.3), al fine di garantire un confronto diretto e attendibile tra i modelli.

### 3.4.1 L'approccio delle simulazioni storiche

Questo metodo si contraddistingue per l'assenza di una distribuzione determinata a priori, infatti, si fonda sull'assunzione che la distribuzione futura dei rendimenti possa essere rappresentata da una finestra mobile di osservazioni passate.

Nell'intervallo di tempo preso in esame, l'approccio delle simulazioni storiche ha registrato 33 violazioni su 2.512 giorni di osservazione, quindi, in circa l'1,3% dei casi le perdite effettive sono stati superiori a quelle previste dal VaR. Questo risultato, benchè non sia perfettamente in linea con l'intervallo di confidenza selezionato, conferma come il modello sia riuscito ad effettuare una previsione in linea con il reale comportamento dei rendimenti osservati, in termini di frequenza complessiva degli eventi estremi.



**Fig. 3.6:** Andamento del VaR stimato con l'approccio delle simulazioni storiche.

Risulta evidente come, in periodi di incertezza dei mercati, il modello non riesca a riaggiornare prontamente il corretto andamento delle stime: nei periodi in cui si verificano shock significativi, il VaR non riesce ad anticipare ed a coprire tali perdite e, inoltre, nei periodi successivi, la stima resta elevata nonostante il progressivo rientro della volatilità effettiva. Questo comportamento mette in luce uno dei principali limiti di questo approccio, ovvero la scarsa reattività a cambiamenti repentini, dato che il metodo assegna lo stesso peso a tutte le osservazioni passate e quindi tende a prolungare l'effetto degli shock storici (*effetto echo*).

Il grafico 3.7 mostra la distribuzione delle violazioni annue registrate. Come evidente, nel 2020 si osserva il numero massimo di violazioni ma non è l'unico valore al di sopra della soglia in linea con l'intervallo di confidenza all'1%: vengono registrati in totale ben 4 anni in cui il modello non è riuscito a stimare correttamente il VaR.



**Fig. 3.7:** Violazioni annue del VaR stimato con l'approccio delle simulazioni storiche.

Inoltre, i valori del triennio 2021-2023 sono influenzati dallo shock derivante dalla pandemia da COVID-19, per la quale si registra un innalzamento delle stime

del VaR e quindi, anche se i valori sono in linea con il modello, in realtà le previsioni del modello risultano eccessivamente conservative.

L'andamento altalenante conferma l'idea che, sebbene il metodo storico sia semplice da implementare, la sua efficacia dipenda fortemente dalla natura dei dati passati utilizzati per la simulazione, rendendolo potenzialmente meno reattivo in scenari di rapida evoluzione.

Anche se il numero di violazioni registrate dal modello basato sulla simulazione storica risulta superiore rispetto a quello ottenuto con l'approccio parametrico con EWMA, la media delle perdite eccedenti il valore stimato del VaR si mantiene generalmente su livelli più contenuti negli anni in cui non vengono registrati shock di volatilità.

Questo comportamento evidenzia una maggiore prudenza del modello storico, che, pur essendo meno accurato nel centrare la soglia teorica di violazione, riesce a contenere meglio l'ampiezza delle perdite quando le stime vengono superate.

<b>Anno</b>	<b>Average Violation Loss (\$)</b>
2015	5.002,74
2016	3.473,19
2017	1.263,38
2018	4.464,82
2019	4.697,62
2020	30.255,11
2021	11.500,45
2022	4.423,08
2023	—
2024	5.036,70

Tale caratteristica riflette l'elevata conservatività dell'approccio, il quale tende

a produrre stime del rischio più elevate in corrispondenza di fasi turbolente dei mercati. Questo rende la simulazione storica particolarmente utile in un'ottica di protezione del portafoglio, poichè consente di fronteggiare meglio eventi estremi e condizioni di elevata incertezza finanziaria, anche a costo di sacrificare una parte di efficienza nei periodi più stabili.

I risultati dei test statistici applicati al modello di simulazione storica offrono interessanti spunti di riflessione. In primo luogo, il *test di Kupiec* consente di accettare l'ipotesi nulla di corretta copertura incondizionata. Il valore della statistica LR, infatti, risulta pari a 2,260, con un *p-value* di 0,133, superiore alla soglia di significatività convenzionale del 5%. Questo risultato indica che la frequenza delle violazioni osservate è compatibile con il livello di confidenza del 99%, confermando la bontà del modello per quanto concerne l'*unconditional coverage*.

Tuttavia, l'analisi di indipendenza delle violazioni condotta tramite il *test di Christoffersen* evidenzia delle criticità. La statistica LR calcolata è pari a 16,677, con un *p-value* prossimo allo zero, imponendo quindi il rigetto dell'ipotesi di indipendenza seriale. Questo risultato suggerisce che, pur rispettando la frequenza attesa delle violazioni, il modello non riesce a catturare adeguatamente la dinamica temporale del rischio, condizione essenziale per una gestione efficace della volatilità. Infine, il test di copertura condizionata, ottenuto dalla combinazione dei due precedenti, conferma le problematiche emerse. Il valore della statistica è pari a 18,937, con un *p-value* nullo, portando al rigetto dell'ipotesi congiunta di corretta copertura e indipendenza. Questo esito sottolinea che, sebbene il modello sia in grado di produrre una stima coerente con la probabilità di violazione attesa, esso non rispetta le condizioni necessarie per una copertura condizionata valida, riducendo di fatto l'affidabilità complessiva dell'approccio.

In conclusione, l'approccio della simulazione storica si dimostra in grado di offrire una copertura coerente in termini di frequenza attesa delle perdite, co-

me confermato dal *test di Kupiec*. Tuttavia, l'evidente violazione del requisito di indipendenza temporale sollevata dal *test di Christoffersen* e il rigetto del test di copertura condizionata ne limitano la solidità complessiva. La propensione del modello a generare violazioni raggruppate riflette un'inadeguata capacità di adattarsi rapidamente ai cambiamenti nella volatilità di mercato, caratteristica che lo rende potenzialmente vulnerabile in presenza di shock improvvisi o condizioni instabili, come si è notato nel periodo post-pandemia. Nonostante la buona performance in termini di *Average Violation Loss* in periodi con scarsa volatilità, l'approccio risulta quindi meno affidabile rispetto ad altri modelli più reattivi e flessibili, come quello parametrico con EWMA<sup>6</sup>.

Di seguito, è riportato un riepilogo dei risultati ottenuti per il metodo delle simulazioni storiche nella Tabella 3.2.

Tabella 3.3: Risultati metodo storico

<b>Descrizione</b>	<b>Valore</b>	<b>Esito</b>
VaR medio stimato (%)	2,58%	-
Numero di violazioni	33	Rigettato
<i>p</i> -value Test di Kupiec	0,133	Accettato
<i>p</i> -value Test di Christoffersen	0,000	Rigettato
<i>p</i> -value Conditional Coverage Test	0,000	Rigettato
<b>Valutazione complessiva</b>		<b>Rigettato</b>

### 3.4.2 Il metodo Monte Carlo tradizionale

Il metodo Monte Carlo è un modello di simulazione che si differenzia sensibilmente dalle simulazioni storiche, in quanto parte da un presupposto più strutturato: l'ipotesi che i rendimenti degli asset finanziari seguano una determinata

---

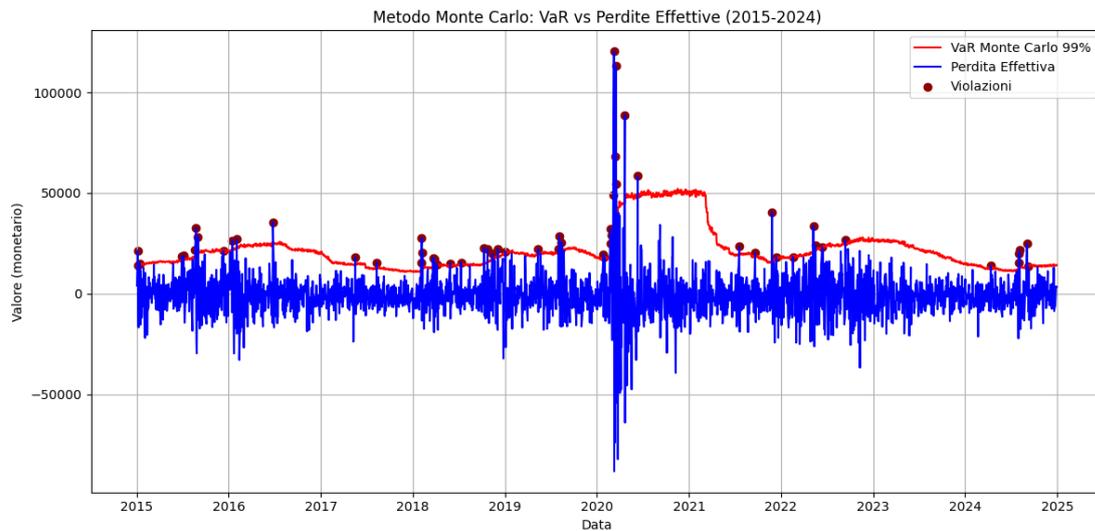
<sup>6</sup>L'analisi è stata sviluppata tramite il codice Python in Appendice (A.6)

distribuzione di probabilità, solitamente la normale multivariata. Ciò consente al metodo di generare scenari futuri sulla base di assunzioni teoriche, piuttosto che limitarsi a riutilizzare combinazioni già osservate in passato.

In particolare, il metodo nella sua forma originale prevede l'assunzione della distribuzione normale dei rendimenti giornalieri, i cui parametri di media e matrice di covarianza vengono stimati su una *rolling window* di 250 giorni.

Per ciascuna stima giornaliera del VaR, il metodo effettua 10.000 simulazioni di vettori di rendimenti, che vengono ordinati e poi la distribuzione viene "tagliata" al percentile richiesto, in questo caso al 99%.

Il metodo, applicato al portafoglio di riferimento nel periodo compreso tra il 2015 e il 2024, presenta 2512 osservazioni registrando 59 violazioni. Questo risultato appare di gran lunga superiore all'atteso teorico dell'1% pari a circa 25 violazioni, attestandosi quindi circa al 2,35%.

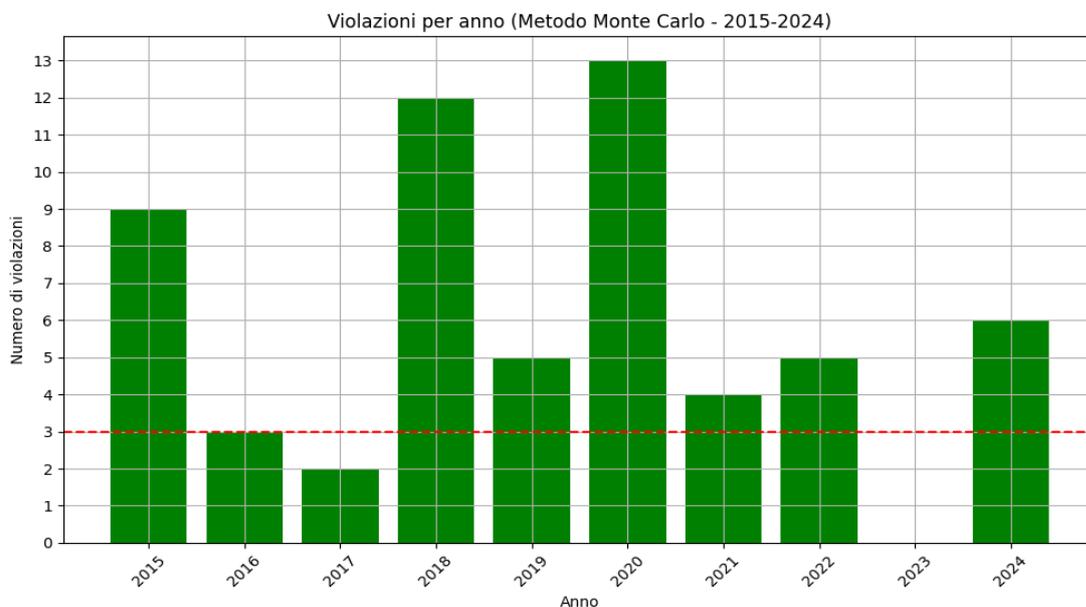


**Fig. 3.8:** Andamento del VaR stimato con il metodo Monte Carlo.

Il grafico 3.8, che mostra il confronto tra la serie temporale del VaR con le perdite effettive giornaliere, mostra tale comportamento: le violazioni risultano

distribuite lungo l'intero orizzonte temporale, con una concentrazione marcata nel 2020, come avviene anche per gli altri metodi. In quel periodo, la volatilità dei mercati ha subito uno shock improvviso, rendendo più complessa una stima precisa del rischio tramite modelli basati su distribuzioni normali.

Come si può notare dall'andamento del VaR, esso appare più reattivo di quello stimato con il metodo della simulazione storica, registrando valori più vicini alla reale distribuzione delle perdite ma, d'altro canto, questa caratteristica comporta una minore capacità di contenere eventi estremi, da cui si generano le violazioni. Questo è attribuibile alla natura del metodo, infatti, la generazione di scenari ipotetici basati su parametri stimati implica che il VaR potrebbe risultare meno conservativo, se la matrice di covarianza sottostante non riesce a catturare la vera dinamica dei rendimenti, come la presenza di *fat tails* o asimmetrie.



**Fig. 3.9:** Violazioni annue del VaR stimato con il metodo Monte Carlo.

Il grafico 3.9 rappresentante le violazioni annuali, evidenzia la distribuzione non omogenea delle 59 violazioni osservate lungo l'orizzonte temporale selezionato.

Come era prevedibile, nel 2020 vengono osservate il maggior numero di eccezioni al pari degli altri modelli ma, in questo caso, il metodo Monte Carlo registra lo *score* peggiore con ben 13 violazioni. È possibile notare come questi risultati estremamente negativi non sono circoscritti al 2020, ma anche nel 2015 e nel 2018, periodi in cui si registra un'elevata volatilità dei mercati finanziari.

Risulta evidente come, negli anni immediatamente successivi a quelli peggiori in termini di numero di violazioni, i valori sono più prossimi alle aspettative teoriche, delineando quindi una mancata reattività del metodo nell'adattarsi rapidamente ai cambiamenti di regime nei mercati.

Da questa analisi è possibile dedurre chiaramente anche l'esito del *test di Kupiec* che restituisce un LR pari a 33,461 con un *p-value* prossimo allo zero, portando quindi al rigetto dell'ipotesi nulla, in altre parole, il modello non è accurato nella calibrazione del livello di confidenza dato che le sue stime risultano sistematicamente troppo ottimistiche.

Anche il *test di Christoffersen* sull'indipendenza delle violazioni produce un risultato negativo, producendo una statistica di 16,416 con un *p-value* pari a 0. Questo risultato è tipico dei modelli che non riescono ad adattarsi rapidamente a cambiamenti repentini della volatilità, come quelli osservati nei mercati finanziari durante periodi di crisi o shock macroeconomici. La presenza di *clustering* nelle violazioni conferma la scarsa reattività del modello a shock sistemici.

Infine, il *Conditional Coverage Test*, conferma la criticità del modello: il valore del test è pari a 49,877, con un *p-value* ancora una volta pari a 0. L'ipotesi congiunta che il modello sia ben calibrato e che le violazioni siano indipendenti viene rigettata con elevata significatività.

Tuttavia, analizzando la media delle perdite eccedenti il VaR per anno, si evidenzia un elemento di interesse. Anche se il numero di violazioni è di gran lunga superiore a quello atteso, le perdite in eccesso sono generalmente in linea

con quelle osservate nel metodo delle simulazioni storiche.

<b>Anno</b>	<b>Average Violation Loss (\$)</b>
2015	4.893,73
2016	7.303,55
2017	3.599,66
2018	4.892,45
2019	3.886,27
2020	26.644,16
2021	8.025,61
2022	3.544,23
2023	–
2024	5.594,18

In particolare, il picco massimo si registra nel 2020, con una media di 26.644,16 dollari oltre il VaR, valore isolato in quanto successivamente il dato torna simile agli anni antecedenti allo shock. Ciò suggerisce che, quando le violazioni si verificano, le stime del VaR sono talvolta particolarmente lontane dalle perdite reali, riflettendo una certa instabilità nelle code della distribuzione simulata.

Nel complesso, l'analisi condotta sul metodo Monte Carlo tradizionale evidenzia diverse criticità. Da un lato, la flessibilità del modello, che consente di incorporare strutture di correlazione complesse tra asset, rappresenta un punto di forza rispetto agli approcci più rigidi ma, dall'altro lato, l'assunzione di normalità nella distribuzione dei rendimenti si rivela limitante, soprattutto in presenza di eventi estremi.

Le numerose violazioni osservate e il rigetto sistematico dei test di validazione mettono in discussione la robustezza del modello in contesti di elevata volatilità o shock improvvisi, come quelli osservati nel 2020. Sebbene le perdite medie

in eccesso oltre il VaR non risultino particolarmente gravi in valore assoluto (a eccezione dei picchi isolati), esse sottolineano una certa fragilità del metodo nel catturare adeguatamente le dinamiche di coda della distribuzione.

Alla luce di questi risultati, il metodo Monte Carlo, pur essendo teoricamente più sofisticato, richiede miglioramenti nelle ipotesi sottostanti, ad esempio mediante l'utilizzo di distribuzioni alternative o modelli di volatilità dinamica, per potersi configurare come uno strumento più affidabile nell'ambito del *risk management*<sup>7</sup>..

Di seguito, è presente una Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti per il metodo Monte Carlo 3.4.

Tabella 3.4: Risultati metodo Monte Carlo

<b>Descrizione</b>	<b>Valore</b>	<b>Esito</b>
VaR medio stimato (%)	2,16%	-
Numero di violazioni	59	Rigettato
<i>p</i> -value Test di Kupiec	0,000	Rigettato
<i>p</i> -value Test di Christoffersen	0,000	Rigettato
<i>p</i> -value Conditional Coverage Test	0,000	Rigettato
<b>Valutazione complessiva</b>		<b>Rigettato</b>

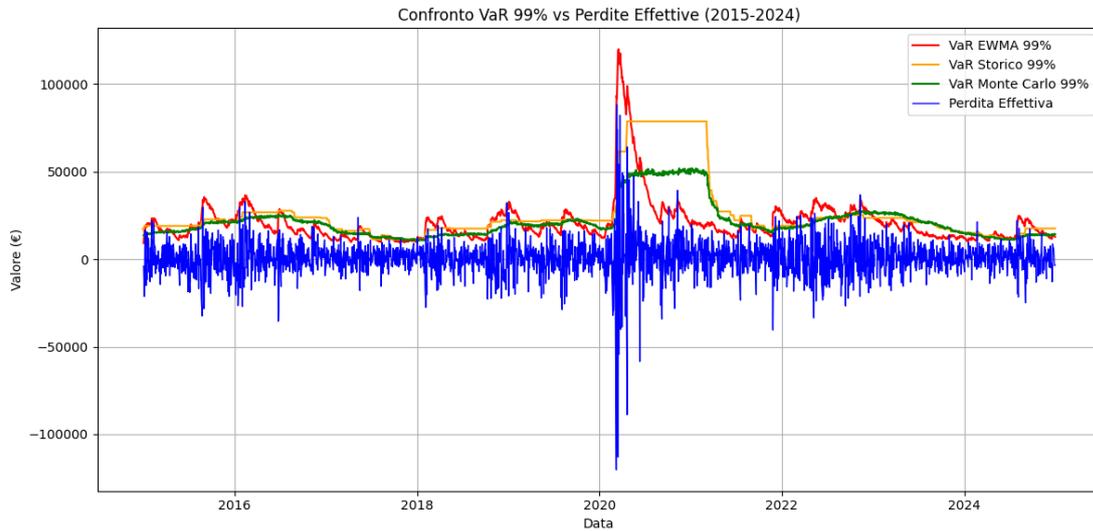
### 3.5 Confronto tra i modelli e conclusioni

Al fine di condurre un'analisi comparativa strutturata, l'obiettivo è valutare quale tra i metodi esaminati, sia in grado di offrire la stima più affidabile e realistica del rischio di mercato sul portafoglio oggetto di analisi. Dopo aver approfondito le caratteristiche, i vantaggi e i limiti dei principali modelli per la stima del VaR, è opportuno confrontare i risultati ottenuti da ciascun modello. In questa sezione

---

<sup>7</sup>L'analisi è stata sviluppata tramite il codice Python in Appendice (A.7)

verranno confrontati il metodo parametrico basato su *EWMA*, l'approccio delle simulazioni storiche ed il metodo Monte Carlo.



**Fig. 3.10:** Comparazione delle stime prodotte dai tre modelli.

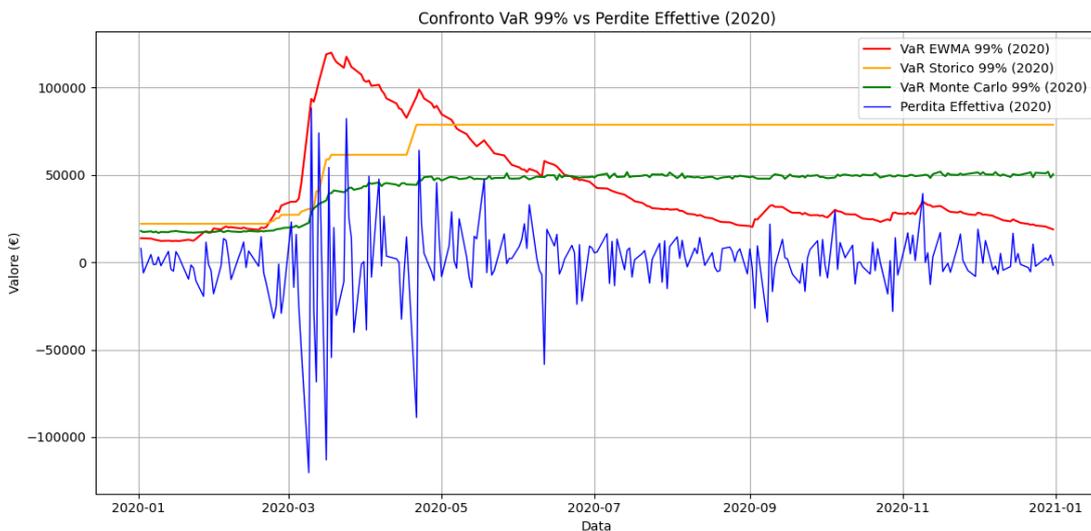
Come riportato in figura 3.10, il VaR parametrico basato su *EWMA* si contraddistingue per la sua elevata reattività a shock derivanti da un aumento della volatilità. Durante i periodi di crisi, il modello reagisce prontamente aumentando il livello di rischio stimato, in linea con l'improvviso aumento della varianza. Tuttavia, questa stessa sensibilità si traduce in una sovrastima persistente del rischio anche nelle fasi di rientro dell'emergenza, generando un eccesso di prudenza. Questo comportamento è coerente con la natura del modello, che attribuisce maggiore peso ai dati più recenti attraverso il parametro di *smoothing*  $\lambda$ .

Il VaR storico presenta un comportamento opposto: essendo interamente basato sulla distribuzione dei rendimenti passati, mostra una rigidità significativa nel recepire shock improvvisi. Nel periodo immediatamente precedente e successivo alla crisi pandemica, il modello non riesce ad anticipare l'aumento del rischio nè a smaltirne rapidamente gli effetti. Questo comporta una sottostima del rischio

nei momenti di crisi, e una persistente sovrastima nei periodi successivi, dovuta all'inclusione di osservazioni estreme nella finestra storica utilizzata per la stima.

Il Var stimato con il metodo Monte Carlo produce una stima molto simile all'approccio delle simulazioni storiche, evidenziando quindi le stesse criticità. Anche in questo caso, il modello non riesce a reagire prontamente a cambiamenti repentini della volatilità, sottostimando le perdite in momenti di crisi e sovrastimandole nei periodi immediatamente successivi. Queste problematiche derivano sia dall'utilizzo della volatilità storica sia dall'assunzione di normalità dei rendimenti tipiche di questo modello.

Tale comportamento dei modelli nei periodi di crisi è evidente se ci si sofferma solo nell'anno 2020, caratterizzato dalla crisi pandemica.



**Fig. 3.11:** Comparazione delle stime prodotte dai tre modelli per l'anno 2020.

Questo anno costituisce un caso naturale di stress test, permettendo di verificare la robustezza e l'adattabilità dei modelli in condizioni estreme.

Il modello EWMA risponde in maniera tempestiva al forte aumento della volatilità. A partire da fine febbraio 2020, la curva del VaR registra un'impennata

repentina, raggiungendo un picco superiore ai \$110.000 nel mese di marzo. Tale comportamento riflette la natura altamente reattiva del modello, che assegna maggior peso alle osservazioni più recenti. Tuttavia, si osserva che questa forte reattività porta anche a una marcata sovrastima del rischio nei mesi successivi, quando la volatilità reale era già in progressiva riduzione. Questo genera una curva di VaR decrescente, ma ancora ampiamente superiore alle perdite effettive, soprattutto nel secondo semestre dell'anno.

Il VaR stimato tramite simulazione storica mostra una reazione tardiva agli eventi estremi. Soltanto a partire da metà marzo, quando gli effetti della crisi erano già pienamente manifesti, la curva registra un brusco incremento, per poi mantenersi pressochè invariata nei mesi successivi, ignorando le evoluzioni successive delle condizioni di mercato. Tale comportamento evidenzia una delle principali criticità del metodo: la sua bassa reattività, derivante dalla natura non parametrica del modello, che si basa esclusivamente sui quantili empirici di una finestra storica prefissata. Il profilo risultante assume una forma a gradini, con livelli che si assestano tra i \$60.000 ed i \$70.000 per un lungo periodo, senza alcun adattamento dinamico, riflettendo l'incapacità del modello di cogliere le variazioni intra-periodo nella volatilità.

Il VaR Monte Carlo mostra un andamento relativamente piatto lungo l'intero arco del 2020, oscillando in un range ristretto compreso tra i \$45.000 e i \$50.000, anche nei momenti di massima turbolenza dei mercati finanziari. Tale comportamento evidenzia una marcata rigidità nella risposta del modello agli shock improvvisi, risultando incapace di riflettere adeguatamente l'impennata della volatilità osservata a marzo in seguito allo scoppio della crisi pandemica. Questo appiattimento della curva è il sintomo di limiti strutturali del modello adottato nella versione base della simulazione Monte Carlo, che assume una volatilità storica costante e una distribuzione normale dei rendimenti. In presenza

di eventi estremi caratterizzati da code pesanti, asimmetrie e comportamenti non lineari, tali ipotesi si rivelano fortemente irrealistiche, portando a una sistematica sottostima del rischio effettivo.

Il mancato adattamento dinamico del modello comporta un'evidente mancanza di sensibilità nei confronti della struttura temporale della volatilità, riducendo la capacità del VaR Monte Carlo di offrire una misura robusta in contesti di stress. Questo risultato rafforza la necessità di introdurre, come proposto nel capitolo successivo, una versione implementata della simulazione Monte Carlo che incorpori un modello GARCH per la stima della volatilità condizionata e una distribuzione t-Student, più adatta a catturare l'eccesso di *kurtosi* e la probabilità di eventi rari.

L'analisi empirica condotta sui tre approcci evidenzia differenze sostanziali anche in termini di performance statistica e capacità di rappresentare il rischio effettivo. I risultati dei test di backtesting e della media delle perdite eccedenti la stima del VaR, offrono una valutazione quantitativa chiara dell'efficacia predittiva dei modelli.

Nel *test di Kupiec*, il modello Monte Carlo è stato nettamente respinto ( $p\text{-value} \approx 7.3 \times 10^{-9}$ ), segno di una marcata sottostima del rischio di coda. Anche il modello storico ha mostrato segnali di debolezza, mentre l'*EWMA* si è mantenuto entro i limiti accettabili, pur con riserve. Tuttavia, quando si analizza la distribuzione temporale delle violazioni, emergono criticità più sottili ma altrettanto rilevanti: tutti e tre i modelli presentano evidenze di *clustering*, ma con intensità differenti. La simulazione storica risulta la più problematica sotto questo aspetto ( $p\text{-value} \approx 0.000044$ ), indicando che le violazioni tendono a concentrarsi in pochi periodi, tipicamente durante gli shock di mercato.

Il *test di Conditional Coverage* conferma il quadro: il metodo Monte Carlo risulta il meno affidabile in assoluto, mentre *EWMA* mostra un comportamento piuttosto in linea con le aspettative.

Il confronto delle perdite eccedenti la stima del VaR rafforza queste evidenze. Nei periodi critici, in particolare nel 2020, le perdite medie oltre la soglia del VaR sono risultate significativamente più elevate per il modello storico (oltre \$30.000) e per quello Monte Carlo (oltre \$26.000), a fronte di un valore di circa \$8.000 per *EWMA*. Questo implica che, nei giorni di superamento della soglia, i modelli non reattivi hanno registrato perdite più gravi, confermando una sottostima sistematica del rischio.

Tabella 3.5: Confronto tra i metodi di stima del VaR

Indicatore	Parametrico	EWMA	Storico	Monte Carlo
VaR medio stimato (%)	2,23%	2,08%	2,58%	2,16%
Numero di violazioni	55	26	33	59
<i>p</i> -value Test di Kupiec	0,000	0,861	0,133	0,000
<i>p</i> -value Test di Christoffersen	0,000	0,028	0,000	0,000
<i>p</i> -value Conditional Coverage	0,000	0,089	0,000	0,000
<b>Valutazione complessiva</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Rigettato</b>

In sintesi, nessuno dei modelli tradizionali si dimostra pienamente soddisfacente: l'EWMA eccede in prudenza, il metodo storico è statico e lento, e il Monte Carlo standard risulta fragile in presenza di eventi estremi. Questa evidenza empirica conferma la necessità di adottare un approccio più flessibile e realistico, evolvendo il modello Monte Carlo attraverso l'introduzione di:

- *tecniche di riduzione della varianza*, come l'*importance sampling*, per migliorare la precisione delle stime con un numero ridotto di simulazioni.
- una *distribuzione t-Student*, più adatta a modellare code pesanti;
- un *modello GARCH* per la volatilità condizionata, in grado di catturare le dinamiche temporali del rischio.

Questa combinazione, che verrà sviluppata nel prossimo capitolo, ha l'obiettivo di superare le rigidità riscontrate, restituendo una misura del rischio di mercato più coerente, robusta e affidabile anche in presenza di shock esogeni e condizioni di mercato non gaussiane.

## Capitolo 4

# Modello avanzato di simulazione Monte Carlo per la stima del rischio di mercato

Nel capitolo precedente sono stati analizzati i principali metodi tradizionali per la stima del VaR, evidenziandone pregi e limiti. In particolare, l'approccio parametrico sviluppato tramite *EWMA* è quello che fornisce i risultati migliori, nonostante le assunzioni alla base di questo modello siano estremamente limitanti per una stima corretta del rischio di mercato. D'altro canto, il metodo Monte Carlo risulta il più impreciso, influenzato dall'ipotesi di normalità dei rendimenti e l'assunzione di volatilità costante che conducono a una sottostima del rischio in presenza di eventi estremi e periodi di elevata turbolenza finanziaria.

Alla luce di tali considerazioni, questo capitolo si propone di introdurre un modello basato sulla simulazione Monte Carlo che superi i limiti del metodo tradizionale e si pone l'obiettivo di fornire una stima più accurata del metodo parametrico. L'analisi è effettuata sul portafoglio in analisi già utilizzato nel capitolo precedente per valutare i modelli tradizionali, così da poter confrontare al meglio questi ultimi

con la nuova metodologia, comprendendo eventuali scostamenti dei risultati. Inoltre, al fine di valutare l'efficacia degli approcci non solo in periodi in cui è presente un'elevata incertezza dei mercati finanziari ma anche su strumenti generalmente più volatili, viene sviluppata un'analisi su un portafoglio composto esclusivamente da *cryptoasset*, strumenti volatili per eccellenza. Infine, l'elaborato si conclude con una riflessione critica sui risultati ottenuti e l'individuazione di potenziali estensioni metodologiche per futuri approfondimenti.

## 4.1 Tecniche di riduzione della varianza

Uno dei problemi principali riscontrati nell'utilizzo della simulazione Monte Carlo per la misurazione del rischio finanziario riguarda la difficoltà nel trattare eventi che, pur avendo una probabilità molto bassa, possono avere un impatto rilevante. Queste situazioni, spesso trascurabili in altri contesti, sono invece cruciali per il calcolo di misure come il VaR o l'*Expected Shortfall*, soprattutto in presenza di portafogli complessi o di periodi caratterizzati da un'elevata incertezza dei mercati. Quando la probabilità di superare un certo livello di perdita è estremamente contenuta, una stima affidabile ottenuta con il metodo Monte Carlo classico, senza correzioni o accorgimenti, richiederebbe un numero di simulazioni talmente elevato da risultare, di fatto, impraticabile. Questo approccio, spesso definito *naive*<sup>1</sup>, presenta dunque seri limiti in termini di efficienza.

### 4.1.1 *Importance Sampling*

Una strategia largamente utilizzata per superare questo ostacolo è l'*importance sampling*. Questa tecnica permette di indirizzare il campionamento verso quelle

---

<sup>1</sup>Per simulazione *naive* si intende il metodo standard, in cui i dati vengono estratti direttamente dalla distribuzione originaria senza adottare strategie di riduzione della varianza.

aree in cui gli eventi rari hanno maggiore probabilità di verificarsi e quindi maggiore rilevanza statistica per l'obiettivo dell'analisi. In questo modo, oltre a migliorare la precisione delle stime, si ottiene anche una riduzione concreta del tempo di calcolo, poichè si evita di sprecare simulazioni in regioni irrilevanti dello spazio campionario. Questo aspetto si rivela particolarmente utile nei casi in cui il modello coinvolge un elevato numero di variabili, oppure quando si devono condurre numerose simulazioni, ad esempio per soddisfare requisiti normativi o per effettuare test di robustezza sui risultati.

Un esempio particolarmente efficace dei limiti della simulazione Monte Carlo standard viene proposto da M. Haugh (2016). L'autore richiama un episodio emblematico della crisi finanziaria del 2007, quando il CFO di *Goldman Sachs* giustificò le pesanti perdite subite dal fondo *Global Alpha* sostenendo che si erano verificati movimenti pari a 25 deviazioni standard per diversi giorni consecutivi. Se si assume una distribuzione normale standard per i rendimenti, un evento simile avrebbe una probabilità di accadere dell'ordine di  $10^{-138}$ . In un contesto simile, ottenere una stima significativa utilizzando la simulazione Monte Carlo tradizionale richiederebbe circa  $3.26 \times 10^{137}$  campioni, un numero evidentemente irrealizzabile.

Questa osservazione mette in luce l'importanza di adottare tecniche di riduzione della varianza per rendere più efficaci e gestibili le simulazioni. Tra le soluzioni disponibili, *importance sampling* occupa una posizione centrale. L'idea di base è semplice ma estremamente potente: si modifica la distribuzione da cui si campiona in modo da aumentare la frequenza di osservazione degli eventi rari, ovvero quelli che maggiormente influenzano le misure di rischio. Per mantenere l'imparzialità della stima, viene applicato un correttivo sotto forma di rapporto di verosimiglianza. In termini matematici, se  $f(x)$  rappresenta la densità originale e  $g(x)$  quella adottata per la simulazione, si ha:

$$\theta = \mathbb{E}_f[h(X)] = \mathbb{E}_g \left[ h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right]$$

dove  $h(X)$  indica la funzione che rappresenta il *payoff* o la perdita. Il corretto bilanciamento tra  $f(x)$  e  $g(x)$  permette così di ottenere una stima più precisa riducendo il numero necessario di simulazioni.

La reale efficacia dell'*importance sampling* dipende tuttavia dalla capacità di scegliere una distribuzione alternativa  $g(x)$  adatta allo scopo. Idealmente, questa dovrebbe assegnare maggiore probabilità agli scenari più rilevanti per la statistica che si intende stimare, ovvero a quelli in cui  $h(X)$  assume valori elevati. Nella pratica, però, assumere che i rendimenti seguano una normale standard può rivelarsi inadeguato: i mercati finanziari reali mostrano spesso code più pesanti, asimmetrie e volatilità variabile che una semplice distribuzione normale non riesce a descrivere in modo soddisfacente. Per rappresentare meglio questi fenomeni, una scelta più adatta è l'impiego di una distribuzione che, pur mantenendo una forma simile a quella gaussiana, presenta code più pesanti in modo da catturare più fedelmente il comportamento estremo dei rendimenti, come la t-Student.

Dal punto di vista tecnico, l'utilizzo della t-Student è del tutto giustificato. Come evidenziato da M. Haugh, molte tecniche sviluppate originariamente per il contesto normale si estendono senza difficoltà anche a modelli basati su distribuzioni t o su combinazioni di gaussiane. In particolare, un vettore t multivariato può essere generato partendo da un vettore normale standard e da una variabile casuale indipendente distribuita secondo una chi-quadro, rendendo l'implementazione efficiente e compatibile con gli algoritmi già consolidati.

Integrare l'*importance sampling* con l'uso della distribuzione t-Student permette quindi di affrontare due criticità fondamentali: da un lato, si aumenta la frequenza degli eventi rari nelle simulazioni; dall'altro, si migliora la rappresentazione statistica dei rendimenti osservati nei mercati. Questa combinazione risulta par-

ticolarmente efficace nella stima di misure di rischio condizionate, come il VaR condizionato o l'*Expected Shortfall*, che possono essere espresse come aspettative condizionate su eventi rari e risultano quindi estremamente sensibili sia alla forma della distribuzione sottostante sia alla qualità del metodo di simulazione adottato.

In conclusione, il ricorso all'*importance sampling*, supportato da modelli statistici più aderenti alla realtà come quelli basati sulla *t* di Student, rappresenta uno dei progressi più significativi nella simulazione Monte Carlo moderna applicata alla gestione del rischio. Attraverso questi strumenti, è possibile superare i limiti della simulazione tradizionale e ottenere stime più robuste e affidabili anche in condizioni di mercato particolarmente avverse (*fonte: M.Haugh, Monte Carlo methods for Risk Management, 2016[11]*).

#### **4.1.2 Stratified Sampling**

Un altro approccio efficace per ridurre la varianza nella simulazione Monte Carlo è rappresentato dallo *stratified sampling*. Questa tecnica si basa sull'idea di suddividere lo spazio delle possibili realizzazioni in sottoinsiemi omogenei, chiamati *strati*, ed effettuare il campionamento separatamente all'interno di ciascuno di essi. In questo modo si migliora la rappresentatività del campione e si ottiene una stima più precisa dell'obiettivo di interesse, riducendo al tempo stesso l'incertezza statistica.

Nel campo della gestione del rischio finanziario, questa tecnica si rivela particolarmente utile in tutti quei casi in cui i risultati dipendono fortemente da eventi estremi o da particolari configurazioni del mercato. Per esempio, nella stima di misure come il VaR o l'*Expected Shortfall*, dividere lo spazio campionario in base ai livelli di perdita può aiutare a catturare con maggiore precisione i comportamenti di coda della distribuzione, che sono quelli di maggior interesse.

Come illustrato da M. Haugh (2016), una delle applicazioni più immediate di que-

sta tecnica riguarda la valutazione di opzioni esotiche, come le opzioni asiatiche o le *barrier options*. In questi casi, una scelta efficace della variabile di stratificazione è il valore medio dei prezzi del sottostante o la somma dei rendimenti parziali, in quanto determinano in modo diretto l'entità del payoff finale.

Da un punto di vista formale, se si individua una variabile  $W$  su cui stratificare e si suddivide il suo dominio in  $m$  intervalli  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ , si può stimare l'atteso  $\theta = \mathbb{E}[Y]$  combinando le stime ottenute in ciascun strato secondo la formula:

$$\hat{\theta}_{st} = \sum_{j=1}^m p_j \hat{\theta}_j$$

dove  $p_j$  rappresenta la probabilità che  $W$  appartenga allo strato  $\Delta_j$  e  $\hat{\theta}_j$  è la media dei campioni estratti da quello stesso strato.

La chiave del successo del metodo risiede nella scelta intelligente della variabile  $W$ . In generale, è vantaggioso selezionare una variabile che sia altamente correlata con l'output  $Y$ , in modo che, all'interno di ogni strato, la variabilità residua sia la più contenuta possibile. Nel *pricing* di un'opzione asiatica, ad esempio, stratificare in base alla media dei log-rendimenti è una scelta naturale ed efficace.

Anche con una divisione semplice ed equamente ponderata degli strati, il metodo garantisce in genere una riduzione della varianza rispetto al campionamento casuale puro. Tuttavia, risultati ancora migliori si possono ottenere distribuendo il numero di simulazioni in modo proporzionale alla variabilità interna di ciascuno strato.

In definitiva, lo *stratified sampling* si conferma come uno strumento estremamente utile per aumentare l'efficienza delle simulazioni, soprattutto quando si ha una conoscenza preliminare della struttura della variabilità del problema in esame. Integrando tecniche come questa nei modelli di analisi del rischio, si ottengono stime più affidabili e si riducono sensibilmente i tempi computazionali richiesti (*fonte: M.Haugh, Monte Carlo methods for Risk Management, 2016[11]*).

## 4.2 Modellizzazione della volatilità: il modello GARCH

Nell'ambito della modellazione del rischio finanziario, uno degli aspetti più delicati riguarda la corretta rappresentazione della volatilità. I modelli tradizionali, come quelli basati su varianza storica o media mobile esponenziale, tendono a considerare la volatilità come una variabile costante o a evoluzione esogena. Tuttavia, le osservazioni empiriche mostrano con chiarezza che i mercati finanziari attraversano cicli in cui periodi relativamente stabili sono seguiti da fasi di elevata volatilità. Questo comportamento, descritto in letteratura come *volatility clustering*, ha spinto lo sviluppo di modelli capaci di descrivere una volatilità condizionata e dinamica<sup>2</sup>.

In questo contesto si colloca il modello GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), introdotto da Tim Bollerslev nel 1986 come naturale estensione del modello ARCH di Engle<sup>3</sup>. Rispetto alla formulazione originale dell'ARCH, il modello GARCH permette di catturare in modo più parsimonioso ma al tempo stesso più flessibile la dinamica della varianza condizionata. Infatti, mentre l'ARCH si limita a considerare l'impatto degli shock passati, il GARCH introduce anche un termine autoregressivo sulla varianza stessa, riconoscendo che la volatilità futura non dipende solo dai rendimenti recenti, ma anche dalla volatilità che li ha preceduti. Questo aspetto consente una maggiore stabilità nelle stime e una rappresentazione più accurata della struttura temporale dei dati finanziari, soprattutto nei periodi in cui i mercati attraversano shock persistenti.

---

<sup>2</sup>R. F. Engle, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 1982[8].

<sup>3</sup>T. Bollerslev, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 1986[3]

Il modello GARCH(1,1), il più utilizzato nella pratica per la sua semplicità e capacità di adattamento, può essere espresso nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \varepsilon_t, \\
 \varepsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

In questa specifica,  $\omega > 0$  e  $\alpha, \beta \geq 0$  sono i parametri da stimare, mentre la condizione  $\alpha + \beta < 1$  garantisce la stazionarietà debole del processo. In termini intuitivi, ciò significa che la volatilità osservata oggi dipende in parte dagli shock recenti e in parte dalla volatilità di ieri. È proprio questa memoria di breve periodo che permette al GARCH di riflettere la persistenza empirica della volatilità nei mercati.

Un elemento teoricamente significativo riguarda la capacità del GARCH di rappresentare la leptocurtosi, ovvero code più spesse rispetto a quelle della distribuzione normale. Come mostrato da Bollerslev<sup>3</sup>, il modello GARCH, pur mantenendo la normalità degli shock standardizzati  $z_t$ , riesce a generare una distribuzione dei rendimenti con una curtosi elevata, fenomeno ampiamente riscontrato nei dati reali. Inoltre, all'aumentare della somma  $\alpha + \beta$ , cresce la persistenza della varianza, rendendo il modello particolarmente adatto a scenari finanziari instabili, in cui la volatilità tende a propagarsi nel tempo.

Dal punto di vista matematico, un aspetto cruciale è l'esistenza dei momenti superiori della distribuzione. La varianza (secondo momento) esiste solo se  $\alpha + \beta < 1$ , ma per la curtosi (quarto momento) e oltre, la condizione è ancora più stringente. Questo implica che, in certe condizioni parametriche, la distribuzione dei rendimenti simulati da un GARCH può non possedere momenti finiti di ordine elevato, riflettendo in modo ancora più fedele la natura irregolare e rischiosa dei

mercati finanziari<sup>4</sup>.

Nel modello standard, gli shock  $z_t$  sono distribuiti secondo una normale standard. Tuttavia, è ormai consolidato che questa ipotesi tenda a sottostimare la probabilità di eventi rari. Per questo motivo, in questa applicazione si preferisce utilizzare una distribuzione t-Student, che presenta code più spesse. La distribuzione t dipende da un parametro  $\nu$ , detto gradi di libertà, che controlla proprio il peso delle code: all'aumentare di  $\nu$ , la distribuzione si avvicina alla normale.

Uno degli elementi più significativi dell'utilizzo della t-Student è che consente di ottenere stime del VaR maggiormente in linea con le osservazioni empiriche. Diversi studi hanno mostrato che la probabilità di violazione del VaR stimato con una t-Student è generalmente più coerente con quanto osservato nei backtest<sup>5</sup>.

L'elevata adattabilità dei modelli GARCH e delle distribuzioni t-Student nella previsione dell'andamento dei rendimenti finanziari, permette di integrare queste metodologie con il metodo Monte Carlo che assicura flessibilità e accuratezza, in modo da generare una stima del VaR quanto più coerente possibile con la distribuzione empirica delle perdite.

Il procedimento, sinteticamente, prevede i seguenti passaggi:

1. Stima dei parametri  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e dei gradi di libertà  $\nu$  su una serie storica di rendimenti;
2. Generazione di una sequenza di shock  $z_t \sim t_\nu$ ;
3. Evoluzione dinamica della varianza condizionata  $\sigma_t^2$  mediante la formula ricorsiva del GARCH;
4. Calcolo dei rendimenti simulati tramite  $r_t = \mu + \sigma_t z_t$ ;

---

<sup>4</sup>P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2004[10].

<sup>5</sup>McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press[18].

5. Valutazione delle misure di rischio come il VaR sulle traiettorie ottenute.

Questo approccio consente di modellare in modo flessibile sia la dinamica temporale della volatilità sia l'asimmetria e la pesantezza delle code nei rendimenti. È particolarmente utile in contesti in cui si richiede una stima robusta del rischio, come per portafogli con strumenti derivati o in mercati emergenti.

In sintesi, il modello GARCH rappresenta un'evoluzione significativa nella modellazione del rischio di mercato. La sua struttura relativamente semplice, unita alla capacità di rappresentare comportamenti complessi, ne fa uno strumento imprescindibile per chi opera nel campo della finanza quantitativa. L'integrazione con la distribuzione t-Student e l'impiego in simulazioni Monte Carlo ampliano ulteriormente il suo potenziale applicativo.

Nel prossimo paragrafo verrà presentata l'analisi svolta sul portafoglio di riferimento su cui sono stati analizzati i modelli tradizionali per verificare se l'approccio ipotizzato risulti efficiente applicato a dati empirici.

### 4.3 Implementazione del metodo Monte Carlo per la stima del VaR

Nel contesto dell'analisi del rischio di mercato, si è sviluppato un modello di simulazione Monte Carlo che integra tre componenti chiave: un processo GARCH(1,1) per modellare l'evoluzione temporale della volatilità, una distribuzione t-Student per catturare le code pesanti osservate nei dati di mercato e l'applicazione dell'*importance sampling* per migliorare l'efficienza e la precisione delle stime, specialmente nei quantili più estremi della distribuzione dei rendimenti.

L'analisi è basata sullo stesso portafoglio *equally-weighted* di dieci asset con osservazioni giornaliere dal 2014 al 2024, già utilizzato per l'analisi dei modelli

tradizionali, descritto nel paragrafo 3.2. Dopo aver filtrato valori nulli o non positivi, i dati sono stati trasformati in rendimenti logaritmici, base necessaria per la stima di modelli di volatilità condizionata.

Per ciascuna finestra mobile di 250 giorni, viene stimato un modello GARCH(1,1) sui rendimenti annualizzati moltiplicati per 100. Questo consente di ottenere una misura aggiornata della varianza condizionata al tempo  $t$ ,  $\sigma_t^2$ , calcolata come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

Tale formulazione riflette il fatto che la volatilità non è costante, ma evolve nel tempo in funzione della storia dei rendimenti, permettendo di cogliere la tipica persistenza osservata nei mercati finanziari.

Parallelamente, viene stimato per ogni finestra il parametro di forma  $\nu$  della distribuzione t-Student mediante massimizzazione della log-verosimiglianza. Questo approccio permette di adattare la distribuzione degli shock simulati in funzione delle caratteristiche locali dei rendimenti. La presenza della t-Student consente di attribuire maggiore probabilità agli eventi di coda, andando oltre i limiti della normale standard nella modellazione del rischio estremo.

La simulazione Monte Carlo vera e propria consiste nella generazione di 10.000 rendimenti futuri utilizzando la media osservata nella finestra, la deviazione standard condizionata stimata dal GARCH e i gradi di libertà della t-Student. Tuttavia, per aumentare la precisione della stima del VaR nella regione estrema della distribuzione, dove la probabilità è bassa ma l'impatto può essere molto significativo, viene implementata una tecnica di *importance sampling*.

In particolare, le simulazioni vengono ripesate secondo un'esponenziale decrescente rispetto al valore simulato, attribuendo maggior peso alle perdite più elevate. Il peso di ogni simulazione è calcolato come:

$$w_i = e^{\theta r_i}$$

dove  $r_i$  rappresenta il rendimento simulato e  $\theta$  un parametro scelto per accentuare la probabilità degli eventi rilevanti. Le simulazioni vengono quindi ordinate in base all'entità della perdita e viene calcolato il VaR come il valore corrispondente al quantile pesato al livello di confidenza del 99%.

Questo approccio presenta molteplici vantaggi: la componente GARCH permette di adattarsi alla struttura dinamica della volatilità, la distribuzione t-Student garantisce robustezza nei confronti di eventi estremi, e l'*importance sampling* riduce la varianza della stima focalizzando le risorse computazionali sulle regioni più rilevanti dello spazio campionario. La combinazione di questi tre elementi consente una stima del VaR più affidabile e sensibile alle condizioni di mercato rispetto alle tecniche standard.

Nel paragrafo successivo verrà analizzato il comportamento empirico del modello, presentando il numero di violazioni osservate, l'entità media delle perdite eccedenti e la sua performance nei test di valutazione dei modelli VaR.

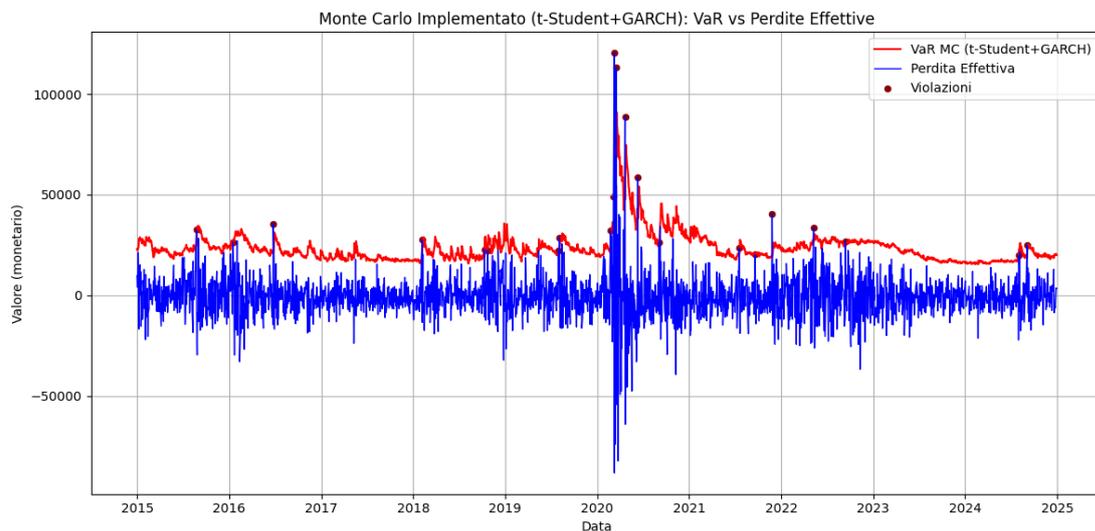
### 4.3.1 Analisi empirica dei risultati

L'applicazione del modello presentato ha restituito una panoramica articolata del comportamento del rischio di mercato su un periodo di osservazione compreso tra il 2015 e il 2024. L'obiettivo di questa analisi empirica era duplice: da un lato valutare la capacità predittiva del modello in condizioni di normalità dei mercati, dall'altro testarne la robustezza durante fasi di elevata instabilità, come quella vissuta nel 2020 in seguito alla pandemia da COVID-19.

Su un totale di 2.512 osservazioni giornaliere, il numero complessivo di violazioni del VaR è risultato pari a 22. Considerando un livello di confidenza del 99%, si attendevano in media 25 violazioni, dunque il numero osservato rientra perfettamente nelle aspettative teoriche. Il *test di Kupiec* ha confermato la vali-

dità statistica di questa evidenza: la statistica  $LR$  è risultata pari a 0,411 con un  $p$ -value di 0,521, sufficiente per non rigettare l'ipotesi nulla di copertura adeguata.

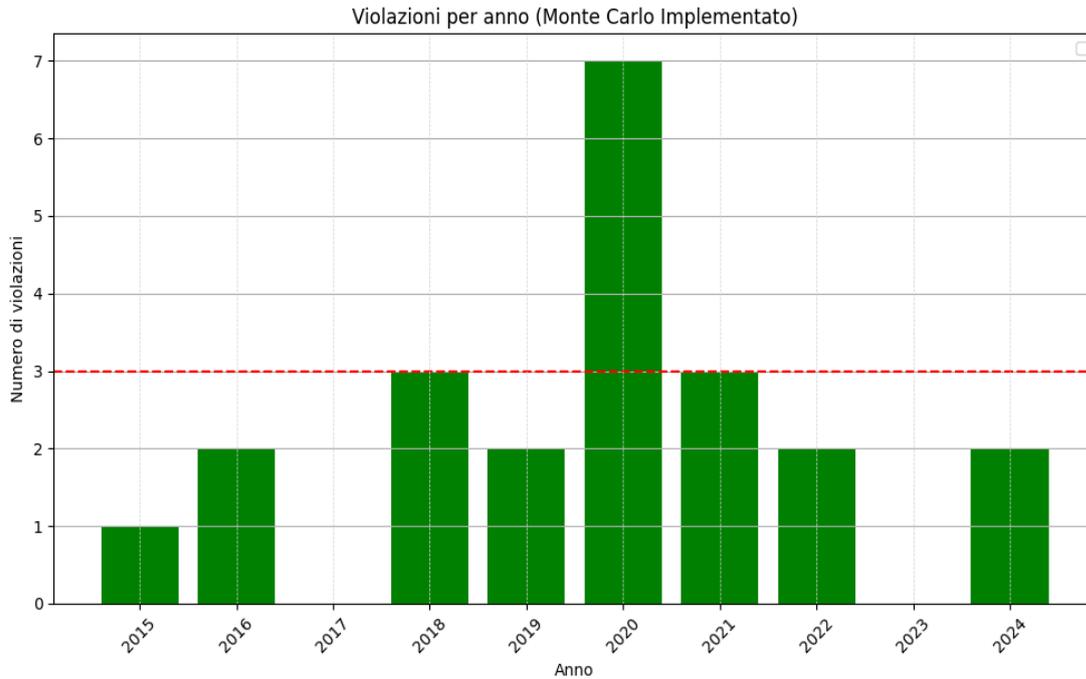
La Figura 4.1 riassume visivamente l'evoluzione del VaR stimato e delle perdite effettive giornaliere sull'intero orizzonte temporale. Il VaR mostra una dinamica coerente con i periodi di maggiore o minore turbolenza dei mercati: tende ad aumentare nei momenti di instabilità e a stabilizzarsi nei periodi più tranquilli. Le perdite effettive risultano per lo più contenute all'interno della fascia di rischio prevista dal modello, con poche e sparse violazioni, a conferma della buona capacità di adattamento del sistema.



**Fig. 4.1:** Confronto tra VaR stimato e perdite effettive giornaliere (2015–2024)

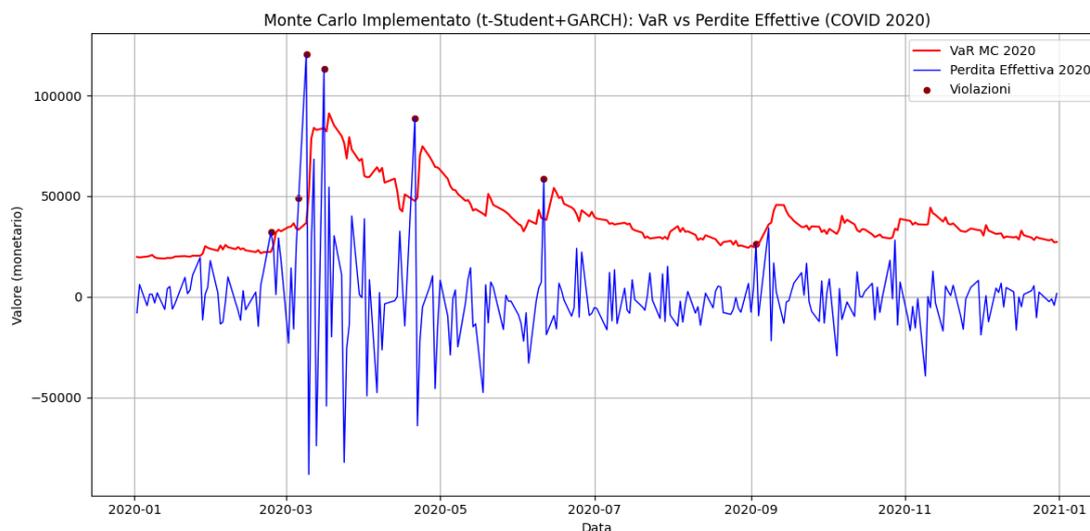
Un approfondimento sul numero di violazioni su base annua, riportato in Figura 4.2, mostra un comportamento regolare, con picchi solo sporadici. Tuttavia, il 2020 rappresenta un'eccezione importante: in quell'anno si sono registrate 7 violazioni, valore ben superiore rispetto alla soglia teorica. Questo dato trova conferma anche nel test di Kupiec specifico per il 2020, il quale restituisce un valore della statistica pari a 5,424 e un  $p$ -value di 0,020, sufficiente per rigettare l'ipotesi

nulla di corretta copertura. La spiegazione va ricercata nella natura eccezionale della crisi pandemica, che ha generato un improvviso e repentino aumento della volatilità, difficilmente catturabile anche dai modelli più sofisticati.



**Fig. 4.2:** Numero di violazioni annuali del VaR stimato (linea rossa = soglia attesa)

La Figura 4.3 mostra nel dettaglio l'andamento del VaR e delle perdite effettive durante l'intero anno 2020. Si notano chiaramente alcune giornate, soprattutto tra febbraio e marzo, in cui le perdite osservate superano in modo significativo la soglia del VaR. Ciò suggerisce che, nonostante l'impiego del GARCH per l'aggiornamento dinamico della volatilità e della t-Student per gestire le code pesanti, il modello non riesce a reagire con sufficiente tempestività a shock improvvisi di grande portata. Questo tipo di fallimento è coerente con la letteratura sul rischio estremo e costituisce una delle principali motivazioni per cui si stanno sviluppando tecniche di simulazione ancora più avanzate.



**Fig. 4.3:** Anno 2020: VaR simulato e perdite effettive durante la crisi COVID-19

Oltre al numero di violazioni, un altro indicatore utile è rappresentato dalla perdita media in eccesso, cioè l'entità media delle perdite nei soli giorni in cui il VaR viene superato. Anche qui i risultati sono significativi: durante il 2020 la perdita media ha raggiunto circa \$28.756, mentre negli anni più stabili si mantiene su livelli molto più contenuti (ad esempio \$3.404 nel 2019 o \$5.000 nel 2018). Questo dato evidenzia che, nei rari casi in cui il VaR viene superato, l'entità della perdita può risultare alquanto contenuta in periodi di stabilità dei mercati, ma molto significativa e potenzialmente dannosa per l'investitore in periodi di elevata volatilità, sottolineando l'importanza di considerare anche misure come l'Expected Shortfall.

Infine, per valutare la validità temporale delle previsioni, sono stati eseguiti due test di backtesting: il *test di Christoffersen*, che verifica l'indipendenza delle violazioni nel tempo, e il test di *Conditional Coverage*, che combina l'informazione del test di Kupiec con quella di Christoffersen. Il primo ha restituito un  $p$ -value pari a 0,187 e il secondo un  $p$ -value pari a 0,341. In entrambi i casi, l'ipotesi nulla

è stata accettata, confermando che non solo la frequenza delle violazioni è in linea con quelle attese, ma anche che queste sono distribuite in modo indipendente nel tempo.

Di seguito, è presente una Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti per questo approccio 4.1.

Tabella 4.1: Risultati metodo Monte Carlo implementato

<b>Descrizione</b>	<b>Valore</b>	<b>Esito</b>
VaR medio stimato (%)	2,35%	-
Numero di violazioni	22	Accettato
<i>p</i> -value Test di Kupiec	0,521	Accettato
<i>p</i> -value Test di Christoffersen	0,187	Accettato
<i>p</i> -value Conditional Coverage Test	0,341	Accettato
<b>Valutazione complessiva</b>		<b>Accettato</b>

Nel complesso, l'evidenza empirica suggerisce che questo approccio basato sul metodo Monte Carlo riesce a fornire una rappresentazione credibile e robusta del rischio di mercato in condizioni ordinarie. Sebbene, come mostrato nel caso del 2020, persistano difficoltà nel catturare eventi estremi particolarmente rapidi e violenti, la metodologia si conferma superiore rispetto agli approcci più semplici in termini di coerenza statistica, realismo dei rendimenti simulati e capacità di adattamento alle condizioni di mercato<sup>6</sup>.

Al fine di condurre un'analisi comparativa più robusta, nel prossimo paragrafo verranno analizzate le differenze tra i diversi modelli per individuare la metodologia più efficace.

---

<sup>6</sup>L'analisi è stata sviluppata tramite il codice Python in Appendice (A.8)

### 4.3.2 Confronto con i modelli tradizionali

L'obiettivo di questa sezione è quello di confrontare criticamente il metodo Monte Carlo implementato con i principali approcci tradizionali nella stima del VaR. Tale confronto viene condotto sia sul piano teorico sia attraverso evidenze empiriche derivate dai test di validazione dei modelli VaR e dall'analisi delle perdite osservate. I modelli tradizionali considerati includono il metodo parametrico EWMA, la simulazione storica e il Monte Carlo standard con assunzione di normalità e volatilità costante. L'approccio proposto, invece, integra in maniera sinergica un processo GARCH(1,1), una distribuzione t-Student per modellare le code pesanti e la tecnica dell'*importance sampling* per migliorare l'efficienza statistica delle simulazioni.

Il primo confronto si basa sull'esito dei principali test di backtesting: *Kupiec*, *Christoffersen* e *Conditional Coverage*. Questi test servono a valutare se il numero di violazioni è coerente con il livello di confidenza scelto e se le violazioni sono distribuite in modo indipendente nel tempo.

<b>Metodo</b>	<b>Kupiec</b>	<b>Christoffersen</b>	<b>Cond. Coverage</b>
EWMA	Accettato	Rigettato	Accettato
Storico	Accettato	Rigettato	Rigettato
MC Normale	Rigettato	Rigettato	Rigettato
MC Implementato	Accettato	Accettato	Accettato

La tabella evidenzia con chiarezza come il solo modello a superare con successo tutti i test di backtesting sia il Monte Carlo implementato. A differenza degli altri metodi, che presentano almeno una criticità significativa, il modello proposto fornisce una copertura completa sia in termini di frequenza delle violazioni, sia nella loro distribuzione temporale.

Il *test di Kupiec* restituisce un *p-value* pari a 0,521 per il Monte Carlo implementato, indicando che 22 violazioni su 2.512 osservazioni sono perfettamente compatibili con l'ipotesi di correttezza. Questo valore contrasta fortemente con quello del Monte Carlo standard, il cui *p-value* scende fino a  $1,76 \times 10^{-8}$  a fronte di ben 58 violazioni: oltre il doppio rispetto a quanto atteso. Anche il metodo storico e l'approccio EWMA, pur rispettando il numero di violazioni teorico, risultano meno affidabili: ad esempio, il metodo storico registra 33 violazioni con un *p-value* pari a 0,132, comunque lontano dai livelli di confidenza ottimali.

Il *test di Christoffersen* penalizza ulteriormente i metodi tradizionali: la simulazione storica e il Monte Carlo normale evidenziano rispettivamente *p-value* pari a  $4,4 \times 10^{-5}$  e  $3,9 \times 10^{-5}$ , dimostrando una tendenza al *clustering* degli errori, particolarmente dannosa nei contesti di stress di mercato. Anche EWMA mostra segnali di dipendenza (con *p-value* di 0,028), mentre l'approccio proposto mantiene una buona indipendenza nel tempo con un *p-value* di 0,187.

Nel complesso, il *Conditional Coverage test* fornisce una sintesi più completa: in questo contesto, il Monte Carlo implementato è uno dei due modelli che superano il test, con un *p-value* pari a 0,341, mentre l'unico altro metodo che risulta accettabile è l'EWMA, il cui *p-value* di 0,089, seppur più vicino al limite critico, rientra comunque nella soglia di accettazione al 5%. Al contrario, sia la simulazione storica che quella Monte Carlo standard vengono rigettate con ampio margine: quest'ultima in particolare presenta un *p-value* prossimo a zero ( $2,7 \times 10^{-11}$ ), a ulteriore conferma dell'inadeguatezza delle sue ipotesi semplificative nella stima del rischio di mercato.

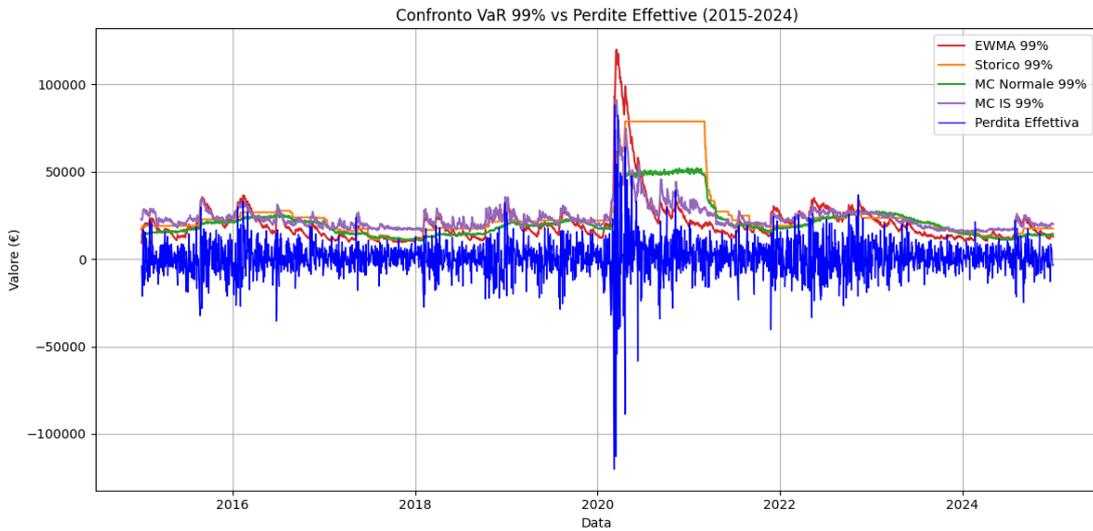
Il confronto dimostra quindi che, sebbene EWMA riesca a mantenere un buon equilibrio tra frequenza e indipendenza delle violazioni, il Monte Carlo implementato si distingue per una performance complessiva più solida, con valori di test più stabili e coerenti lungo tutto l'orizzonte temporale considerato. Inoltre, la mag-

giore flessibilità del modello e la capacità di adattarsi dinamicamente a condizioni di mercato estreme ne fanno un candidato preferenziale per applicazioni operative in contesti ad alta variabilità.

Questo confronto mostra come non basti semplicemente centrare il numero atteso di violazioni: è fondamentale che esse siano distribuite in modo indipendente e coerente nel tempo, per garantire la credibilità del modello anche nel medio-lungo termine. In questa prospettiva, l'approccio proposto si rivela superiore sotto ogni profilo, riuscendo a conciliare rigore statistico, aderenza empirica e stabilità delle previsioni.

Dal punto di vista qualitativo, un ruolo fondamentale nella valutazione dei modelli di stima del rischio è ricoperto dall'analisi delle traiettorie del VaR rispetto alle perdite effettivamente osservate. Infatti, sebbene i test statistici forniscano una misura formale della bontà delle previsioni, è proprio attraverso l'osservazione diretta dell'allineamento tra stime e realtà che è possibile cogliere eventuali inefficienze, ritardi di risposta o errori sistematici nella dinamica predittiva. L'utilità di tale analisi aumenta ulteriormente in contesti caratterizzati da alta variabilità dei mercati, dove è essenziale che un modello di rischio reagisca con prontezza a improvvisi cambiamenti di regime.

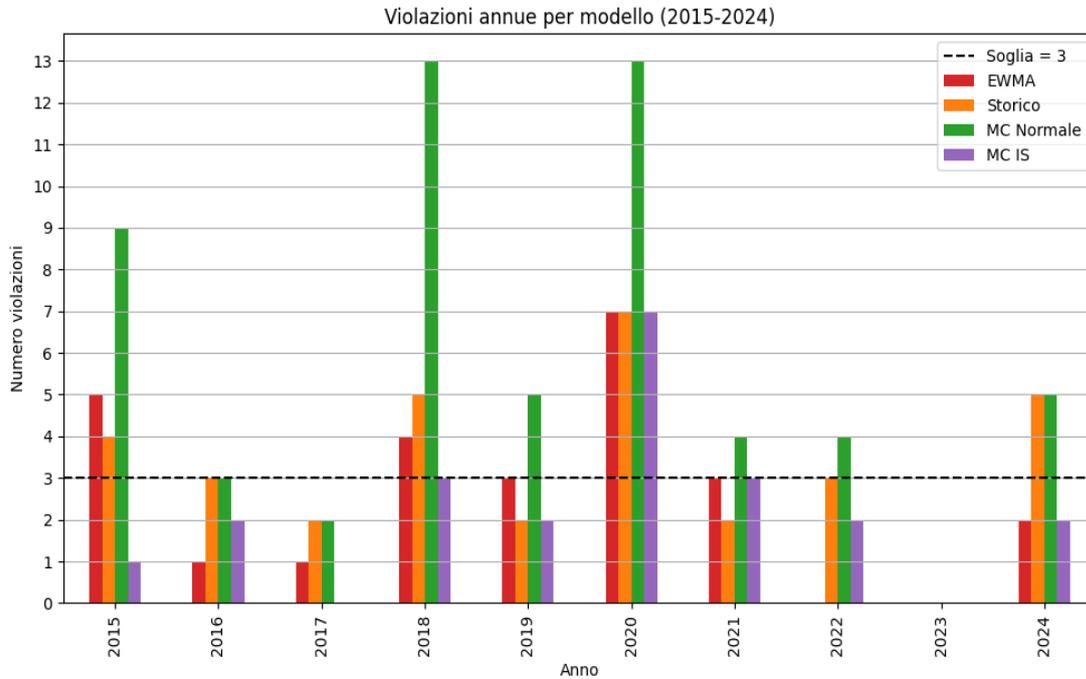
A tale scopo, il grafico 4.4 sintetizza l'andamento del VaR calcolato con ciascuno dei modelli considerati, confrontandolo con le effettive perdite giornaliere registrate sul portafoglio di riferimento, nel periodo compreso tra il 2015 e il 2024. Il grafico, oltre a mostrare la coerenza generale delle stime, consente anche di valutare visivamente la tempestività della risposta dei diversi approcci agli shock di mercato e la capacità di ciascun metodo di mantenere un margine prudenziale sufficiente senza incorrere in eccessi di conservativismo.



**Fig. 4.4:** Confronto tra le stime del VaR e le perdite effettive (2015–2024).

Osservando il grafico, si nota chiaramente come il modello proposto riesca a seguire in modo più fedele l'andamento effettivo delle perdite, soprattutto nei momenti di maggiore turbolenza. In particolare, la stima del VaR sembra reagire con tempestività durante le fasi di forte instabilità, mantenendo un comportamento prudente nei momenti critici ma evitando di eccedere nei periodi successivi. La simulazione Monte Carlo tradizionale, invece, appare più rigida e tende a sottostimare l'impatto degli shock, offrendo una protezione meno efficace proprio quando sarebbe più necessaria. Anche il metodo storico, sebbene fondato su dati concreti, mostra una certa lentezza nell'aggiornarsi: le sue stime si adattano con ritardo e in alcuni casi si mantengono elevate anche quando il contesto è tornato più stabile. Il modello EWMA si colloca a metà strada: più reattivo rispetto allo storico, ma meno capace di adattarsi in profondità alle dinamiche di mercato più complesse. Nel complesso, il confronto tra i diversi modelli mette in evidenza quanto sia importante adottare strumenti capaci di cogliere non solo l'entità del rischio, ma anche la velocità con cui questo può cambiare.

Un ulteriore confronto è dato dalla distribuzione delle violazioni lungo l'intero orizzonte temporale. In particolare, è utile valutare quante volte il valore effettivo delle perdite ha superato il VaR teorico su base annua.



**Fig. 4.5:** Numero di violazioni annuali per ciascun modello (2015–2024).

Come si evince dal grafico 4.5, il comportamento del modello Monte Carlo implementato si distingue in maniera positiva rispetto alle alternative. Le sue violazioni annuali risultano infatti costantemente contenute, e soprattutto inferiori alla soglia teorica di tre violazioni annue (valore atteso in corrispondenza di un livello di confidenza del 99% su circa 250 osservazioni annue). Questa coerenza suggerisce che il modello riesce non solo a stimare correttamente il rischio medio, ma anche a reagire tempestivamente a eventuali aumenti della volatilità nei mercati.

In netto contrasto, la simulazione Monte Carlo classica evidenzia una marcata instabilità nel numero di violazioni, con picchi eccessivi in alcuni anni, in partico-

lare durante fasi di turbolenza, che indicano una sottovalutazione sistematica del rischio.

Anche i metodi storici e parametrico (EWMA) mostrano delle debolezze: se da un lato la loro variabilità è meno accentuata rispetto al Monte Carlo standard, dall'altro si registrano episodi di sottostima importante del rischio, soprattutto nei periodi più critici. In tale contesto, il numero di violazioni risulta ben al di sopra della soglia attesa, mettendo in discussione la capacità di questi modelli di offrire una protezione efficace in momenti di reale stress finanziario. In particolare, la simulazione storica soffre di una scarsa reattività agli shock improvvisi, mentre il metodo EWMA, sebbene più dinamico, non riesce sempre a modulare il rischio in modo sufficientemente prudenziale.

Oltre alla frequenza, anche la gravità delle perdite rappresenta un indicatore importante. Di seguito viene riportata una tabella con la media annua delle perdite eccedenti il VaR stimato.

<b>Anno</b>	<b>EWMA</b>	<b>Storico</b>	<b>Monte Carlo</b>	<b>MC Implementato</b>
2015	2.972,18	5.002,74	4.452,79	7.633,28
2016	9.551,85	3.473,19	6.904,69	8.030,09
2017	2.481,12	1.263,38	3.240,06	–
2018	3.359,48	4.464,82	4.922,06	5.001,30
2019	3.959,81	4.697,62	3.620,84	3.404,70
2020	8.010,50	30.255,11	26.649,39	28.755,72
2021	5.860,56	11.500,45	7.789,14	8.174,13
2022	–	4.423,08	4.524,92	4.348,82
2023	–	–	–	–
2024	1.049,32	5.036,70	6.643,28	3.943,67

Come si può notare dalla tabella dei valori annui, il metodo proposto fornisce

in realtà perdite più elevate degli altri metodi, proprio perchè l'utilizzo della distribuzione t-Student permette al metodo di evitare sovrastime del rischio e quindi la distribuzione del VaR risulta più "aderente" a quella delle perdite effettive, non riuscendo quindi a reagire prontamente nel momento di shock dignificativi improvvisi.

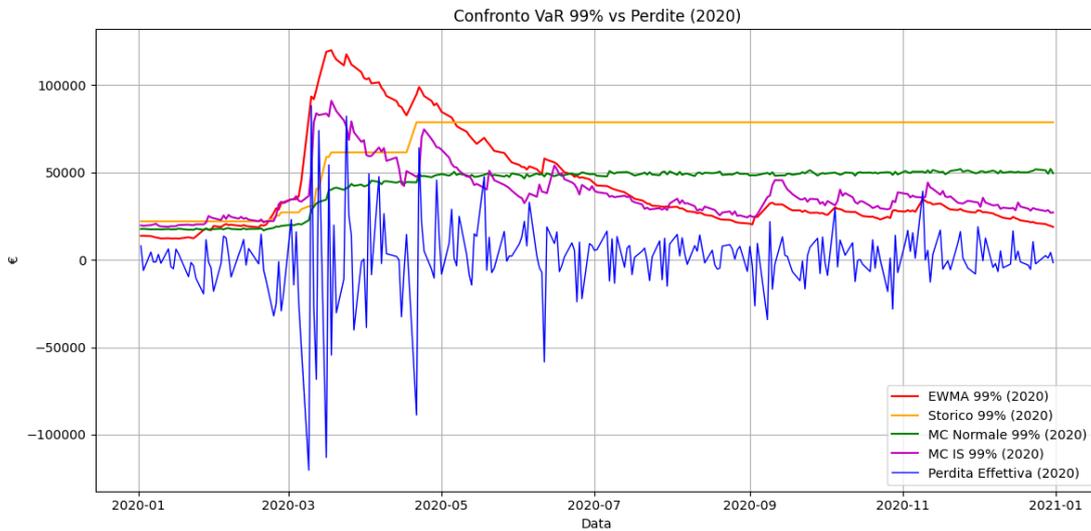
Un caso particolarmente significativo è rappresentato dall'anno 2020: il metodo basato su EWMA produce una perdita media annua molto inferiore ai metodi di simulazione, questo dato non è sempre positivo come sembra poichè, dato che il modello parametrico in quasi tutti gli anni registra una perdita media inferiore agli altri, potrebbe delineare una sovrastima sistemica del rischio di mercato.

Inoltre, è importante sottolineare che la coerenza tra frequenza delle violazioni e severità delle perdite è una delle caratteristiche distintive dell'approccio proposto. Molti modelli riescono a contenere il numero di violazioni, ma non forniscono una stima accurata dell'entità delle stesse. Il Monte Carlo implementato, invece, mostra come sia possibile raggiungere un equilibrio virtuoso: poche violazioni e, laddove esse si verificano, una quantificazione precisa e coerente con l'intensità del rischio sottostante. Questo lo rende particolarmente adatto in un contesto normativo sempre più attento non solo alla frequenza degli eventi critici, ma anche alla loro materialità.

Infine, concentrandosi sull'andamento delle stime dei modelli nell'anno 2020, risulta evidente la differenza tra l'approccio proposto e quelli tradizionali. Durante questo periodo di forti turbolenze, innescato dalla diffusione globale della pandemia da COVID-19 e dal conseguente shock sui mercati finanziari, le differenze tra i modelli di stima del rischio sono emerse con particolare evidenza.

Il metodo Monte Carlo implementato ha mostrato una risposta rapida e coerente all'aumento improvviso della volatilità: la stima del VaR si è adeguata in tempi brevi all'entità dei movimenti di mercato, offrendo una protezione adeguata proprio

nei momenti in cui il rischio reale raggiungeva i suoi massimi livelli.



**Fig. 4.6:** VaR vs Perdite Effettive anno 2020.

In netto contrasto, il metodo parametrico basato su EWMA e la simulazione Monte Carlo standard hanno evidenziato limiti strutturali importanti. Entrambi hanno mostrato un ritardo significativo nell’adattarsi al repentino cambiamento di regime. In particolare, la stima del VaR è rimasta su livelli troppo ottimistici proprio quando le perdite effettive registravano i picchi più severi. Questo ritardo è particolarmente critico in contesti reali, poichè compromette l’efficacia del modello nel proteggere il portafoglio da eventi estremi, esponendo gli operatori a rischi non adeguatamente coperti.

Il metodo storico, invece, ha mostrato una dinamica opposta: nel breve periodo iniziale ha seguito con precisione l’andamento delle perdite, ma una volta passata la fase acuta, ha continuato a fornire stime eccessivamente elevate del VaR, segnalando un rischio ormai attenuato. Questo comportamento dipende dalla natura stessa del modello storico, che non distingue tra osservazioni attuali e passate, mantenendo nella finestra di calcolo eventi estremi che non sono più rilevanti,

con il risultato di sovrastimare il rischio in maniera persistente anche quando le condizioni di mercato iniziano a stabilizzarsi.

In sintesi, la capacità del modello Monte Carlo implementato di adattarsi in modo flessibile e tempestivo alla volatilità del mercato, aumentando la stima del VaR durante le fasi critiche e riducendola quando le condizioni migliorano, rappresenta un punto di forza evidente. La robustezza del metodo, unita a una buona reattività e a una stima accurata della distribuzione delle perdite, dimostra non solo una migliore aderenza alla realtà dei mercati, ma anche un potenziale applicativo più ampio in contesti normativi e operativi che richiedono precisione, affidabilità e flessibilità.

Un riepilogo dei risultati ottenuti da tutti i modelli analizzati è riportato nella Tabella 4.3.

Tabella 4.2: Confronto tra i metodi di stima del VaR

<b>Indicatore</b>	<b>EWMA</b>	<b>Storico</b>	<b>Monte Carlo</b>	<b>MC Impl.</b>
VaR medio stimato (%)	2,08%	2,58%	2,16%	2,35%
Numero di violazioni	26	33	59	22
<i>p</i> -value Kupiec	0,861	0,133	0,000	0,521
<i>p</i> -value Christoffersen	0,028	0,000	0,000	0,187
<i>p</i> -value Conditional Coverage	0,089	0,000	0,000	0,341
<b>Valutazione complessiva</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Accettato</b>

Alla luce di queste evidenze, il Monte Carlo implementato appare non solo come una soluzione teoricamente raffinata, ma anche come uno strumento operativo credibile, robusto e adatto alle esigenze del risk management contemporaneo. Il suo impiego è particolarmente indicato in contesti di alta incertezza o in portafogli complessi, dove è fondamentale disporre di modelli capaci di rappresentare

fedelmente la struttura del rischio e di supportare decisioni coerenti con la reale esposizione ai mercati.

## 4.4 Applicazione ad un portafoglio *crypto*: robustezza in ambienti ad alta volatilità

Al fine di rafforzare ulteriormente l'analisi proposta in questa tesi, si è deciso di testare i modelli sviluppati su un portafoglio composto da strumenti notoriamente più volatili rispetto agli asset tradizionali: le criptovalute. Questa scelta non è casuale, le cryptoattività rappresentano oggi uno degli ambiti più dinamici e complessi dell'intero panorama finanziario, caratterizzate da una fortissima incertezza, da una struttura di mercato ancora in fase di maturazione e da una frequenza elevata di eventi estremi. Proprio per questo, risultano un terreno ideale per mettere alla prova la robustezza dei modelli di stima del rischio, che devono essere in grado di adattarsi rapidamente a condizioni di mercato estreme e non lineari.

L'obiettivo è quello di valutare la capacità dei tre approcci analizzati, il metodo parametrico basato su EWMA, la simulazione storica e il Monte Carlo implementato con GARCH, t-Student e *importance sampling*, di fornire stime accurate e affidabili anche in presenza di asset la cui distribuzione dei rendimenti è fortemente non normale, leptocurtica e talvolta asimmetrica. In un contesto come quello delle criptovalute, la semplice assunzione di normalità risulta infatti particolarmente inadeguata, rendendo necessario l'impiego di strumenti più flessibili e sofisticati.

Questa sezione si propone dunque di verificare se le conclusioni precedenti, relative all'efficacia del modello Monte Carlo implementato rispetto ai metodi tradizionali, possano essere confermate anche in un contesto più complesso e meno prevedibile come quello delle cryptoattività.

#### 4.4.1 Struttura e composizione del portafoglio

Il portafoglio oggetto dell'analisi è composto da otto criptovalute selezionate tra le più capitalizzate e liquide del mercato nel periodo considerato. In particolare, l'analisi copre un arco temporale che va da gennaio 2018 a dicembre 2024, un intervallo che include fasi di forte crescita speculativa, crolli improvvisi e l'emergere di dinamiche macroeconomiche globali (inflazione, tassi d'interesse, regolamentazione) che hanno influenzato anche il comparto crypto. Tutti gli asset sono stati ponderati con lo stesso peso (equiponderazione), assumendo quindi una distribuzione uniforme del capitale investito, ipotesi che consente di isolare l'effetto dei modelli di stima indipendentemente dalla componente allocativa.

Il livello di confidenza adottato per la stima del Value at Risk è pari al 99%, coerentemente con quanto fatto nell'analisi precedente, al fine di mantenere la comparabilità dei risultati. I rendimenti sono stati calcolati su base giornaliera a partire dalle serie di prezzi disponibili nel file allegato, correttamente filtrati per rimuovere eventuali anomalie o valori nulli.

Il portafoglio è composto dai seguenti asset:

- *Bitcoin (BTC)*: è la prima criptovaluta per capitalizzazione, introdotta nel 2009. Considerata il riferimento del settore, ha una storia ricca di eventi critici e fasi speculative, rendendola ideale per l'analisi della reattività dei modelli.
- *Ethereum (ETH)*: seconda per capitalizzazione, rappresenta una piattaforma decentralizzata per l'esecuzione di *smart contract*. La sua evoluzione tecnologica ha spesso generato movimenti di prezzo significativi.
- *Ripple (XRP)*: utilizzata prevalentemente per i trasferimenti interbancari e *cross-border*, XRP è soggetta a rischi regolatori e speculativi. Il suo andamento è stato più volte influenzato da controversie legali.

- *Dogecoin (DOGE)*: nata come *meme-coin*, ha guadagnato popolarità grazie a dinamiche speculative e all'interesse mediatico, spesso svincolata da logiche fondamentali.
- *Litecoin (LTC)*: tra le criptovalute più longeve, viene considerata una sorta di "argento digitale". È meno volatile di BTC ma comunque soggetta a forti oscillazioni nei periodi di stress.
- *Binance Coin (BNB)*: token nativo dell'ecosistema *Binance*, una delle principali piattaforme di scambio. L'andamento è spesso legato all'andamento dell'intero *exchange* e alle politiche interne.
- *Cardano (ADA)*: progetto incentrato sulla sostenibilità e la scalabilità della *blockchain*, molto discusso per la sua struttura accademica e per la natura progressiva degli aggiornamenti.
- *Tron (TRX)*: piattaforma orientata all'intrattenimento digitale e alla distribuzione di contenuti. Spesso soggetta a cicli di iper-volatilità.

Il livello di confidenza adottato per la stima del Value at Risk è pari al 99%, coerentemente con quanto fatto nell'analisi precedente, al fine di mantenere la comparabilità dei risultati. I rendimenti sono stati calcolati su base giornaliera a partire dalle serie di prezzi disponibili nel file allegato, correttamente filtrati per rimuovere eventuali anomalie o valori nulli.

L'utilizzo di criptovalute permette quindi di stressare i modelli anche in assenza di crisi sistemiche come quelle osservate nei mercati regolamentati. Inoltre, l'elevata frequenza di shock idiosincratici e l'assenza di un vero e proprio *fair value* consentono di mettere alla prova la reattività e l'adattività dei modelli VaR, in particolare in termini di tempestività e sensibilità alle condizioni del mercato.

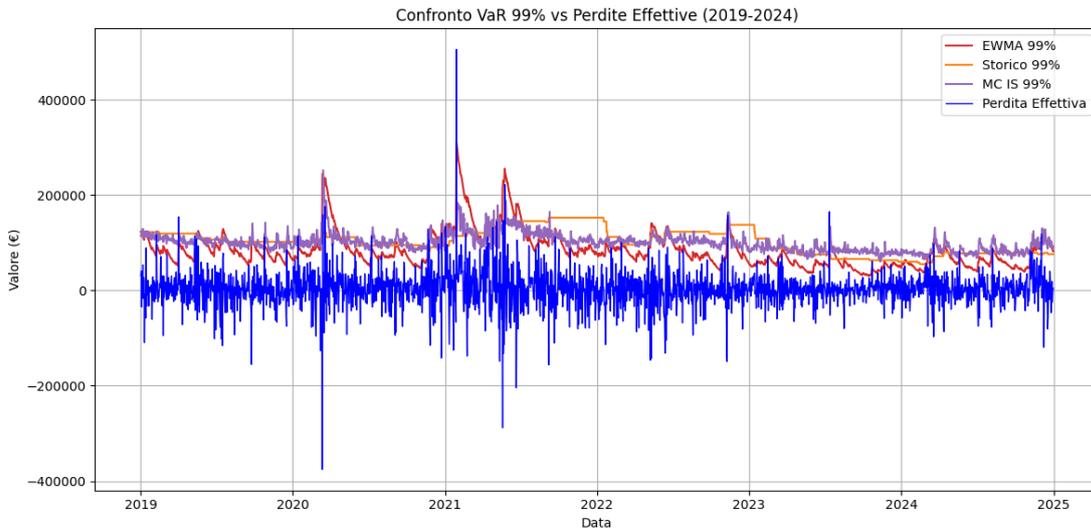
Nel prossimo paragrafo verranno applicati i tre modelli precedentemente sviluppati, per valutare quale tecnica si dimostri più efficace in un contesto di elevata incertezza e bassa prevedibilità come quello delle criptovalute.

#### 4.4.2 Analisi comparativa delle *performance*

L'obiettivo della presente sezione è quello di condurre un'analisi comparativa strutturata tra il metodo proposto e i principali approcci tradizionali nella stima del Value at Risk. Il confronto viene sviluppato sia a livello teorico, valutando le assunzioni alla base di ciascun modello, sia tramite un'indagine empirica condotta sul portafoglio di criptovalute precedentemente introdotto. L'elevata volatilità che caratterizza tali asset consente di testare la capacità di adattamento dei modelli in scenari di mercato particolarmente turbolenti, aumentando così il valore informativo dell'analisi.

I modelli tradizionali presi in considerazione comprendono l'approccio parametrico basato su media mobile esponenziale (EWMA) e la simulazione storica. Sebbene questi metodi siano ampiamente diffusi per la loro semplicità di implementazione, essi risultano spesso inadatti a catturare le caratteristiche empiriche dei rendimenti *crypto*, come code pesanti, volatilità persistente e comportamenti non lineari. Al contrario, il metodo Monte Carlo implementato si fonda su una struttura più sofisticata e aderente alla realtà dei mercati finanziari moderni.

Attraverso i risultati dei test di backtesting (Kupiec, Christoffersen e Conditional Coverage) e l'analisi delle perdite che eccedono la stima del VaR, verrà valutata l'efficacia dei diversi approcci, evidenziando i punti di forza e le criticità di ciascun modello nell'ambito della gestione del rischio in un contesto fortemente volatile come quello *crypto*.

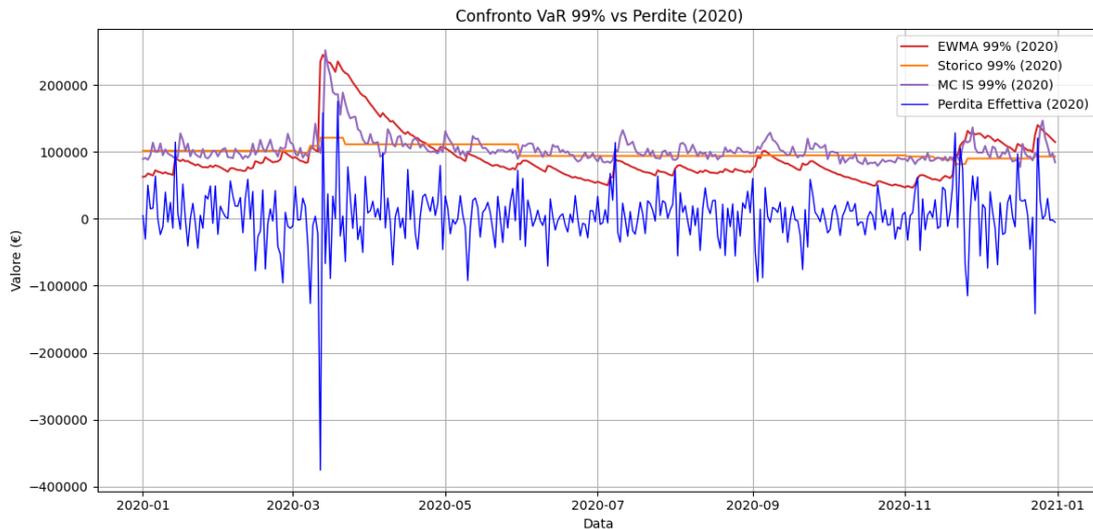


**Fig. 4.7:** Confronto VaR vs Perdite Effettive (2019–2024).

Il grafico 4.7 presenta una visione di insieme sull'intero arco temporale analizzato, dal 2019 al 2024. L'obiettivo è valutare la capacità predittiva e reattiva dei modelli nelle diverse fasi di mercato, includendo periodi di *bull market*, fasi laterali e momenti di crisi acuta. Osservando le curve relative alle perdite effettive e alle stime di VaR per ciascun metodo, emerge con chiarezza il vantaggio strutturale del Monte Carlo implementato. Tale modello, infatti, dimostra una straordinaria stabilità nel seguire le dinamiche di rischio, riuscendo ad ampliare in modo tempestivo il valore soglia in corrispondenza degli eventi estremi, come nel caso del crollo pandemico nel 2020 o nelle fasi di correzione del 2022.

Diversamente, la simulazione storica tende a reagire con lentezza, risultando spesso disallineata rispetto ai picchi di perdita effettiva. Questo accade perché il metodo si basa su una finestra storica fissa, che potrebbe non contenere eventi simili a quelli in corso, compromettendo l'efficacia predittiva. EWMA, invece, soffre per eccesso di reattività, generando una traiettoria del VaR a tratti discontinua, che sovrastima il rischio in alcune fasi e lo sottostima in altre, specie quando la

volatilità ritorna rapidamente su livelli più contenuti.



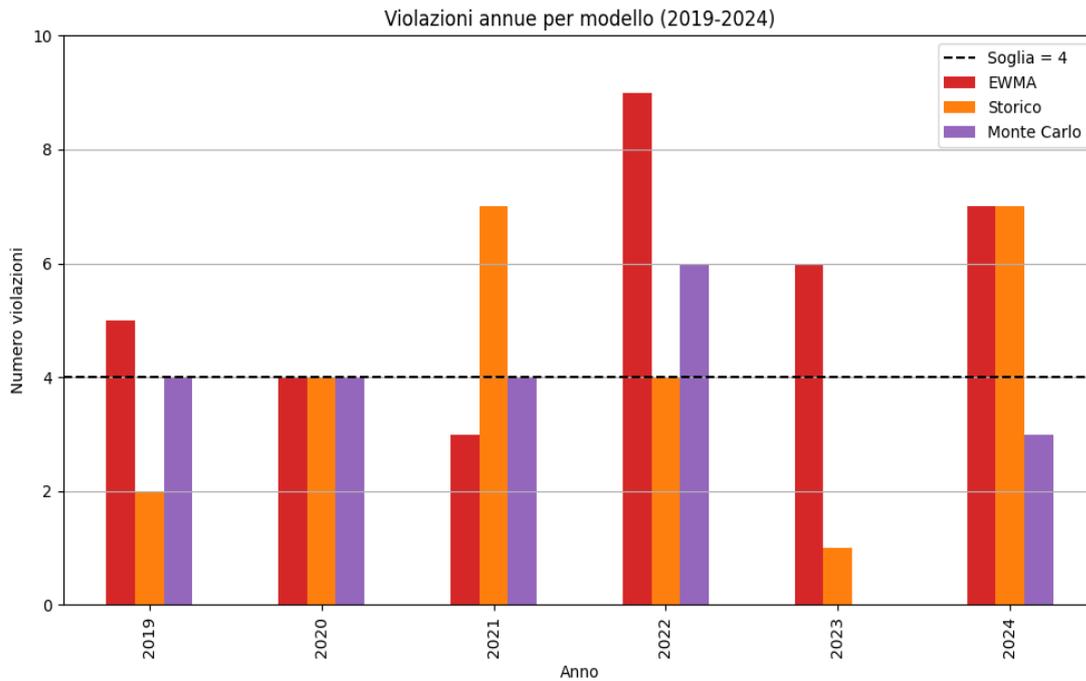
**Fig. 4.8:** Confronto VaR 99% vs Perdite Effettive (2020).

Un'analisi più dettagliata è proposta nel grafico 4.8, focalizzato sull'anno 2020. In questo contesto, si può osservare come il modello Monte Carlo implementato riesca a catturare la fase acuta dell'evento con una curva di VaR che si espande progressivamente al crescere della turbolenza, riducendosi poi con gradualità nel corso dell'anno.

Il comportamento degli altri due modelli è visibilmente più instabile. La simulazione storica mostra gravi segni di ritardo nella reazione, risultando piatta proprio nel momento in cui la volatilità esplose, e aggiornandosi solo successivamente in modo ritardato. EWMA reagisce più prontamente, ma il suo livello di stima risulta spesso sovradimensionato rispetto alle reali esigenze di copertura, introducendo un potenziale costo opportunità per l'intermediario o l'investitore che si affidi a tale modello per la gestione del capitale a rischio.

Nel complesso, l'evidenza empirica qui riportata suggerisce che il Monte Carlo implementato fornisce non solo stime più coerenti con le dinamiche osservate, ma

anche una maggiore capacità di discriminare tra diverse fasi del mercato, adattando la soglia del VaR in modo flessibile ma prudente. L'utilizzo congiunto di GARCH, t-Student e importance sampling appare quindi giustificato non solo sul piano teorico, ma anche da un punto di vista operativo.



**Fig. 4.9:** Violazioni annue per modello (2019–2024).

Il numero di violazioni registrate annualmente rappresenta un indicatore chiave per valutare la coerenza empirica e l'affidabilità di un modello di stima del rischio. In un contesto ideale, tale numero dovrebbe mantenersi entro i limiti teorici stabiliti dal livello di confidenza adottato, senza mostrare deviazioni eccessive nè in termini di sottovalutazione nè di sovrastima del rischio. La figura 4.9, che riassume le violazioni per ciascun anno nel periodo 2019 - 2024, consente di apprezzare in modo diretto il comportamento dinamico dei tre modelli oggetto di analisi.

Il metodo Monte Carlo implementato si distingue per la sua regolarità: il numero di violazioni annuali resta in media prossimo alla soglia attesa per un livello

di confidenza del 99%, ovvero circa 4 eventi l'anno. In nessun caso si osservano esplosioni di violazioni o comportamenti erratici, a conferma della sua capacità di adattarsi in modo flessibile ma robusto alle variazioni della volatilità. Tale risultato suggerisce una stima del VaR coerente, capace di coprire efficacemente i rischi effettivi senza generare falsi segnali.

Diversamente, la simulazione storica mostra un andamento più instabile, con una maggiore variabilità interannuale nelle violazioni osservate. In particolare, emergono due picchi rilevanti: il primo nel 2021, con un numero di violazioni superiore alla soglia di riferimento, e il secondo nel 2024, periodo in cui le condizioni di mercato sono risultate relativamente più stabili. Questo comportamento segnala una certa lentezza del modello nell'aggiornare le proprie stime in presenza di cambiamenti repentini nei regimi di volatilità, che lo porta talvolta a sottostimare e talvolta a sovrastimare il rischio in modo non sistematico.

Infine, il modello parametrico basato su EWMA evidenzia una criticità specifica nel 2022, anno in cui vengono registrate ben 9 violazioni. Si tratta di un'anomalia significativa rispetto alla soglia teorica di riferimento, che suggerisce come l'elevata sensibilità del modello alle variazioni recenti dei rendimenti possa portare a reazioni eccessive e, di conseguenza, a una sottostima del rischio nelle fasi di transizione. Il fatto che, in altri anni, le violazioni restino contenute, rafforza l'ipotesi che EWMA tenda a essere influenzato in modo marcato da eventi isolati, risultando meno stabile rispetto al Monte Carlo implementato.

In sintesi, l'analisi delle violazioni annuali rafforza ulteriormente le conclusioni precedenti: tra i modelli considerati, il Monte Carlo implementato risulta essere l'unico in grado di offrire una copertura del rischio sistematicamente allineata con le attese teoriche, mantenendo un equilibrio tra prudenza e aderenza ai dati di mercato, anche in un contesto complesso come quello delle criptovalute.

Metodo	Test di Kupiec	Test di Christoffersen	Cond. Coverage
EWMA	Rigettato	Accettato	Rigettato
Storico	Accettato	Accettato	Accettato
Monte Carlo	Accettato	Accettato	Accettato

La tabella riassume l'esito dei test di validazione statistica dei modelli conferma e rafforza quanto osservato nelle analisi grafiche precedenti. Tra i tre approcci considerati, il metodo Monte Carlo implementato si distingue per essere l'unico a superare con successo tutti e tre i test di *backtesting*: il *test di Kupiec*, il test di indipendenza di *Christoffersen* e il test di *Conditional Coverage*, che integra i due precedenti.

Per il modello Monte Carlo implementato, il *test di Kupiec* restituisce un *p-value* pari a 0,842, valore ampiamente superiore alla soglia del 5%, il che implica l'accettazione dell'ipotesi nulla: la frequenza di violazioni è compatibile con il modello teorico, come dimostrano le 21 violazioni registrate su 2.192 osservazioni giornaliere. Anche il metodo basato sulla simulazione storica supera il test con un *p-value* di 0,518 (25 violazioni osservate), mentre EWMA viene rigettato con un *p-value* di 0,016, indicando che il numero di violazioni osservato differisce in modo statisticamente significativo da quanto previsto (34 violazioni).

Il test di indipendenza di *Christoffersen* è superato da tutti e tre i modelli, sebbene con diversi livelli di confidenza: Monte Carlo implementato ottiene un *p-value* pari a 0,196, simulazione storica 0,290, mentre EWMA registra il valore più elevato con 0,556, suggerendo un comportamento sufficientemente casuale delle violazioni, almeno in termini temporali.

Tuttavia, è il test di copertura condizionata quello che fornisce la sintesi più stringente e rilevante. Il modello Monte Carlo implementato ottiene nuovamente un esito positivo con un *p-value* pari a 0,425, ben al di sopra della soglia critica, con-

fermando la validità globale del modello anche in contesti ad elevata instabilità. La simulazione storica si comporta in modo analogo, con un *p-value* di 0,463, mentre EWMA fallisce anche questo test (rigettato con *p-value* = 0,047), mettendo in luce una copertura del rischio che, pur mostrando indipendenza nelle violazioni, non ne rispetta la frequenza teorica.

In conclusione, i risultati dei test di backtesting evidenziano con chiarezza la superiorità del modello Monte Carlo implementato. La sua struttura, non solo si dimostra teoricamente solida, ma supera anche le verifiche empiriche più severe. I modelli tradizionali, seppur semplici e diffusi, mostrano invece limiti strutturali: EWMA pecca nella coerenza della frequenza delle violazioni, mentre la simulazione storica, pur essendo più robusta, resta limitata nella capacità di adattarsi prontamente ai cambiamenti di regime tipici dei mercati crypto.

Infine, la seguente tabella relativa alle perdite medie annue fornisce un ulteriore livello di approfondimento, rappresentando una misura più severa e realistica del rischio nei casi in cui si verificano eventi estremi.

<b>Anno</b>	<b>EWMA</b>	<b>Storico</b>	<b>MC Impl.</b>
2019	13.406,86	30.012,97	21.935,83
2020	43.661,92	86.300,35	86.246,71
2021	41.723,94	37.999,35	77.850,78
2022	14.465,20	17.353,69	28.971,50
2023	6.119,47	12.581,60	–
2024	3.906,71	14.028,80	10.133,81

Come si può notare, nell'anno 2020, la simulazione storica ha prodotto un valore medio di perdita pari a \$86.300, al pari del metodo Monte Carlo. Questa sovrastima del rischio può essere interpretata come conseguenza della forte sensibilità della simulazione storica a pochi eventi estremi registrati nel passato

recente, i quali vengono replicati senza adattamento al contesto attuale. Per il metodo Monte Carlo, invece, è facilmente intuibile la motivazione di una perdita così considerevole: l'eccessiva aderenza con la distribuzione delle perdite effettive, la quale non permette di coprire eventuali shock repentini. Il metodo parametrico, invece, ha mostrato un valore sensibilmente più contenuto per lo stesso anno, pari a \$43.661. Questo dato suggerisce che il modello parametrico tende a sovrastimare le perdite ma comunque non riesce prontamente a reagire a shock considerevoli. Negli anni successivi, si osservano differenze rilevanti anche in fasi di mercato meno estreme. Nel 2021, ad esempio, il Monte Carlo implementato ha mantenuto un valore medio elevato (\$77.850), coerente con la volatilità ancora diffusa nel mercato crypto, mentre la simulazione storica ha riportato un valore più contenuto (\$38.000), segno di una progressiva riduzione della variabilità degli scenari storici considerati. EWMA, da parte sua, ha prodotto un valore di \$41.724, ancora una volta inferiore al Monte Carlo ma in linea con il modello storico.

Un riepilogo dei risultati ottenuti da tutti i modelli analizzati è riportato nella Tabella 4.3.

Tabella 4.3: Confronto tra i metodi di stima del VaR

<b>Indicatore</b>	<b>EWMA</b>	<b>Storico</b>	<b>MC Impl.</b>
VaR medio stimato (%)	9,09%	10,35%	9,08%
Numero di violazioni	34	25	21
<i>p</i> -value Kupiec	0,016	0,518	0,842
<i>p</i> -value Christoffersen	0,556	0,290	0,196
<i>p</i> -value Conditional Coverage	0,047	0,463	0,425
<b>Valutazione complessiva</b>	<b>Rigettato</b>	<b>Accettato</b>	<b>Accettato</b>

Nel complesso, l'analisi mostra chiaramente che il Monte Carlo implementato offre una rappresentazione più coerente e realistica della severità delle perdite

estreme, adattandosi meglio ai diversi regimi di volatilità senza incorrere in sovra-  
stime o sottostime marcate. I modelli tradizionali, pur fornendo indicazioni utili  
in contesti più stabili, risultano meno affidabili nella quantificazione del rischio in  
mercati complessi e dinamici come quello delle criptovalute.

L'analisi condotta sul portafoglio di criptovalute rafforza in maniera decisa le evi-  
denze empiriche e teoriche emerse nella sezione precedente dedicata al portafoglio  
tradizionale. In presenza di asset altamente volatili, il modello proposto si è dimo-  
strato l'unico in grado di fornire stime affidabili, tempestive e coerenti del rischio  
di mercato.

I risultati osservati, letti congiuntamente, confermano che l'approccio Monte Carlo  
implementato non solo rispetta i criteri statistici formali richiesti dai test di valida-  
zione, ma si dimostra anche capace di adattarsi in modo efficiente e realistico alle  
diverse condizioni di mercato. Il fatto che tali performance si mantengano solide  
anche su un portafoglio composto da asset ad elevata instabilità, come le cripto-  
valute, costituisce una forte conferma della robustezza del modello, suggerendone  
l'utilizzo in contesti professionali dove è richiesta un'analisi del rischio affidabile,  
tempestiva e basata su ipotesi realistiche.

Le considerazioni che emergono da questo confronto saranno riprese e ampliate  
nelle conclusioni generali, dove si discuteranno i contributi complessivi del lavoro  
e le prospettive future della ricerca.

# Conclusioni

Il presente lavoro ha analizzato in modo approfondito i principali approcci alla stima del rischio di mercato tramite il Value at Risk (VaR), ponendo particolare attenzione a un modello avanzato di simulazione Monte Carlo. L'analisi ha messo in luce la necessità di superare le limitazioni insite nei metodi tradizionali, spesso fondati su ipotesi semplificative che si discostano dalle evidenze empiriche osservate nei mercati finanziari reali.

Il modello parametrico, pur risultando ampiamente diffuso per via della sua semplicità e rapidità di implementazione, si è rivelato spesso inadeguato nel cogliere caratteristiche fondamentali dei rendimenti finanziari, come la presenza di *fat tails*, l'asimmetria delle distribuzioni e la variabilità della volatilità nel tempo. I test di validazione dei modelli ne hanno infatti evidenziato una sistematica sottostima del rischio e una scarsa indipendenza nella distribuzione delle violazioni. L'introduzione del metodo delle medie mobili esponenziali (EWMA) ha migliorato significativamente la reattività del modello, consentendo una stima del VaR più dinamica. Pur con qualche limite legato alla persistenza delle violazioni in *cluster* temporali, questo approccio ha prodotto una frequenza di eccezioni molto vicina all'atteso teorico, con *performance* di *backtesting* generalmente accettabili.

Tra i metodi di simulazione, la simulazione storica ha offerto buoni risultati in termini di coerenza con i dati empirici, ma ha sofferto di una ridotta capacità di adattamento in presenza di cambiamenti strutturali del mercato. La sua natura

statica, legata alla finestra storica considerata, ha comportato una risposta tardiva agli shock e una tendenza alla sovrastima del rischio nei periodi successivi. Anche in questo caso, i test statistici hanno evidenziato problemi legati alla distribuzione temporale delle violazioni.

L'introduzione della simulazione Monte Carlo ha rappresentato un'evoluzione significativa, consentendo una maggiore flessibilità nella rappresentazione del rischio. Tuttavia, anche nella sua formulazione standard, questo approccio presenta alcune criticità: tra queste, la bassa efficienza computazionale e l'adozione della distribuzione normale standard per i rendimenti, poco realistica in molti contesti di mercato.

A fronte di tali limiti, è stata sviluppata un'estensione del metodo Monte Carlo che integra tre elementi fondamentali: la distribuzione t-Student per modellare le *fat tails*, un processo GARCH(1,1) per descrivere la dinamica della volatilità nel tempo e l'*importance sampling* per aumentare l'efficienza della simulazione, concentrando le iterazioni nelle regioni più critiche della distribuzione.

L'applicazione del modello esteso su due portafogli, uno composto da strumenti tradizionali e uno da criptovalute, ha evidenziato l'efficacia dell'approccio. L'uso della distribuzione t-Student ha permesso una rappresentazione più accurata delle code della distribuzione, elemento essenziale nei contesti ad alta volatilità. L'integrazione del GARCH ha migliorato la capacità del modello di adattarsi ai cambiamenti nei regimi di volatilità. L'*importance sampling*, infine, ha ridotto sensibilmente il numero di simulazioni richiesto per ottenere stime affidabili, contribuendo a superare una delle principali criticità del metodo Monte Carlo.

I risultati dell'analisi empirica, supportati dai test di backtesting validazione, hanno evidenziato una maggiore precisione e robustezza del modello avanzato rispetto alle metodologie tradizionali. In particolare, nel caso del portafoglio in criptovalute, l'approccio ha dimostrato una migliore capacità di cogliere i rischi effettivi,

risultando un valido strumento di misurazione del rischio in contesti caratterizzati da forte instabilità. Il metodo proposto risulta infatti l'unico approccio a superare tutti i test di validazione effettuati per valutare le *performance* dei modelli.

Nonostante le buone performance, anche questo metodo presenta alcune limitazioni. La complessità computazionale, pur ridotta grazie alle tecniche di riduzione della varianza, resta superiore rispetto agli approcci più semplici. Inoltre, la qualità delle stime dipende fortemente dalla correttezza delle ipotesi su cui si fondano le simulazioni, nonché dalla calibrazione accurata dei parametri del GARCH e della distribuzione scelta.

In prospettiva, sono diversi gli spunti di ricerca che potrebbero essere approfonditi. Tra questi, l'integrazione di tecniche di *machine learning*, utili per apprendere in modo non parametrico la distribuzione dei rendimenti e le dipendenze tra asset, risulta particolarmente promettente, soprattutto in contesti ad alta dimensionalità. Ulteriori miglioramenti potrebbero derivare dall'esplorazione di modelli alternativi al GARCH, come i modelli a volatilità stocastica, che consentirebbero una rappresentazione più realistica delle dinamiche di mercato.

In conclusione, il modello sviluppato costituisce un'evoluzione credibile rispetto agli approcci tradizionali, dimostrandosi in grado di affrontare le complessità dei mercati finanziari contemporanei. In un contesto in continua trasformazione, la capacità di disporre di strumenti flessibili, realistici ed efficienti si conferma un elemento chiave per una misurazione del rischio affidabile e moderna.

# Appendice

## A.1 Teoremi limite

**Proposizione A.1** (Legge dei grandi numeri). *Sia  $X_1, X_2, \dots$  una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna con media finita  $\mu$ . Allora*

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \right) = 1,$$

*o equivalentemente, quasi certamente*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu.$$

**Proposizione A.2** (Teorema del Limite Centrale). *Siano  $X_1, X_2, \dots$  una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media  $\mu < \infty$  e varianza  $\sigma^2 < \infty$ . Definita  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  e  $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  la sua normalizzazione, si ha per ogni  $t \in \mathbb{R}$*

$$F_{Z_n}(t) := \mathbb{P}(Z_n \leq t) \xrightarrow{q.c.} \mathbb{P}(Z \leq t) \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

*dove  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Equivalentemente  $Z_n$  converge in distribuzione a  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  per  $n \rightarrow \infty$ .*

## A.2 Codici Python

**Codice A.1.** *Script Python per il calcolo del VaR parametrico al 99%*

```
1 # IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
import pandas as pd
3 import numpy as np
# 1: CARICAMENTO E PREPARAZIONE DATI
5 file_path = '/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/AMZN Cronologia
    Dati.csv'
data = pd.read_csv(file_path, parse_dates=['Data'], dayfirst=True)
7 data.sort_values(by='Data', inplace=True)
data['Ultimo'] = data['Ultimo'].str.replace('.', '',
    regex=False).str.replace(',', '.', regex=False)
9 data['Ultimo'] = pd.to_numeric(data['Ultimo'], errors='coerce')
data.dropna(subset=['Ultimo'], inplace=True)
11 data['Rendimenti'] = np.log(data['Ultimo'] / data['Ultimo'].shift(1))
data.dropna(inplace=True)
13 # 2: PARAMETRI PER CALCOLO VaR
data_var = pd.Timestamp('2025-01-02')
15 data_precedente = data[data['Data'] < data_var]
sigma = data_precedente['Rendimenti'].std()
17 ultimo_prezzo = data_precedente.iloc[-1]['Ultimo']
z_alpha = 2.33
19 # 3: CALCOLO DEL VaR
VaR_asset_normal = ultimo_prezzo * sigma * abs(z_alpha)
21 # 4: OUTPUT
print("Formula VaR = Prezzo * sigma * |Zalpha|")
23 print(f"Prezzo = {ultimo_prezzo:.2f}")
print(f"sigma = {sigma:.5f}")
25 print(f"Zalpha = {abs(z_alpha):.5f}")
print(f"VaR giornaliero 99% = {VaR_asset_normal:.2f}")
```

## Codice A.2. Script Python per il calcolo del VaR con simulazione storica al 99%

```
#IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
2 import pandas as pd
  import numpy as np
4 import scipy.stats as si
  # 1: PARAMETRI
6 K = 220
  T = 30 / 365
8 sigma_ann = 0.28
  r = 0.02
10 C0 = 7.50
  # 2: IMPORTAZIONE E PREPARAZIONE DATI
12 file_path = "/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/AMZN Cronologia
    Dati.csv"
  df = pd.read_csv(file_path)
14 df['Ultimo'] = df['Ultimo'].str.replace('.', '',
    regex=False).str.replace(',', '.', regex=False)
  df['Ultimo'] = pd.to_numeric(df['Ultimo'], errors='coerce')
16 df['Data'] = pd.to_datetime(df['Data'], format='%d.%m.%Y')
  df.sort_values('Data', inplace=True)
18 df.dropna(subset=['Ultimo'], inplace=True)
  df['Rendimenti'] = np.log(df['Ultimo'] / df['Ultimo'].shift(1))
20 df.dropna(inplace=True)
  S0 = df.iloc[-1]['Ultimo']
22 rendimenti = df['Rendimenti'].tail(252).values
  prezzi_simulati = S0 * np.exp(rendimenti)
24 # 3: FUNZIONE BLACK-SCHOLES
  def black_scholes_call(S, K, T, r, sigma):
26     d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma *
        np.sqrt(T))
        d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
```

```

28     C = S * si.norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * si.norm.cdf(d2)
        return
30 # 4: CALCOLO VALORE CALL PER OGNI PREZZO SIMULATO
valori_opzione = black_scholes_call(prezzi_simulati, K, T, r,
        sigma_ann)
32 # 5: VARIAZIONI E CALCOLO VaR
deltas = valori_opzione - C0
34 VaR_99 = -np.percentile(deltas, 1)
print(f"VaR giornaliero al 99% = {VaR_99:.2f} $")

```

**Codice A.3.** *Script Python per il calcolo del VaR con Metodo Monte Carlo al 99%*

```

1 # IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
import pandas as pd
3 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
5 # 1: CARICAMENTO E PREPARAZIONE DEI DATI
df = pd.read_csv("/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/AMZN Cronologia
        Dati.csv")
7 df['Ultimo'] = df['Ultimo'].str.replace('.', '',
        regex=False).str.replace(',', '.', regex=False)
df['Ultimo'] = pd.to_numeric(df['Ultimo'], errors='coerce')
9 df = df.dropna(subset=['Ultimo'])
df = df[::-1].reset_index(drop=True)
11 df['log_return'] = np.log(df['Ultimo'] / df['Ultimo'].shift(1))
df = df.dropna()
13 mu = df['log_return'].mean()
sigma = df['log_return'].std()
15 S0 = df['Ultimo'].iloc[-1]
# 2: SIMULAZIONE MONTE CARLO
17 np.random.seed(42)
n_sim = 10000

```

```

19 epsilon = np.random.normal(0, 1, n_sim)
   sim_returns = (mu - 0.5 * sigma**2) + sigma * epsilon
21 sim_prices = S0 * np.exp(sim_returns)
   sim_losses = S0 - sim_prices
23 # 3: CALCOLO DEL VAR AL 99%
   var_99 = np.percentile(sim_losses, 1)
25 print(f"Prezzo attuale AMZN: {S0:.2f}")
   print(f"VaR al 99% (1 giorno, 1 azione): {var_99:.2f}")
27 # 4: CREAZIONE GRAFICO
   plt.figure(figsize=(8, 5))
30 plt.hist(sim_losses, bins=50, color='lightblue', edgecolor='black')
   plt.axvline(var_99, color='red', linestyle='--', label=f'VaR 99% =
       {var_99:.2f}')
31 plt.title("Distribuzione delle perdite simulate (1 azione AMZN)")
   plt.xlabel("Perdita")
33 plt.ylabel("Frequenza")
   plt.legend()
35 plt.grid(True)
   plt.tight_layout()
37 plt.show()

```

**Codice A.4.** *Script Python per il calcolo del VaR tramite approccio parametrico tradizionale sul portafoglio oggetto di analisi.*

```

1 #IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
   import pandas as pd
3 import numpy as np
   import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.stats import chi2, norm
   import warnings
7 import os

9 # 1. CARICAMENTO E PREPARAZIONE DATI

```

```

file_path =
    "/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/Portafoglio_Dati_2014-2024.xlsx"
11 df = pd.read_excel(file_path, sheet_name="Sheet1")
df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])
13 df.set_index('Date', inplace=True)
if (df <= 0).any().any():
15     print("Attenzione: Sono stati trovati valori non positivi.
        Verranno rimossi dalla serie storica.")
        df = df[(df > 0).all(axis=1)]
17 returns = df.pct_change().dropna()
start_date = "2015-01-01"
19 window_size = 250
conf_level = 0.99
21 portfolio_value = 1_000_000
num_assets = len(df.columns)
23 weights = np.ones(num_assets) / num_assets
z_score = norm.ppf(conf_level)
25 portfolio_returns = returns @ weights

27 # 2. METODO PARAMETRICO TRADIZIONALE
def rolling_portfolio_volatility(returns, weights, window_size):
29     vol_series = pd.Series(index=returns.index, dtype=float)
    for i in range(window_size, len(returns)):
31         window_data = returns.iloc[i-window_size:i]
        cov_matrix = window_data.cov()
33         vol_series.iloc[i] = np.sqrt(weights @ cov_matrix.values @
            weights)
    return vol_series
35 portfolio_vol = rolling_portfolio_volatility(returns, weights,
    window_size)
VaR_trad = z_score * portfolio_vol * portfolio_value
37 portfolio_losses = -portfolio_returns * portfolio_value
violations_trad = (portfolio_losses > VaR_trad).astype(int)

```

```

39 trad_df = pd.DataFrame({
    "VaR Parametrico 99%": VaR_trad,
41    "Perdita Effettiva": portfolio_losses,
    "Violazione": violations_trad
43 }, index=returns.index)
trad_df = trad_df.loc[start_date:]
45
# 3. TEST DI KUPIEC
47 def kupiec_test(n, x, p_expected):
    if x == 0:
49         LR = -2 * n * np.log(1 - p_expected)
    elif x == n:
51         LR = -2 * n * np.log(p_expected)
    else:
53         p_hat = x / n
        LR = -2 * ((n - x) * np.log((1 - p_expected)/(1 - p_hat)) +
            x * np.log(p_expected/p_hat))
55     p_value = 1 - chi2.cdf(LR, df=1)
    return LR, p_value
57 n_global = len(trad_df)
x_global = trad_df["Violazione"].sum()
59 LR_global, p_val_global = kupiec_test(n_global, x_global, 1 -
    conf_level)
global_result = "Accettato" if p_val_global >= 0.05 else "Rigettato"
61 print("=== RISULTATI GLOBALI (PARAMETRICO TRADIZIONALE - 2015-2024)
    ===")
print(f"Numero totale di osservazioni: {n_global}")
63 print(f"Numero totale di violazioni: {x_global}")
print(f"LR Kupiec: {LR_global:.3f}")
65 print(f"p-value Kupiec: {p_val_global:.3f}")
print(f"Esito del test (global): {global_result}")
67 window_kupiec = 250
kupiec_pvals = []

```

```

69 for i in range(window_kupiec, len(violations_trad)):
    window_data = violations_trad.iloc[i-window_kupiec:i]
71     n = window_kupiec
    x = window_data.sum()
73     _, p_val = kupiec_test(n, x, 1 - conf_level)
    kupiec_pvals.append(p_val)
75 kupiec_pvals = pd.Series(kupiec_pvals,
    index=violations_trad.index[window_kupiec:])
    days_ge_005 = (kupiec_pvals >= 0.05).sum()
77 days_lt_005 = (kupiec_pvals < 0.05).sum()
    print(f"Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005}")
79 print(f"Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005}")

81 # 4. GRAFICI
    grafici_path = "/Users/nunziolavela/Desktop/GRAFICI"
83
    # VaR vs Perdite Effettive (2015-2024)
85 plt.figure(figsize=(12,6))
    plt.plot(trad_df.index, trad_df["VaR Parametrico 99%"], label="VaR
        Parametrico 99%", color='red')
87 plt.plot(trad_df.index, trad_df["Perdita Effettiva"], label="Perdita
        Effettiva", color='blue')
    violations_idx = trad_df[trad_df["Violazione"] == 1].index
89 violations_vals = trad_df.loc[violations_idx, "Perdita Effettiva"]
    plt.scatter(violations_idx, violations_vals, color='darkred',
        label="Violazioni", zorder=5, s=30)
91 plt.xlabel("Data")
    plt.ylabel("Valore monetario perdita")
93 plt.title("VaR Parametrico vs Perdite Effettive (2015-2024)")
    plt.legend()
95 plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
97 plt.savefig(os.path.join(grafici_path, "PARAMETRICO_1.png"))

```

```

plt.show()
99
# Violazioni per anno
101 violations_yearly = trad_df["Violazione"].resample("Y").sum()
plt.figure(figsize=(10,6))
103 plt.bar(violations_yearly.index.year, violations_yearly.values,
         color='green')
plt.axhline(y=3, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5)
105 plt.xlabel("Anno")
plt.ylabel("Numero di violazioni")
107 plt.title("Violazioni per anno (VaR Parametrico - 2015-2024)")
plt.grid(True)
109 plt.xticks(violations_yearly.index.year, rotation=45)
max_val = int(violations_yearly.max()) + 1
111 plt.yticks(range(0, max_val + 1))
plt.legend()
113 plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(grafici_path, "PARAMETRICO_2.png"))
115 plt.show()

117 # 5. ANALISI ANNO 2020
trad_df_2020 = trad_df.loc["2020"]
119 n_global_2020 = len(trad_df_2020)
x_global_2020 = trad_df_2020["Violazione"].sum()
121 LR_global_2020, p_val_global_2020 = kupiec_test(n_global_2020,
         x_global_2020, 1 - conf_level)
global_result_2020 = "Accettato" if p_val_global_2020 >= 0.05 else
         "Rigettato"
123 print("=== RISULTATI GLOBALI (PARAMETRICO TRADIZIONALE - 2020) ===")
print(f"Numero totale di osservazioni (2020): {n_global_2020}")
125 print(f"Numero totale di violazioni (2020): {x_global_2020}")
print(f"LR Kupiec (2020): {LR_global_2020:.3f}")
127 print(f"p-value Kupiec (2020): {p_val_global_2020:.3f}")

```

```

print(f"Esito del test (global) (2020): {global_result_2020}")
129 kupiec_pvals_2020 = kupiec_pvals.loc["2020"]
    days_ge_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 >= 0.05).sum()
131 days_lt_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 < 0.05).sum()
    print(f"(2020) Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005_2020}")
133 print(f"(2020) Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005_2020}")
    plt.figure(figsize=(12, 6))
135 plt.plot(trad_df_2020.index, trad_df_2020["VaR Parametrico 99%"],
            label="VaR Parametrico 99% (2020)", color='red')
    plt.plot(trad_df_2020.index, trad_df_2020["Perdita Effettiva"],
            label="Perdita Effettiva (2020)", color='blue')
137 violations_2020 = trad_df_2020[trad_df_2020["Violazione"] == 1]
    plt.scatter(violations_2020.index, violations_2020["Perdita
            Effettiva"],
139                color='darkred', s=40, label="Violazioni", zorder=5)
    plt.xlabel("Data")
141 plt.ylabel("Valore (monetario)")
    plt.title("VaR Parametrico vs Perdite Effettive (2020)")
143 plt.legend()
    plt.grid(True)
145 plt.tight_layout()
    plt.savefig(os.path.join(grafici_path, "PARAMETRICO_3.png"))
147 plt.show()

149 # 6. TEST DI CHRISTOFFERSEN
def christoffersen_test(violations):
151     T00 = T01 = T10 = T11 = 0
        violations = list(violations)
153     for t in range(1, len(violations)):
            prev, curr = violations[t-1], violations[t]
155             if prev == 0 and curr == 0:
                    T00 += 1
157             elif prev == 0 and curr == 1:

```

```

        T01 += 1
159     elif prev == 1 and curr == 0:
        T10 += 1
161     elif prev == 1 and curr == 1:
        T11 += 1
163     pi01 = T01 / (T00 + T01) if (T00 + T01) > 0 else 0.00001
        pi11 = T11 / (T10 + T11) if (T10 + T11) > 0 else 0.00001
165     pi = (T01 + T11) / (T00 + T01 + T10 + T11)
        logL0 = (T00 + T01) * np.log(1 - pi) + (T10 + T11) * np.log(pi)
167     logL1 = T00 * np.log(1 - pi01) + T01 * np.log(pi01) + T10 *
        np.log(1 - pi11) + T11 * np.log(pi11)
        LR_indep = -2 * (logL0 - logL1)
169     p_value = 1 - chi2.cdf(LR_indep, df=1)
        return LR_indep, p_value
171 LR_indep_trad, p_val_indep_trad =
        christoffersen_test(trad_df["Violazione"])
        esito_indep_trad = "Accettato" if p_val_indep_trad >= 0.05 else
        "Rigettato"
173 print("\n=== TEST DI CHRISTOFFERSEN (Indipendenza) - PARAMETRICO
        TRADIZIONALE ===")
        print(f"LR: {LR_indep_trad:.3f}")
175 print(f"p-value: {p_val_indep_trad:.3f}")
        print(f"Esito: {esito_indep_trad}")
177
        # 7. TEST DI CONDITIONAL COVERAGE
179 LR_cc_trad = LR_global + LR_indep_trad
        p_val_cc_trad = 1 - chi2.cdf(LR_cc_trad, df=2)
181 esito_cc_trad = "Accettato" if p_val_cc_trad >= 0.05 else "Rigettato"
        print("\n=== TEST DI CONDITIONAL COVERAGE - PARAMETRICO TRADIZIONALE
        ===")
183 print(f"LR: {LR_cc_trad:.3f}")
        print(f"p-value: {p_val_cc_trad:.3f}")
185 print(f"Esito: {esito_cc_trad}")

```

```

187 # 8. MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI IL VaR
    trad_df["Excess Over VaR"] = trad_df["Perdita Effettiva"] -
        trad_df["VaR Parametrico 99%"]
189 excess_df = trad_df[trad_df["Violazione"] == 1]
    es_excess_annuo = excess_df["Excess Over VaR"].resample("Y").mean()
191 es_excess_annuo.index = es_excess_annuo.index.year
    print("\n=== MEDIA ANNUA DELL'ECCESSO OLTRE IL VaR (Expected
        Shortfall ex post) ===")
193 for anno, es_val in es_excess_annuo.items():
    print(f"{anno}: {es_val:,.2f} ,Ç")

```

**Codice A.5.** *Script Python per il calcolo del VaR tramite approccio parametrico EWMA sul portafoglio oggetto di analisi.*

```

# IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
2 import pandas as pd
  import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
  from scipy.stats import chi2, norm
6 import warnings
  import os
8
# 1. CARICAMENTO E PREPARAZIONE DEI DATI
10 file_path =
    "/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/Portafoglio_Dati_2014-2024.xlsx"
    df = pd.read_excel(file_path, sheet_name="Sheet1")
12 df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])
    df.set_index('Date', inplace=True)
14 if (df <= 0).any().any():
    print("Attenzione: Sono stati trovati valori non positivi.
        Verranno rimossi dalla serie storica.")
16 df = df[(df > 0).all(axis=1)]

```

```

returns = df.pct_change().dropna()
18 start_date = "2015-01-01"
returns_period = returns.loc[start_date:]
20 conf_level = 0.99
portfolio_value = 1_000_000
22 z_score = norm.ppf(conf_level)
lambda_ewma = 0.94
24 num_assets = len(df.columns)
weights = np.ones(num_assets) / num_assets
26 portfolio_returns = returns @ weights

28 # 2. METODO PARAMETRICO CON EWMA
def ewma_portfolio_volatility(returns, weights, lambda_ewma):
30     n, k = returns.shape
vol_series = np.empty(n)
32     r0 = returns.iloc[0].values.reshape(-1, 1)
cov_prev = r0 @ r0.T
34     vol_series[0] = np.sqrt(weights @ cov_prev @ weights)
for t in range(1, n):
36         rt = returns.iloc[t].values.reshape(-1, 1)
cov_t = lambda_ewma * cov_prev + (1 - lambda_ewma) * (rt @
            rt.T)
38         vol_series[t] = np.sqrt(weights @ cov_t @ weights)
cov_prev = cov_t
40     return pd.Series(vol_series, index=returns.index)
vol_ewma = ewma_portfolio_volatility(returns_period, weights,
    lambda_ewma)
42 VaR_EWMA = z_score * vol_ewma * portfolio_value
portfolio_losses = - (returns_period @ weights) * portfolio_value
44 violations_EWMA = (portfolio_losses > VaR_EWMA).astype(int)
ewma_df = pd.DataFrame({
46     "VaR EWMA 99%": VaR_EWMA,
    "Perdita Effettiva": portfolio_losses,

```

```

48     "Violazione": violations_EWMA
    }, index=returns_period.index)
50
51 # 3. TEST DI KUPIEC
52 def kupiec_test(n, x, p_expected):
53     if x == 0:
54         LR = -2 * n * np.log(1 - p_expected)
55     elif x == n:
56         LR = -2 * n * np.log(p_expected)
57     else:
58         p_hat = x / n
59         LR = -2 * ((n - x) * np.log((1 - p_expected)/(1 - p_hat)) +
60                 x * np.log(p_expected/p_hat))
61     p_value = 1 - chi2.cdf(LR, df=1)
62     return LR, p_value
63
64 n_global = len(ewma_df)
65 x_global = ewma_df["Violazione"].sum()
66 LR_global, p_val_global = kupiec_test(n_global, x_global, 1 -
67     conf_level)
68
69 global_result = "Accettato" if p_val_global >= 0.05 else "Rigettato"
70 print("=== RISULTATI GLOBALI (PARAMETRICO CON EWMA - 2015-2024) ===")
71 print(f"Numero totale di osservazioni: {n_global}")
72 print(f"Numero totale di violazioni: {x_global}")
73 print(f"LR Kupiec: {LR_global:.3f}")
74 print(f"p-value Kupiec: {p_val_global:.3f}")
75 print(f"Esito del test (global): {global_result}")
76
77 window_kupiec = 250
78 kupiec_pvals = []
79 for i in range(window_kupiec, len(violations_EWMA)):
80     window_data = violations_EWMA.iloc[i-window_kupiec:i]
81     n = window_kupiec
82     x = window_data.sum()
83     _, p_val = kupiec_test(n, x, 1 - conf_level)

```

```

        kupiec_pvals.append(p_val)
80 kupiec_pvals = pd.Series(kupiec_pvals,
        index=violations_EWMA.index>window_kupiec:])
days_ge_005 = (kupiec_pvals >= 0.05).sum()
82 days_lt_005 = (kupiec_pvals < 0.05).sum()
print(f"Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005}")
84 print(f"Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005}")

86 # 4. GRAFICI
save_folder = "/Users/nunziolavela/Desktop/GRAFICI"
88 if not os.path.exists(save_folder):
        os.makedirs(save_folder)

90
#VaR vs Perdite Effettive (2015-2024)
92 plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(ewma_df.index, ewma_df["VaR EWMA 99%"], label="VaR EWMA
        99%", color='red')
94 plt.plot(ewma_df.index, ewma_df["Perdita Effettiva"], label="Perdita
        Effettiva", color='blue')
violations = ewma_df[ewma_df["Perdita Effettiva"] > ewma_df["VaR
        EWMA 99%"]]
96 plt.plot(violations.index, violations["Perdita Effettiva"],
        marker='o', linestyle='', color='darkred', label="Violazioni")
plt.xlabel("Data")
98 plt.ylabel("Valore (monetario)")
plt.title("VaR Parametrico (EWMA) vs Perdite Effettive (2015-2024)")
100 plt.legend()
plt.grid(True)
102 plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(save_folder, "EWMA_1.png"))
104 plt.show()

106 #Violazioni per anno

```

```

violations_yearly = ewma_df["Violazione"].resample('A').sum()
108 plt.figure(figsize=(10,6))
plt.bar(violations_yearly.index.year, violations_yearly.values,
        color='green')
110 plt.xlabel("Anno")
plt.ylabel("Numero di violazioni")
112 plt.title("Violazioni per anno (VaR Parametrico (EWMA) - 2015-2024)")
plt.yticks(np.arange(0, 13, 1))
114 plt.ylim(0, 12)
plt.axhline(y=3, color='red', linestyle='--')
116 plt.grid(True)
plt.xticks(violations_yearly.index.year, rotation=45)
118 plt.legend()
plt.tight_layout()
120 plt.savefig(os.path.join(save_folder, "EWMA_2.png"))
plt.show()
122
# 5. ANALISI ANNO 2020
124 ewma_df_2020 = ewma_df.loc["2020"]
n_global_2020 = len(ewma_df_2020)
126 x_global_2020 = ewma_df_2020["Violazione"].sum()
LR_global_2020, p_val_global_2020 = kupiec_test(n_global_2020,
        x_global_2020, 1 - conf_level)
128 global_result_2020 = "Accettato" if p_val_global_2020 >= 0.05 else
        "Rigettato"
print("=== RISULTATI GLOBALI (PARAMETRICO CON EWMA - 2020) ===")
130 print(f"Numero totale di osservazioni (2020): {n_global_2020}")
print(f"Numero totale di violazioni (2020): {x_global_2020}")
132 print(f"LR Kupiec (2020): {LR_global_2020:.3f}")
print(f"p-value Kupiec (2020): {p_val_global_2020:.3f}")
134 print(f"Esito del test (global) (2020): {global_result_2020}")
kupiec_pvals_2020 = kupiec_pvals.loc["2020"]
136 days_ge_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 >= 0.05).sum()

```

```

days_lt_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 < 0.05).sum()
138 print(f"(2020) Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005_2020}")
print(f"(2020) Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005_2020}")
140 plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(ewma_df_2020.index, ewma_df_2020["VaR EWMA 99%"],
        label="VaR EWMA 99% (2020)", color='red')
142 plt.plot(ewma_df_2020.index, ewma_df_2020["Perdita Effettiva"],
        label="Perdita Effettiva (2020)", color='blue')
violations_2020 = ewma_df_2020[ewma_df_2020["Perdita Effettiva"] >
        ewma_df_2020["VaR EWMA 99%"]]
144 plt.plot(violations_2020.index, violations_2020["Perdita
        Effettiva"], marker='o', linestyle='', color='darkred',
        label="Violazioni")
plt.xlabel("Data")
146 plt.ylabel("Valore (monetario)")
plt.title("VaR Parametrico (EWMA) vs Perdite Effettive (2020)")
148 plt.legend()
plt.grid(True)
150 plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(save_folder, "EWMA_3.png"))
152 plt.show()

154 # 6. TEST DI CHRISTOFFERSEN (INDIPENDENZA)
def christoffersen_test(violations):
156     T00 = T01 = T10 = T11 = 0
    violations = list(violations)
158     for t in range(1, len(violations)):
        prev, curr = violations[t-1], violations[t]
160         if prev == 0 and curr == 0:
            T00 += 1
162         elif prev == 0 and curr == 1:
            T01 += 1
164         elif prev == 1 and curr == 0:

```

```

        T10 += 1
166     elif prev == 1 and curr == 1:
        T11 += 1
168     pi01 = T01 / (T00 + T01) if (T00 + T01) > 0 else 0.00001
        pi11 = T11 / (T10 + T11) if (T10 + T11) > 0 else 0.00001
170     pi = (T01 + T11) / (T00 + T01 + T10 + T11)
        logL0 = (T00 + T01) * np.log(1 - pi) + (T10 + T11) * np.log(pi)
172     logL1 = T00 * np.log(1 - pi01) + T01 * np.log(pi01) + T10 *
        np.log(1 - pi11) + T11 * np.log(pi11)
        LR_indep = -2 * (logL0 - logL1)
174     p_value = 1 - chi2.cdf(LR_indep, df=1)
        return LR_indep, p_value
176 LR_indep, p_val_indep = christoffersen_test(violations_EWMA)
print("\n=== TEST DI CHRISTOFFERSEN (Indipendenza) - INTERO PERIODO
====")
178 print(f"LR Indipendenza: {LR_indep:.3f}")
print(f"p-value: {p_val_indep:.3f}")
180 print("Esito del test:", "Accettato" if p_val_indep >= 0.05 else
        "Rigettato")

182 # 7. TEST DI CONDITIONAL COVERAGE
LR_cc = LR_global + LR_indep
184 p_val_cc = 1 - chi2.cdf(LR_cc, df=2)
esito_cc = "Accettato" if p_val_cc >= 0.05 else "Rigettato"
186 print("\n=== TEST DI CONDITIONAL COVERAGE (Kupiec + Christoffersen)
====")
print(f"LR Conditional Coverage: {LR_cc:.3f}")
188 print(f"p-value: {p_val_cc:.3f}")
print("Esito del test:", esito_cc)
190

# 8. MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI IL VaR
192 expected_shortfall_excess = {}
for year, group in ewma_df.groupby(ewma_df.index.year):

```

```

194     violation_days = group[group["Perdita Effettiva"] > group["VaR
        EWMA 99%"]]
        if not violation_days.empty:
196             excess = violation_days["Perdita Effettiva"] -
                violation_days["VaR EWMA 99%"]
                es_excess = excess.mean()
198         else:
                es_excess = np.nan
200         expected_shortfall_excess[year] = es_excess
es_excess_df = pd.DataFrame.from_dict(expected_shortfall_excess,
        orient='index', columns=['Expected Shortfall (Eccesso)'])
202 print("\nExpected Shortfall (solo eccesso oltre VaR) per anno:")
print(es_excess_df)

```

**Codice A.6.** *Script Python per il calcolo del VaR tramite simulazione storica sul portafoglio oggetto di analisi.*

```

1 # IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
import pandas as pd
3 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.stats import chi2
import warnings
7 import os

9 # 1. CARICAMENTO E PREPARAZIONE DEI DATI
file_path =
    "/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/Portafoglio_Dati_2014-2024.xlsx"
11 df = pd.read_excel(file_path, sheet_name="Sheet1")
df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])
13 df.set_index('Date', inplace=True)
if (df <= 0).any().any():

```

```

15     print("Attenzione: Sono stati trovati valori non positivi.
        Verranno rimossi dalla serie storica.")
        df = df[(df > 0).all(axis=1)]
17 returns = df.pct_change().dropna()
    start_date = "2014-01-01"
19 returns_period = returns.loc[start_date:]

21 # 2. CALCOLO DEL VAR CON L'APPROCCIO DELLE SIMULAZIONI STORICHE
    window_size = 250
23 conf_level = 0.99
    portfolio_value = 1_000_000
25 num_assets = len(df.columns)
    weights = np.ones(num_assets) / num_assets
27 portfolio_returns = returns_period @ weights
    VaR_hist = -portfolio_returns.rolling(window=window_size,
        min_periods=window_size).quantile(1 - conf_level) *
        portfolio_value
29 ES_hist = portfolio_returns.rolling(window=window_size,
        min_periods=window_size).apply(
        lambda x: -np.mean(np.sort(x)[:max(int(np.ceil((1 -
            conf_level)*len(x))),1)])
31 ) * portfolio_value
    hist_df = pd.DataFrame({
33     "VaR Storico 99%": VaR_hist,
        "Perdita Effettiva": -portfolio_returns * portfolio_value
35 })
    hist_df["Violazione"] = (hist_df["Perdita Effettiva"] > hist_df["VaR
        Storico 99%"]).astype(int)
37 hist_df = hist_df.dropna()

39 # 3. TEST DI KUPIEC
    def kupiec_test(n, x, p_expected):
41     if x == 0:

```

```

        LR = -2 * n * np.log(1 - p_expected)
43     elif x == n:
        LR = -2 * n * np.log(p_expected)
45     else:
        p_hat = x / n
47         LR = -2 * ((n - x) * np.log((1 - p_expected)/(1 - p_hat)) +
            x * np.log(p_expected/p_hat))
        p_value = 1 - chi2.cdf(LR, df=1)
49     return LR, p_value
n_global = len(hist_df)
51 x_global = hist_df["Violazione"].sum()
LR_global, p_val_global = kupiec_test(n_global, x_global, 1 -
    conf_level)
53 global_result = "Accettato" if p_val_global >= 0.05 else "Rigettato"
print("=== RISULTATI GLOBALI (SIMULAZIONE STORICA - 2015-2024) ===")
55 print(f"Numero totale di osservazioni: {n_global}")
print(f"Numero totale di violazioni: {x_global}")
57 print(f"LR Kupiec: {LR_global:.3f}")
print(f"p-value Kupiec: {p_val_global:.3f}")
59 print(f"Esito del test (global): {global_result}")
window_kupiec = 250
61 kupiec_pvals = []
for i in range(window_kupiec, len(hist_df)):
63     window_data = hist_df["Violazione"].iloc[i-window_kupiec:i]
        n = window_kupiec
65     x = window_data.sum()
        _, p_val = kupiec_test(n, x, 1 - conf_level)
67     kupiec_pvals.append(p_val)
kupiec_pvals = pd.Series(kupiec_pvals,
    index=hist_df.index[window_kupiec:])
69 days_ge_005 = (kupiec_pvals >= 0.05).sum()
days_lt_005 = (kupiec_pvals < 0.05).sum()
71 print(f"Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005}")

```

```

print(f"Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005}")
73
# 4. GRAFICI
75 save_folder = "/Users/nunziolavela/Desktop/GRAFICI"
if not os.path.exists(save_folder):
77     os.makedirs(save_folder)

79 #VaR vs Perdite Effettive (2015-2024)
plt.figure(figsize=(12,6))
81 plt.plot(hist_df.index, hist_df["VaR Storico 99%"], label="VaR
    Storico 99%", color='red', lw=1.5)
plt.plot(hist_df.index, hist_df["Perdita Effettiva"], label="Perdita
    Effettiva", color='blue', lw=1)
83 violation_mask = hist_df["Perdita Effettiva"] > hist_df["VaR Storico
    99%"]
plt.scatter(hist_df.index[violation_mask], hist_df["Perdita
    Effettiva"][violation_mask],
85             color='darkred', label="Violazioni", marker='o')
plt.xlabel("Data")
87 plt.ylabel("Valore (monetario)")
plt.title("Simulazione Storica: VaR vs Perdite Effettive
    (2015-2024)")
89 plt.legend()
plt.grid(True)
91 plt.xlim(pd.to_datetime("2015-01-01"), pd.to_datetime("2024-12-31"))
plt.tight_layout()
93 plt.savefig(os.path.join(save_folder, "SIMSTO_1.png"))
plt.show()
95
#Violazioni per anno
97 violations_yearly = hist_df["Violazione"].resample('A').sum()
violations_yearly = violations_yearly.loc["2015":]
99 plt.figure(figsize=(10,6))

```

```

plt.bar(violations_yearly.index.year, violations_yearly.values,
        color='green')
101 plt.xlabel("Anno")
plt.ylabel("Numero di violazioni")
103 plt.title("Violazioni per anno (Simulazione Storica - 2015-2024)")
plt.axhline(y=3, color='red', linestyle='--')
105 plt.grid(True)
plt.xticks(violations_yearly.index.year, rotation=45)
107 plt.legend()
plt.tight_layout()
109 plt.savefig(os.path.join(save_folder, "SIMSTO_2.png"))
plt.show()
111
# 5. ANALISI ANNO 2020
113 hist_df_2020 = hist_df.loc["2020"]
n_global_2020 = len(hist_df_2020)
115 x_global_2020 = hist_df_2020["Violazione"].sum()
LR_global_2020, p_val_global_2020 = kupiec_test(n_global_2020,
        x_global_2020, 1 - conf_level)
117 global_result_2020 = "Accettato" if p_val_global_2020 >= 0.05 else
        "Rigettato"
print("=== RISULTATI GLOBALI (SIMULAZIONE STORICA - 2020) ===")
119 print(f"Numero totale di osservazioni (2020): {n_global_2020}")
print(f"Numero totale di violazioni (2020): {x_global_2020}")
121 print(f"LR Kupiec (2020): {LR_global_2020:.3f}")
print(f"p-value Kupiec (2020): {p_val_global_2020:.3f}")
123 print(f"Esito del test (global) (2020): {global_result_2020}")
kupiec_pvals_2020 = kupiec_pvals.loc["2020"]
125 days_ge_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 >= 0.05).sum()
days_lt_005_2020 = (kupiec_pvals_2020 < 0.05).sum()
127 print(f"(2020) Giorni con p-value >= 0.05: {days_ge_005_2020}")
print(f"(2020) Giorni con p-value < 0.05: {days_lt_005_2020}")
129 plt.figure(figsize=(12, 6))

```

```

plt.plot(hist_df_2020.index, hist_df_2020["VaR Storico 99%"],
         label="VaR Storico 99% (2020)", color='red', lw=1.5)
131 plt.plot(hist_df_2020.index, hist_df_2020["Perdita Effettiva"],
         label="Perdita Effettiva (2020)", color='blue', lw=1)
violation_mask_2020 = hist_df_2020["Perdita Effettiva"] >
         hist_df_2020["VaR Storico 99%"]
133 plt.scatter(hist_df_2020.index[violation_mask_2020],
         hist_df_2020["Perdita Effettiva"][violation_mask_2020],
         color='darkred', label="Violazioni", marker='o')
135 plt.xlabel("Data")
plt.ylabel("Valore (monetario)")
137 plt.title("Simulazione Storica (2020): VaR vs Perdite Effettive")
plt.legend()
139 plt.grid(True)
plt.tight_layout()
141 plt.savefig(os.path.join(save_folder, "SIMSTO_3.png"))
plt.show()
143
# 6. TEST DI CHRISTOFFERSEN
145 def christoffersen_test(violations):
    T00 = T01 = T10 = T11 = 0
147     violations = list(violations)
    for t in range(1, len(violations)):
149         prev, curr = violations[t-1], violations[t]
        if prev == 0 and curr == 0:
151             T00 += 1
        elif prev == 0 and curr == 1:
153             T01 += 1
        elif prev == 1 and curr == 0:
155             T10 += 1
        elif prev == 1 and curr == 1:
157             T11 += 1
    pi01 = T01 / (T00 + T01) if (T00 + T01) > 0 else 0.00001

```

```

159     pill = T11 / (T10 + T11) if (T10 + T11) > 0 else 0.00001
        pi = (T01 + T11) / (T00 + T01 + T10 + T11)
161     logL0 = (T00 + T01) * np.log(1 - pi) + (T10 + T11) * np.log(pi)
        logL1 = T00 * np.log(1 - pi01) + T01 * np.log(pi01) + T10 *
            np.log(1 - pill) + T11 * np.log(pill)
163     LR_indep = -2 * (logL0 - logL1)
        p_value = 1 - chi2.cdf(LR_indep, df=1)
165     return LR_indep, p_value
LR_indep_hist, p_val_indep_hist =
    christoffersen_test(hist_df["Violazione"])
167 esito_indep_hist = "Accettato" if p_val_indep_hist >= 0.05 else
    "Rigettato"
print("\n=== TEST DI CHRISTOFFERSEN (Indipendenza) - SIMULAZIONE
    STORICA ===")
169 print(f"LR: {LR_indep_hist:.3f}")
    print(f"p-value: {p_val_indep_hist:.3f}")
171 print(f"Esito: {esito_indep_hist}")

173 # 7. TEST DI CONDITIONAL COVERAGE
LR_cc_hist = LR_global + LR_indep_hist
175 p_val_cc_hist = 1 - chi2.cdf(LR_cc_hist, df=2)
    esito_cc_hist = "Accettato" if p_val_cc_hist >= 0.05 else "Rigettato"
177 print("\n=== TEST DI CONDITIONAL COVERAGE (Kupiec + Christoffersen)
    - SIMULAZIONE STORICA ===")
    print(f"LR Conditional Coverage: {LR_cc_hist:.3f}")
179 print(f"p-value: {p_val_cc_hist:.3f}")
    print(f"Esito: {esito_cc_hist}")

181
    # 8. MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI IL VaR
183 violations_hist = hist_df[hist_df["Violazione"] == 1].copy()
    violations_hist["Exceedance"] = violations_hist["Perdita Effettiva"]
        - violations_hist["VaR Storico 99%"]
185 mean_excess_yearly =

```

```

        violations_hist["Exceedance"].groupby(violations_hist.index.year)
        .mean()
187 print("\nExpected Shortfall (solo eccesso oltre VaR) per anno:")
    print(mean_excess_yearly)

```

**Codice A.7.** *Script Python per il calcolo del VaR tramite simulazione Monte Carlo tradizionale sul portafoglio oggetto di analisi.*

```

# IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
2 import pandas as pd
import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import chi2
6 import warnings
import os
8
# 1. CARICAMENTO E PREPARAZIONE DEI DATI
10 output_dir = os.path.expanduser('~/Desktop/GRAFICI')
os.makedirs(output_dir, exist_ok=True)
12 file_path =
    '/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/Portafoglio_Dati_2014-2024.xlsx'
df = pd.read_excel(file_path, sheet_name='Sheet1')
14 df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])
df.set_index('Date', inplace=True)
16 if (df <= 0).any().any():
    print('Attenzione: Sono stati trovati valori non positivi.
        Verranno rimossi dalla serie storica.')
18 df = df[(df > 0).all(axis=1)]
returns = df.pct_change().dropna()
20 start_date = '2015-01-01'
returns_period = returns.loc[start_date:]
22 conf_level = 0.99
portfolio_value = 1_000_000

```

```

24 num_assets = len(df.columns)
   weights = np.ones(num_assets) / num_assets
26 window_size = 250
   num_simulations = 10_000
28 p_expected = 1 - conf_level
   portfolio_returns = returns @ weights
30
   # 2. METODO MONTE CARLO STANDARD
32 VaR_mc = []
   for i in range(window_size, len(returns)):
34       window_data = returns.iloc[i-window_size:i]
           mean_vector = window_data.mean().values
36       cov_matrix = window_data.cov().values
           try:
38           simulated_returns =
               np.random.multivariate_normal(mean_vector, cov_matrix,
               size=num_simulations)
               portfolio_sim_returns = simulated_returns @ weights
40           var_sim = -np.percentile(portfolio_sim_returns, (1 -
               conf_level) * 100) * portfolio_value
           except np.linalg.LinAlgError:
42           var_sim = np.nan
               VaR_mc.append(var_sim)
44 mc_results = pd.DataFrame({
           'VaR MC 99%': VaR_mc,
46           'Perdita Effettiva': - (returns.iloc>window_size:] @ weights) *
               portfolio_value
           }, index=returns.index>window_size:])
48 mc_results = mc_results.loc[start_date:]
   violations_mc = (mc_results['Perdita Effettiva'] > mc_results['VaR
       MC 99%']).astype(int)
50
   # 3. MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI IL VaR

```

```

52 violations_mc_df = mc_results[mc_results["Perdita Effettiva"] >
    mc_results["VaR MC 99%"]].copy()
violations_mc_df["Exceedance"] = violations_mc_df["Perdita
    Effettiva"] - violations_mc_df["VaR MC 99%"]
54 mean_exceed_by_year =
    violations_mc_df["Exceedance"].groupby(violations_mc_df.index.year).mean()
print("=== Expected Shortfall (eccesso oltre il VaR) per anno -
    Monte Carlo ===")
56 for year, mean_loss in mean_exceed_by_year.items():
    print(f"Anno {year}: {mean_loss:,.2f} ,ζ")
58
# 4. TEST DI KUPIEC
60 def kupiec_test(n, x, p_expected):
    if x == 0:
62         LR = -2 * n * np.log(1 - p_expected)
    elif x == n:
64         LR = -2 * n * np.log(p_expected)
    else:
66         p_hat = x / n
        LR = -2 * ((n - x) * np.log((1 - p_expected) / (1 - p_hat))
            + x * np.log(p_expected / p_hat))
68     p_value = 1 - chi2.cdf(LR, df=1)
    return LR, p_value
70 n_global = len(mc_results)
x_global = violations_mc.sum()
72 LR_global, p_val_global = kupiec_test(n_global, x_global, p_expected)
global_result = 'Accettato' if p_val_global >= 0.05 else 'Rigettato'
74 print('\n=== RISULTATI GLOBALI (MONTE CARLO NORMALE - 2015-2024)
    ===')
print(f'Numero totale di osservazioni: {n_global}')
76 print(f'Numero totale di violazioni: {x_global}')
print(f'LR Kupiec: {LR_global:.3f}')
78 print(f'p-value Kupiec: {p_val_global:.3f}')

```

```

print(f'Esito del test (global): {global_result}')
80
# 5. GRAFICO: VAR VS PERDITE EFFETTIVE (2015-2024)
82 plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(mc_results.index, mc_results['VaR MC 99%'], label='VaR
Monte Carlo 99%', color='red')
84 plt.plot(mc_results.index, mc_results['Perdita Effettiva'],
label='Perdita Effettiva', color='blue')
violation_mask = mc_results['Perdita Effettiva'] > mc_results['VaR
MC 99%']
86 plt.scatter(mc_results.index[violation_mask], mc_results['Perdita
Effettiva'][violation_mask],
label='Violazioni', color='darkred', marker='o')
88 plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Valore (monetario)')
90 plt.title('Metodo Monte Carlo: VaR vs Perdite Effettive (2015-2024)')
plt.legend()
92 plt.grid(True)
plt.tight_layout()
94 plt.savefig(os.path.join(output_dir, 'MonteCarlo_1.png'))
plt.show()
96 plt.close()

98 # 6. GRAFICO: VIOLAZIONI PER ANNO (2015-2024)
violations_yearly = violations_mc.resample('A').sum()
100 plt.figure(figsize=(10,6))
plt.bar(violations_yearly.index.year, violations_yearly.values,
color='green')
102 plt.axhline(3, linestyle='--', color='red')
plt.yticks(np.arange(0, 14, 1))
104 plt.xlabel('Anno')
plt.ylabel('Numero di violazioni')
106 plt.title('Violazioni per anno (Metodo Monte Carlo - 2015-2024)')

```

```

plt.grid(True)
108 plt.xticks(violations_yearly.index.year, rotation=45)
plt.tight_layout()
110 plt.savefig(os.path.join(output_dir, 'MonteCarlo_2.png'))
plt.show()
112 plt.close()

114 # 7. ANALISI ANNO 2020
mc_results_2020 = mc_results.loc['2020']
116 violations_mc_2020 = (mc_results_2020['Perdita Effettiva'] >
    mc_results_2020['VaR MC 99%']).astype(int)
n_global_2020 = len(mc_results_2020)
118 x_global_2020 = violations_mc_2020.sum()
LR_global_2020, p_val_global_2020 = kupiec_test(n_global_2020,
    x_global_2020, p_expected)
120 global_result_2020 = 'Accettato' if p_val_global_2020 >= 0.05 else
    'Rigettato'
print('\n=== RISULTATI GLOBALI (MONTE CARLO NORMALE - 2020) ===')
122 print(f'Numero di osservazioni (2020): {n_global_2020}')
print(f'Numero di violazioni (2020): {x_global_2020}')
124 print(f'LR Kupiec (2020): {LR_global_2020:.3f}')
print(f'p-value Kupiec (2020): {p_val_global_2020:.3f}')
126 print(f'Esito del test (2020): {global_result_2020}')
plt.figure(figsize=(12, 6))
128 plt.plot(mc_results_2020.index, mc_results_2020['VaR MC 99%'],
    label='VaR Monte Carlo 99% (2020)', color='red')
plt.plot(mc_results_2020.index, mc_results_2020['Perdita
    Effettiva'], label='Perdita Effettiva (2020)', color='blue')
130 violation_mask_2020 = mc_results_2020['Perdita Effettiva'] >
    mc_results_2020['VaR MC 99%']
plt.scatter(mc_results_2020.index[violation_mask_2020],
    mc_results_2020['Perdita Effettiva'][violation_mask_2020],
132 label='Violazioni (2020)', color='darkred', marker='o')

```

```

plt.xlabel('Data')
134 plt.ylabel('Valore (monetario)')
plt.title('Metodo Monte Carlo (2020): VaR vs Perdite Effettive')
136 plt.legend()
plt.grid(True)
138 plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_dir, 'MonteCarlo_3.png'))
140 plt.show()
plt.close()
142
# 8. TEST DI CHRISTOFFERSEN
144 def christoffersen_test(violations):
    T00 = T01 = T10 = T11 = 0
146     violations = list(violations)
    for t in range(1, len(violations)):
148         prev, curr = violations[t-1], violations[t]
        if prev == 0 and curr == 0:
150             T00 += 1
        elif prev == 0 and curr == 1:
152             T01 += 1
        elif prev == 1 and curr == 0:
154             T10 += 1
        elif prev == 1 and curr == 1:
156             T11 += 1
    pi01 = T01 / (T00 + T01) if (T00 + T01) > 0 else 1e-5
158     pi11 = T11 / (T10 + T11) if (T10 + T11) > 0 else 1e-5
    pi = (T01 + T11) / (T00 + T01 + T10 + T11)
160     logL0 = (T00 + T01) * np.log(1 - pi) + (T10 + T11) * np.log(pi)
    logL1 = T00 * np.log(1 - pi01) + T01 * np.log(pi01) + T10 *
        np.log(1 - pi11) + T11 * np.log(pi11)
162     LR_indep = -2 * (logL0 - logL1)
    p_value = 1 - chi2.cdf(LR_indep, df=1)
164     return LR_indep, p_value

```

```

print()
166 print('=== TEST DI CHRISTOFFERSEN (Indipendenza) - MONTE CARLO
      NORMALE ===')
LR_indep_mc, p_val_indep_mc = christoffersen_test(violations_mc)
168 esito_indep_mc = 'Accettato' if p_val_indep_mc >= 0.05 else
      'Rigettato'
print(f'LR: {LR_indep_mc:.3f}')
170 print(f'p-value: {p_val_indep_mc:.3f}')
print(f'Esito: {esito_indep_mc}')
172
# 9. TEST DI CONDITIONAL COVERAGE
174 print()
print('=== TEST DI CONDITIONAL COVERAGE - MONTE CARLO NORMALE ===')
176 LR_cc_mc = LR_global + LR_indep_mc
p_val_cc_mc = 1 - chi2.cdf(LR_cc_mc, df=2)
178 esito_cc_mc = 'Accettato' if p_val_cc_mc >= 0.05 else 'Rigettato'
print(f'LR Conditional Coverage: {LR_cc_mc:.3f}')
180 print(f'p-value: {p_val_cc_mc:.3f}')
print(f'Esito: {esito_cc_mc}')

```

**Codice A.8.** *Script Python per il calcolo del VaR tramite simulazione Monte Carlo avanzata con GARCH(1,1), distribuzione t-Student e importance sampling.*

```

1 # IMPORTAZIONE DELLE LIBRERIE
import pandas as pd
3 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.stats import chi2, t
from scipy.optimize import minimize
7 from arch import arch_model
import warnings
9 warnings.filterwarnings("ignore")

```

```

11 # CARICAMENTO E PREPARAZIONE DEI DATI
    output_dir = "/Users/nunziolavela/Desktop/GRAFICI"
13 file_path =
        "/Users/nunziolavela/Desktop/TESI/Portafoglio_Dati_2014-2024.xlsx"
    df = pd.read_excel(file_path, sheet_name="Sheet1")
15 df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])
    df.set_index('Date', inplace=True)
17 if (df <= 0).any().any():
        print("Attenzione: Sono stati trovati valori non positivi.
            Verranno rimossi dalla serie storica.")
19     df = df[(df > 0).all(axis=1)]
    returns = df.pct_change().dropna()
21
    # PARAMETRI
23 conf_level = 0.99
    portfolio_value = 1_000_000
25 num_assets = len(df.columns)
    weights = np.ones(num_assets) / num_assets
27 portfolio_returns = returns @ weights
    window_size = 250
29 num_simulations = 10_000

31 # FUNZIONE TEST DI KUPIEC
def kupiec_test(n, x, p_expected):
33     if x == 0:
        LR = -2 * n * np.log(1 - p_expected)
35     elif x == n:
        LR = -2 * n * np.log(p_expected)
37     else:
        p_hat = x / n
39     LR = -2 * ((n - x) * np.log((1 - p_expected)/(1 - p_hat)) +
        x * np.log(p_expected/p_hat))

```

```

    p_value = 1 - chi2.cdf(LR, df=1)
41     return LR, p_value

43 # MONTE CARLO IMPLEMENTATO: GARCH + t-Student + IMPORTANCE SAMPLING
def estimate_df(data):
45     def neg_log_likelihood(df_param):
        df_val = df_param[0]
47         return -np.sum(t.logpdf(data, df=df_val, loc=np.mean(data),
            scale=np.std(data, ddof=1)))
        result = minimize(neg_log_likelihood, x0=[5], bounds=[(3, 30)],
49             method='L-BFGS-B')
        return result.x[0]

51 VaR_MC_imp = []
df_t_student_list = []
53 volatility_series = []

55 for i in range(window_size, len(portfolio_returns)):
    window_data = portfolio_returns.iloc[i-window_size:i]
57     model = arch_model(window_data * 100, vol='Garch', p=1, q=1,
        mean='Constant', dist='normal')
    fit = model.fit(dispen="off")
59     garch_vol = np.sqrt(fit.conditional_volatility.iloc[-1])
    volatility_series.append(garch_vol)

61
    df_t = estimate_df(window_data)
63     df_t_student_list.append(df_t)

65     mean_return = np.mean(window_data)
    sims = mean_return + (garch_vol / 100) * t.rvs(df=df_t,
        size=num_simulations)
67     theta = 0.05
    weights_IS = np.exp(theta * sims)

```

```

69     sorter = np.argsort(sims)
       sims_sorted = sims[sorter] * portfolio_value
71     w_sorted = weights_IS[sorter]
       cumw = np.cumsum(w_sorted)
73     cutoff = (1 - conf_level) * cumw[-1]
       idx_q = np.searchsorted(cumw, cutoff)
75     var_sim = -sims_sorted[idx_q]
       VaR_MC_imp.append(var_sim)
77
# COSTRUZIONE RISULTATI
79 results_index = portfolio_returns.index[window_size:]
MC_imp_df = pd.DataFrame({
81     "VaR_MC_tStudent_GARCH": VaR_MC_imp,
       "Perdita_Effettiva": -portfolio_returns.iloc[window_size:] *
           portfolio_value,
83     "Gradi_Liberta_tStudent": df_t_student_list,
       "GARCH_Volatilita_percento": volatility_series
85 }, index=results_index)

87 MC_imp_df["Violation"] = (MC_imp_df["Perdita_Effettiva"] >
       MC_imp_df["VaR_MC_tStudent_GARCH"]).astype(int)
MC_imp_df["Excess_Loss"] = (MC_imp_df["Perdita_Effettiva"] -
       MC_imp_df["VaR_MC_tStudent_GARCH"]).clip(lower=0)
89
# TEST DI KUPIEC GLOBALE
91 n_global_MC_imp = len(MC_imp_df)
x_global_MC_imp = MC_imp_df["Violation"].sum()
93 LR_global_MC_imp, p_val_global_MC_imp = kupiec_test(n_global_MC_imp,
       x_global_MC_imp, 1 - conf_level)
global_result_MC_imp = "Accettato" if p_val_global_MC_imp >= 0.05
       else "Rigettato"
95
print("=== RISULTATI GLOBALI (MONTE CARLO IMPLEMENTATO -

```

```

    t-Student+GARCH) ===")
97 print("Numero totale di osservazioni:", n_global_MC_imp)
    print("Numero totale di violazioni:", x_global_MC_imp)
99 print("LR Kupiec:", round(LR_global_MC_imp, 3))
    print("p-value Kupiec:", round(p_val_global_MC_imp, 3))
101 print("Esito del test (global):", global_result_MC_imp)

103
    # GRAFICO: VaR vs PERDITE
105 plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.plot(MC_imp_df.index, MC_imp_df["VaR MC (t-Student+GARCH)"],
             label="VaR MC (t-Student+GARCH)", color='red', lw=1.5)
107 plt.plot(MC_imp_df.index, MC_imp_df["Perdita Effettiva"],
             label="Perdita Effettiva", color='blue', lw=1)
    vio_idx = MC_imp_df.index[MC_imp_df["Violation"] == 1]
109 vio_losses = MC_imp_df.loc[vio_idx, "Perdita Effettiva"]
    plt.scatter(vio_idx, vio_losses, color='darkred', s=20,
               label="Violazioni")
111 plt.xlabel("Data")
    plt.ylabel("Valore (monetario)")
113 plt.title("Monte Carlo Implementato (t-Student+GARCH): VaR vs
             Perdite Effettive")
    plt.legend()
115 plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
117 plt.savefig(f"{output_dir}/var_vs_perdite.png")
    plt.show()
119
    # GRAFICO: VIOLAZIONI PER ANNO
121 violations_yearly = MC_imp_df["Violation"].resample('A').sum()
    violations_yearly = violations_yearly[violations_yearly.index.year
    >= 2015]
123 plt.figure(figsize=(10, 6))

```

```

plt.bar(violations_yearly.index.year, violations_yearly.values,
        color='green')
125 plt.axhline(3, color='red', linestyle='--')
    for year in violations_yearly.index.year:
127         plt.axvline(year, color='lightgrey', linestyle='--',
                        linewidth=0.5)
plt.xlabel("Anno")
129 plt.ylabel("Numero di violazioni")
plt.title("Violazioni per anno (Monte Carlo Implementato)")
131 plt.xticks(violations_yearly.index.year, rotation=45)
plt.grid(axis='y')
133 plt.legend()
plt.tight_layout()
135 plt.savefig(f"{output_dir}/violazioni_annue.png")
plt.show()
137
# MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI
139 excess_annuale = MC_imp_df.loc[MC_imp_df["Excess Loss"] > 0, "Excess
        Loss"].resample('A').mean()
excess_annuale = excess_annuale[excess_annuale.index.year >= 2015]
141 print("=== MEDIA ANNUA DELLE PERDITE ECCEDENTI IL VAR ===")
    for dt, val in excess_annuale.items():
143         print(f"{dt.year}: {val:.2f} ,Ç")

145 # ANALISI COVID 2020
MC_imp_df_covid = MC_imp_df.loc["2020-01-01":"2020-12-31"]
147 violations_covid = (MC_imp_df_covid["Perdita Effettiva"] >
        MC_imp_df_covid["VaR MC (t-Student+GARCH)"]).astype(int)
n_covid = len(MC_imp_df_covid)
149 x_covid = violations_covid.sum()
LR_covid, p_val_covid = kupiec_test(n_covid, x_covid, 1 - conf_level)
151 global_result_covid = "Accettato" if p_val_covid >= 0.05 else
        "Rigettato"

```

```

print("=== RISULTATI GLOBALI (MC Implementato - COVID 2020) ===")
153 print(f"Numero totale di osservazioni (2020): {n_covid}")
print(f"Numero totale di violazioni (2020): {x_covid}")
155 print(f"LR Kupiec (2020): {LR_covid:.3f}")
print(f"p-value Kupiec (2020): {p_val_covid:.3f}")
157 print(f"Esito del test (global) (2020): {global_result_covid}")

159 # GRAFICO COVID 2020
plt.figure(figsize=(12, 6))
161 plt.plot(MC_imp_df_covid.index, MC_imp_df_covid["VaR MC
      (t-Student+GARCH)"], label="VaR MC 2020", color='red', lw=1.5)
plt.plot(MC_imp_df_covid.index, MC_imp_df_covid["Perdita
      Effettiva"], label="Perdita Effettiva 2020", color='blue', lw=1)
163 vio20_idx = MC_imp_df_covid.index[MC_imp_df_covid["Violation"] == 1]
vio20_losses = MC_imp_df_covid.loc[vio20_idx, "Perdita Effettiva"]
165 plt.scatter(vio20_idx, vio20_losses, color='darkred', s=20,
      label="Violazioni")
plt.xlabel("Data")
167 plt.ylabel("Valore (monetario)")
plt.title("Monte Carlo Implementato (t-Student+GARCH): VaR vs
      Perdite Effettive (COVID 2020)")
169 plt.legend()
plt.grid(True)
171 plt.tight_layout()
plt.savefig(f"{output_dir}/var_vs_perdite_covid2020.png")
173 plt.show()

175 # TEST DI CHRISTOFFERSEN
def christoffersen_test(violations):
177     T00 = T01 = T10 = T11 = 0
     seq = list(violations)
179     for t in range(1, len(seq)):
         prev, curr = seq[t-1], seq[t]

```

```

181     if prev == 0 and curr == 0: T00 += 1
        elif prev == 0 and curr == 1: T01 += 1
183     elif prev == 1 and curr == 0: T10 += 1
        elif prev == 1 and curr == 1: T11 += 1
185     pi01 = T01 / (T00 + T01) if (T00 + T01) > 0 else 0.00001
     pi11 = T11 / (T10 + T11) if (T10 + T11) > 0 else 0.00001
187     pi = (T01 + T11) / (T00 + T01 + T10 + T11)
     logL0 = (T00 + T01) * np.log(1 - pi) + (T10 + T11) * np.log(pi)
189     logL1 = T00 * np.log(1 - pi01) + T01 * np.log(pi01) + T10 *
        np.log(1 - pi11) + T11 * np.log(pi11)
     LR_indep = -2 * (logL0 - logL1)
191     p_value = 1 - chi2.cdf(LR_indep, df=1)
     return LR_indep, p_value
193
LR_indep_MC, p_val_indep_MC =
    christoffersen_test(MC_imp_df["Violation"])
195 print("\n=== TEST DI CHRISTOFFERSEN (Indipendenza) ===")
     print(f"LR Indipendenza: {LR_indep_MC:.3f}")
197 print(f"p-value: {p_val_indep_MC:.3f}")
     print("Esito del test:", "Accettato" if p_val_indep_MC >= 0.05 else
        "Rigettato")
199
# TEST CONDITIONAL COVERAGE
201 LR_cc = LR_global_MC_imp + LR_indep_MC
     p_val_cc = 1 - chi2.cdf(LR_cc, df=2)
203 esito_cc = "Accettato" if p_val_cc >= 0.05 else "Rigettato"
     print("\n=== TEST DI CONDITIONAL COVERAGE (Kupiec + Christoffersen)
        ===")
205 print(f"LR Conditional Coverage: {LR_cc:.3f}")
     print(f"p-value: {p_val_cc:.3f}")
207 print("Esito del test:", esito_cc)

```

# Bibliografia

- [1] Alarm Airmic and Irm, *A risk management standard*, Federation of European Risk Management Associations (FERMA) (2003), Traduzione italiana a cura di FERMA.
- [2] G. Barone Adesi, K. Giannopoulos, and L. Vosper, *Var without correlations for portfolios of derivative securities*, Journal of Futures Markets (1999).
- [3] T. Bollerslev, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics (1986), 307–327.
- [4] J. Boudoukh, M. Richardson, and R. Whitelaw, *The best of both worlds*, Risk (1998).
- [5] P. F. Christoffersen, *Evaluating interval forecasts*, International economic review (1998), 841–862.
- [6] G. Di Giorgio, *Economia e politica monetaria*, Wolters Kluwer, 2020.
- [7] R. Eckhardt, *Stan ulam, john von neumann, and the monte carlo method*, Los Alamos Science (1987).
- [8] R. F. Engle, *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation*, Econometrica (1982), 987–1007.

- [9] M. Ferfaglia, *Basilea iv: Ecco il nuovo framework normativo bancario*, Risk & Compliance Platform Europe (2024).
- [10] P. Glasserman, *Monte carlo methods in financial engineering*, Applications of Mathematics, Springer, New York, 2004.
- [11] M. Haugh, *Monte-carlo methods for risk management*, 2016, Lecture notes, IEOR E4602: Quantitative Risk Management, Columbia University.
- [12] M. Haugh, *Generating random variables and stochastic processes*, 2017, Lecture Notes, IEOR E4703: Monte Carlo Simulation, Columbia University.
- [13] J. C. Hull, E. Barone, et al., *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, 2009.
- [14] Borsa Italiana, *Glossario finanziario*, Disponibile su <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario.html> (2003).
- [15] J.P. Morgan and Reuters, *RiskMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document*, Tech. report, J.P. Morgan/Reuters, New York, December 1996.
- [16] P. H. Kupiec, *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*, The Journal of Derivatives (1995), no. 2, 73–84.
- [17] V. Marchisio, *Computational tools for finance*, 2023, Lecture notes, LUISS Guido Carli, Roma.
- [18] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, revised ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.
- [19] A. Resti and A. Sironi, *Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione*, Egea, 2008.

- [20] Task Force on Climate-related Financial Disclosures, *Recommendations of the task force on climate-related financial disclosures*, Tech. report, Financial Stability Board, June 2017.
- [21] R. Tedeschi, *Storia quasi breve del risk management nelle banche*, Tratto da econopoly. ilsole24ore. com (2016).