



Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

Un'analisi dei modelli matematici di option pricing

RELATORE

Prof. GENNARO OLIVIERI

CANDIDATO

FRANCESCO PINNA

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1 Le Opzioni	1
1.1 Definizioni e tipologie	1
1.1.1 Posizioni su opzioni call	2
1.1.2 Posizioni su opzioni put	3
1.2 Opzioni europee, opzioni americane, opzioni esotiche	5
2 I modelli di option pricing	17
2.1 Introduzione ai modelli utilizzati nell'analisi	17
2.2 Il modello di Cox-Ross-Rubinstein	17
2.2.1 I prezzi neutrali al rischio	19
2.2.2 Utilizzo del modello binomiale per opzioni europee e americane	21
2.3 Il modello di Black-Scholes-Merton	22
2.3.1 Proprietà del moto browniano	23
2.3.2 Formula di Black-Scholes	24
2.3.3 Convergenza del modello binomiale al metodo BSM	29
2.4 Metodo Monte Carlo per le opzioni	36
2.4.1 Convergenza delle simulazioni Monte Carlo al modello di Black-Scholes	38
2.5 Il modello di Datar-Mathews	39
2.5.1 Implementazione del modello con la simulazione Monte-Carlo	40
2.6 Il modello di Heston	42
Appendice: Processi stocastici e simulazioni Monte-Carlo per le azioni	49
3 Applicazioni pratiche dei modelli	58
3.1 Introduzione all'analisi	58
3.1.1 Un programma omnicomprensivo	58
3.2 Capacità previsionali dei modelli	59
3.2.1 Implementazione dei salti lognormali nel modello di Heston	61
3.2.2 Calibrazione del modello Heston-Bates	65
4 Formalizzazione di un approccio alternativo	75
4.1 Riflessioni sull'implementazione del modello Heston-Bates	75
4.2 Proposta di un correttivo alla struttura tradizionale dei modelli Heston-type	76
4.2.1 Quadro di riferimento	76
4.2.2 Specificazione probabilistica del modello	76
4.2.3 Costruzione della misura neutrale al rischio	78

4.2.4	Appartenenza alla famiglia Affine Jump-Diffusion	80
4.2.5	Positività della varianza e condizione di Feller	81
4.2.6	Estensione non affine e implicazioni sulla calibrabilità	81
4.2.7	Formulazione variazionale e densità tiltata	83
4.2.8	Vincolo di martingala e struttura dell' h -processo	85
4.2.9	Procedura di calibrazione con regolarizzazione entropica	86
4.2.10	Analisi dei risultati	89

Abstract

Il presente elaborato si propone di effettuare una rassegna critica e comparativa dei più noti modelli di option pricing, che nel corso degli ultimi cinquant'anni hanno rappresentato i maggiori contributi alla teoria delle opzioni. Nella prima sezione si analizzano nel dettaglio tecnico le specificità sia delle strutture classiche, Black-Scholes, Cox-Ross-Rubinstein e Monte Carlo, che dei più avanzati modelli a volatilità stocastica della famiglia Heston. Per ciascuno di essi si è voluta implementare un'approfondita trattazione sulle ipotesi sottostanti, la costruzione della misura neutrale al rischio e i risultati di convergenza e replicazione utili al pricing e all'hedging dinamico. A partire dal capitolo 3, che apre la seconda sezione del lavoro, i modelli descritti vengono testati su chain reali, in modo da effettuare un'accurata valutazione sulla stabilità dei parametri e la capacità di riprodurre gli smile di volatilità. Assume particolare rilevanza in questo frangente il problema della calibrazione del modello di Heston con termini di salto proposto, ed è pertanto stato ritenuto rilevante fornire un'informativa completa ed interamente open-source sulla strategia sottostante l'intera procedura. Sulla base delle evidenze riscontrate nella fase precedente e già note in letteratura, viene introdotto un nuovo modello della famiglia Heston nel quale, la dinamica della varianza, mean-reverting di tipo CIR, incorpora un termine di retroazione (*feedback*) dipendente dal sottostante, in un quadro affine jump-diffusion con controllo della positività e possibili estensioni non affini. Seguendo la scia del recente filone di ricerca, la calibrazione del modello è impostata come problema variazionale con regolarizzazione entropica Sinkhorn e densità tiltata sotto la misura di rischio neutro, soggetta a vincolo di martingala, scelta che consente di integrare le informazioni deducibili dalle volatilità implicite con restrizioni strutturali sulla risk-neutral density in modo computazionalmente efficiente.

Ai costruttori della conoscenza, poiché nobile è la causa di chi vota la propria vita al progresso del genere umano.

1 Le Opzioni

1.1 Definizioni e tipologie

Le opzioni costituiscono una categoria di derivati finanziari, strumenti il cui valore è legato ad un'attività sottostante, come azioni, obbligazioni, valute o materie prime. Più nel dettaglio, queste sono dei contratti che danno il diritto al possessore (detto **holder** o **beneficiario**) di comprare o vendere una data quantità di sottostante ad un prezzo di esercizio (o **strike price**) prestabilito. La controparte del titolare, ossia il **concedente** (o **writer**), concede al primo l'opzione in cambio della corresponsione di un premio (rappresentato dal prezzo dell'opzione stessa).

Tali strumenti finanziari possono essere classificati sulla base di vari criteri, sebbene la distinzione più adottata si basi sul diritto conferito al possessore. Su queste basi possiamo distinguere tra opzioni call, che attribuiscono all'acquirente il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare il sottostante ad un prezzo specifico entro una determinata scadenza, e opzioni put, le quali fanno ricadere in capo all'holder il diritto di vendere l'attività sottostante entro una data prefissata.

Ad ogni modo, è possibile ricorrere anche ad altre discriminanti per classificare le opzioni, quali la tipologia di sottostante e lo stile di esercizio. Volendo approfondire tale ultimo criterio, individuiamo le opzioni europee, il cui diritto può essere esercitato solo alla scadenza, e le opzioni americane, il cui esercizio è possibile in qualsiasi momento fino a tale data.

Infine, risulta utile distinguere le opzioni senza caratteristiche aggiuntive (cosiddette **plain vanilla**) dalle opzioni **esotiche**, che presentano particolari condizioni relative alla loro struttura o alle modalità di esercizio del diritto in esse incorporato. Come avremo occasione di approfondire alla fine di questo capitolo, è ampio il ricorso a varianti quali le opzioni barriera, che si attivano (o disattivano) solo se il prezzo del sottostante raggiunge un certo prezzo predeterminato (c.d. barriera), le opzioni asiatiche, il cui payoff è determinato dal prezzo medio del sottostante in un determinato periodo di tempo (questo tipo di opzione si presta per sottostanti caratterizzati da marcata volatilità) o le opzioni basket, che differiscono dalle precedenti in quanto aventi ad oggetto un paniere di attività sottostanti, e il cui payoff sarà legato all'andamento complessivo delle stesse.

- **At the money:** se il prezzo di esercizio è pari al prezzo del sottostante.
- **In the money:** se l'immediato esercizio del diritto incorporato sarebbe profittevole.

- **Out of the money:** se non sussiste profitto dall'esercizio immediato dell'opzione.

Prendiamo ora in analisi alcune tipologie di operazioni che possono essere effettuate sulle opzioni call e put.

1.1.1 Posizioni su opzioni call

Tutte le tipologie di opzioni sono soggette ad operazioni di acquisto e vendita, il cui payoff (e il conseguente profilo di profit/loss) è facilmente determinabile.

Una posizione di acquisto di un'opzione call, nota come long call, è tipica di un operatore rialzista, che voglia sfruttare l'eventuale capital gain derivante dall'aumento di valore del sottostante, o che quantomeno voglia coprirsi dal rialzo dello stesso, garantendosi il diritto di acquistarlo ad un prezzo inferiore.

A livello matematico, possiamo esprimere il payoff di un'opzione call europea come:

$$\max[0, S(t) - K] = [S(t) - K]^+ \quad (1.1)$$

dove $S(t)$ indica il prezzo del sottostante alla scadenza e K il prezzo di esercizio.

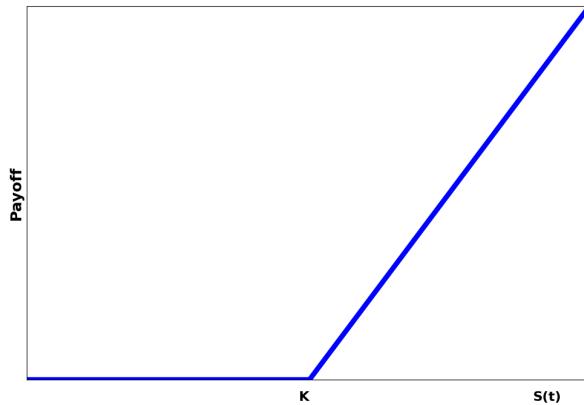


Figura 1: Payoff di una long call

Possiamo dunque facilmente comprendere come una long call presenti la possibilità di conseguire un profitto virtualmente illimitato, considerando la crescita del sottostante all'infinito.

Al contrario, la controparte di una long call, ossia una short call, può essere identificata in un operatore ribassista, che vuole lucrare sul capital loss del sottostante.

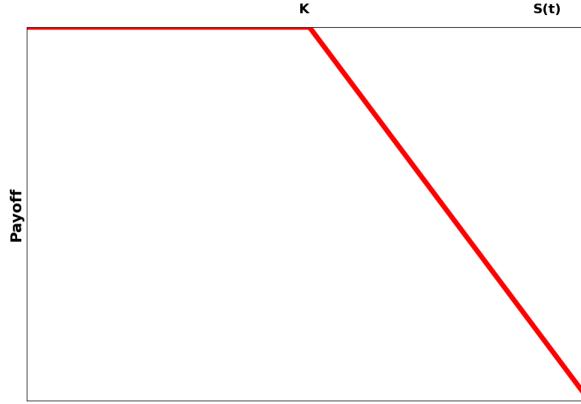


Figura 2: Payoff di una short call

Specularmente, l'holder di una short call cosiddetta *naked* (che non detiene il possessore del titolo, ed è quindi definibile come un ribassista puro) è esposto ad una perdita potenzialmente illimitata.

Ad ogni modo, la relazione per determinare il payoff non varia a seconda che si tratti di una posizione long o short, ma sulle premesse opposte delle due controparti dobbiamo attuare una distinzione nel calcolo del profit/loss.

Nel caso di una long call, come già detto, l'holder paga il premio alla controparte per assicurarsi la facoltà di acquistare il sottostante al prezzo di esercizio, e pertanto l'operazione varrà

$$-c + \max[0, S(t) - K] \quad (1.2)$$

Pertanto l'operatore non incorrerà in una perdita solamente se il prezzo del sottostante crescerà in misura pari o superiore al valore del premio corrisposto. Di converso, il detentore della short call riceve il premio, ma potrà essere esercitato dalla controparte qualora la sua aspettativa non sia confermata; definiamo quindi il profilo di P&L come:

$$c - \max[0, S(t) - K] \quad (1.3)$$

1.1.2 Posizioni su opzioni put

Anche con riferimento alle opzioni put, è possibile effettuare operazioni di acquisto e vendita, assumendo una posizione rispettivamente long e short. Tuttavia, la relazione matematica per la determinazione del payoff risulta differente rispetto al caso prima analizzato.

Più precisamente, il valore intrinseco di un'opzione put è dato da:

$$\max[0, K - S(t)] \quad (1.4)$$

Applicando la stessa logica adottata per le opzioni call, il profilo di profit/loss di una put può essere individuato come:

$$-p + \max[0, K - S(t)] \quad (1.5)$$

per una long put (ossia l'acquisto di un'opzione che assicura il diritto di vendita a scadenza del sottostante al prezzo di esercizio) e

$$p - \max[0, K - S(t)] \quad (1.6)$$

per una short put.

Volendo supportare l'analisi con una visualizzazione grafica, possiamo vedere come nella long put la perdita massima per l'holder è rappresentata dal **premio** in caso di mancato esercizio dell'opzione (una situazione nella quale il beneficiario operatore ribassista potrebbe incorrere in caso di rialzo del prezzo del sottostante, dal momento che sarebbe per lui più vantaggioso vendere lo stesso sul mercato).

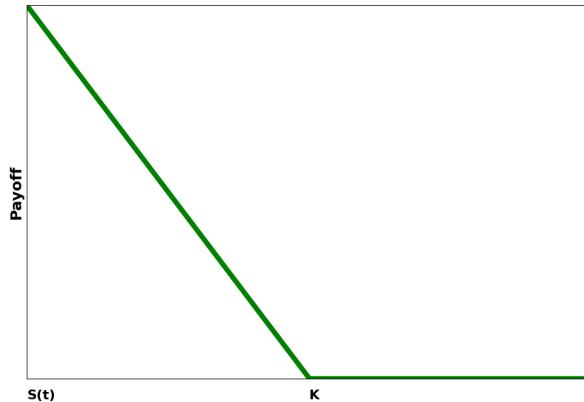


Figura 3: Payoff di una long put

Con riferimento ad una short put, detenuta da un operatore rialzista per scopi speculativi o di copertura (*hedging*), specularmente, il massimo profitto ottenibile dall'holder sarebbe pari al premio, nell'eventualità in cui la sua controparte non eserciti il diritto di vendita.

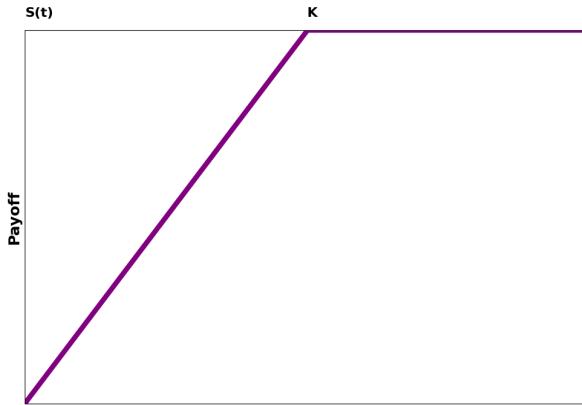


Figura 4: Payoff di una short put

1.2 Opzioni europee, opzioni americane, opzioni esotiche

Finora, abbiamo distinto le opzioni solo sulla base del diritto da esse incorporato, assumendo che questo potesse essere esercitato *esclusivamente* alla scadenza.

Tuttavia, questa logica, che pure si pone alla base di molti dei modelli che saranno presi in analisi in questo documento, viene meno nelle opzioni americane e in alcune tipologie di opzioni esotiche.

Infatti, nelle prime, a differenza delle opzioni europee, l'holder ha la possibilità di esercitare il diritto incorporato **in qualsiasi momento** prima della scadenza, dando vita ad uno strumento caratterizzato da maggiore flessibilità, sebbene risulti più complesso calcolarne il prezzo (aspetto oggetto di ulteriore approfondimento nel corso dei successivi capitoli 2 e 4).

Le opzioni esotiche invece si distinguono dalle europee e americane (c.d. *plain vanilla*) non in termini strettamente legati all'intervallo di esercizio, ma perché, in senso più ampio, presentano una o più caratteristiche non convenzionali. Pertanto, sono strumenti altamente personalizzabili e generalmente negoziati sui mercati OTC.

La seguente tabella illustra alcune delle tipologie di opzioni esotiche più utilizzate e le caratteristiche del loro payoff.

Numerose tipologie di opzioni esotiche tra quelle sopra proposte saranno richiamate nei capitoli successivi, di conseguenza, può essere utile definirne più dettagliatamente le proprietà alla base.

Opzioni con barriera: Come detto in precedenza, questa è un'opzione in cui l'importo del payoff dipende dal fatto che il sottostante raggiunga o meno un livello determinato,

Opzione esotica	Caratteristica del Payoff
Con Barriera	L'entità del payoff è subordinata al raggiungimento del prezzo del sottostante di un livello predeterminato (barriera).
Asiatiche	Il payoff è calcolato sulla base del prezzo medio del sottostante durante un periodo specifico.
Lookback	Il payoff è determinato dal prezzo più favorevole del sottostante durante la vita dell'opzione.
Binarie	Offrono un payoff fisso se il prezzo del sottostante raggiunge un certo livello.
Composte	Il sottostante è un'altra opzione, pertanto il payoff è legato alla presenza di due strike prices.
Bermudiane	L'opzione può essere esercitata solo in date specifiche predeterminate, oltre che alla data di scadenza.
Basket	Il payoff dipende dall'andamento di un paniere di attività sottostanti, come azioni, valute, materie prime o merci.
Path Dependent	Il payoff dipende dal percorso seguito dal prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione (e non da un singolo valore in un periodo specifico).
Cliquet	Garantiscono un rendimento minimo in cambio di un tetto massimo.

Tabella 1: Caratteristiche delle Opzioni Esotiche

detto *barriera*. Le opzioni in questione possono essere sia put che call, e si dividono principalmente nelle due categorie knock-in e knock-out.

Risulta molto facile comprendere che tra le due vi sia una differenza sostanziale, poiché mentre le prime **si attivano** solo se il prezzo dell'attività sottostante raggiunge, supera o scende sotto un livello di barriera specifica durante la vita dell'opzione, le seconde **si disattivano** al verificarsi della medesima condizione.

Sulla base di tale premessa, all'interno delle knock-in possiamo individuare le opzioni **Down-and-In**, che diventano attive solo se il prezzo del sottostante scende al di sotto della barriera, e **Up-and-In**, che si attivano solo se il valore del sottostante diventa superiore alla barriera, mentre nel novero delle knock-out distinguiamo tra opzioni **Down-and-Out**, le quali si annullano se il sottostante scende sotto la barriera e opzioni **Up-and-Out**, il cui payoff sarà nullo nel caso opposto.

Le opzioni con barriera (come tutte le altre opzioni esotiche) mostrano un profilo di rischio differente rispetto alle plain vanilla, e risultano adatte sia ad operatori altamente propensi che fortemente avversi al rischio, sia per finalità speculative che di copertura.

In particolare, un'opzione knock-in è adatta ad un operatore (rialzista e *risk-lover*) che ritiene che il prezzo del sottostante raggiungerà la barriera prima della scadenza, o che

voglia coprirsi da un eventuale rialzo dello stesso, ed in questo caso, attratto dal minor costo della copertura, opterà per un'opzione esotica della tipologia in analisi, piuttosto che per una long call vanilla.

D'altra parte, un investitore ribassista avverso al rischio (o un *hedger* rialzista) potrebbe trovare conveniente il ricorso ad un'opzione con barriera.

Le tabelle di seguito forniscono un riquadro di sintesi sulle condizioni alla base di ciascuna tipologia di barrier option e sulle modalità di calcolo del rispettivo payoff.

Tipo di Opzione	Condizione di Attivazione	Payoff
Down-and-In Call	$S_t \leq B$	$\max(S_T - K, 0)$
Up-and-In Call	$S_t \geq B$	$\max(S_T - K, 0)$
Down-and-In Put	$S_t \leq B$	$\max(K - S_T, 0)$
Up-and-In Put	$S_t \geq B$	$\max(K - S_T, 0)$

Tabella 2: Condizioni e payoff delle Opzioni Knock-In

Tipo di Opzione	Condizione di Annullamento	Payoff
Down-and-Out Call	$S_t > B$	$\max(S_T - K, 0)$
Up-and-Out Call	$S_t < B$	$\max(S_T - K, 0)$
Down-and-Out Put	$S_t > B$	$\max(K - S_T, 0)$
Up-and-Out Put	$S_t < B$	$\max(K - S_T, 0)$

Tabella 3: Condizioni e payoff delle Opzioni Knock-Out

Opzioni Asiatiche: In questa tipologia di opzioni esotiche, il payoff dipende dal prezzo medio del sottostante durante un determinato periodo di tempo, piuttosto che dal valore a scadenza; pertanto, il ricorso ad un'opzione asiatica potrebbe essere consigliabile in presenza di sottostanti caratterizzati da forte volatilità, quali prodotti petroliferi, metalli preziosi o valute.

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione riguarda la *frequenza* con cui si osserva il prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione, che può essere:

- **Regolare**, in cui il periodo tra una data di osservazione e la successiva non varia.
- **Crescente**, dove l'intervallo temporale tra due osservazioni si riduce progressivamente al crescere della vita dell'opzione.
- **Decrescente**, in cui il periodo tra due osservazioni cresce durante la vita dell'opzione.

In rapporto al calcolo dei payoff, distinguiamo in prima analisi tra opzioni di tipo **average price**, che corrispondono in pieno alla definizione precedentemente fornita (ossia

un'opzione il cui payoff dipende dalla media dei prezzi del sottostante durante il periodo di osservazione) e opzioni **average strike**, nelle quali il payoff è legato alla differenza tra il prezzo spot del sottostante alla scadenza e la media dei prezzi osservati durante il periodo di osservazione.

In secondo luogo, sono meritevoli di approfondimento le modalità di calcolo della media, in quanto è possibile ricorrere anche alla media geometrica in sostituzione della più comune media aritmetica.

Il ricorso alla prima è consigliabile in mercati caratterizzati da alta volatilità e per sottostanti che tendono a variare in modo esponenziale, poiché è meno influenzata dai valori estremamente alti o bassi (*outliers*) rispetto alla media aritmetica.

E pertanto, partendo dalle opzioni asiatiche con media aritmetica, calcoliamo i payoff delle average price options, rispettivamente call e put, come

$$\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i - K, 0 \right) \quad (1.7)$$

$$\max \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, 0 \right) \quad (1.8)$$

È facile applicare la stessa logica alle opzioni di tipo average strike, delle quali i payoff si calcolano considerando

$$\max \left(S_T - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, 0 \right) \quad (1.9)$$

$$\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i - S_T, 0 \right) \quad (1.10)$$

per call e put.

Qualora, per le ragioni sopra esposte, si preferisse ricorrere all'utilizzo della media geometrica, allora la relazione in analisi (sarà presentato ora solo il caso delle average price, poiché si tratta di una semplice variante dei concetti appena presi in analisi, la cui estensione al secondo caso è triviale) dovrà essere espressa attraverso la forma

$$\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_i \right)^{\frac{1}{n}} - K, 0 \right) \quad (1.11)$$

$$\max \left(K - \left(\prod_{i=1}^n S_i \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right) \quad (1.12)$$

sempre, rispettivamente, qualora si considerino opzioni call e put.

Opzioni Lookback: Come nel caso precedente, questo tipo di opzione si può rivelare

particolarmente utile in mercati volatili, dal momento che il suo valore intrinseco è legato al prezzo minimo o massimo raggiunto dal sottostante durante la vita dell'opzione.

Anche per le lookback, è possibile distinguere tra opzioni europee, esercitabili solo alla scadenza, e americana, esercitabili in qualsiasi momento entro tale data. Poste queste premesse, possiamo affermare che, secondo una logica non troppo dissimile dalle opzioni vanilla, il payoff di una lookback call europea è determinato da

$$\max(S_T - S_{\min}, 0) \quad (1.13)$$

dove S_{\min} indica il prezzo minimo assunto dal sottostante.

Il payoff di una lookback put europea è determinato come

$$\max(S_{\max} - S_T, 0) \quad (1.14)$$

dove S_{\max} è il prezzo massimo del sottostante.

Non diversamente da quanto detto per le plain vanilla, le opzioni americane si distinguono per il fatto che avremo un certo $t < T$ nel quale è possibile esercitare il diritto incorporato nell'opzione.

La complessità della tipologia di opzione esotica qui analizzata non risiede nel calcolo del suo valore intrinseco, bensì nella sua valutazione (o, in altri termini, nel calcolo del suo *premio*), la cui formula analitica si basa sul modello di **Black-Scholes** (che sarà oggetto di analisi approfondita a partire dal paragrafo 2.3), esteso per includere i prezzi estremi del sottostante.

Nello specifico, il premio di un'opzione lookback call europea è calcolato attraverso:

$$c_t = S_t e^{-q(T-t)} N(a_1) - S_{\min} e^{-r(T-t)} N(a_2) \quad (1.15)$$

dove:

- S_T è il prezzo del sottostante alla scadenza,
- S_{\min} è il prezzo minimo raggiunto dal sottostante durante la vita dell'opzione,
- q è il tasso di dividendo,
- r è il tasso di interesse,
- $N(a_1)$ e $N(a_2)$ sono le funzioni di distribuzione cumulativa normale,
- $a_1 = \frac{\ln(\frac{S_T}{S_{\min}}) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

Alternativamente, è possibile ricorrere ad una **simulazione Monte Carlo** per effettuare una valutazione con campionamento discreto.

Per le opzioni lookback americane, può inoltre risultare utile il **modello ad albero binomiale**, anch'esso oggetto di analisi nel capitolo successivo.

Opzioni Binarie: Questa è probabilmente la tipologia di opzione più semplice che verrà trattata in questo elaborato. Spesso utilizzate dagli speculatori più aggressivi, le opzioni binarie offrono solo due possibili esiti, quali un guadagno fisso o una perdita totale dell'investimento iniziale.

E dunque, qualora la previsione dell'holder, sia essa rialzista o ribassista, dovesse essere corretta, questi si vedrebbe attribuito un rendimento fisso, solitamente compreso tra il 70% e il 90% del premio, mentre, in caso contrario, perderebbe l'intero premio (possiamo pertanto convenire che in tal ultimo caso, il profilo di profit/loss dell'investitore non sarebbe tanto diverso dal mancato esercizio di un'opzione vanilla Out-of-the-money).

Una seconda peculiarità di queste opzioni esotiche rientra nell'**elevata brevità delle scadenze**, che generalmente variano da 30 secondi a 3 ore, risultando per tale motivo uno strumento così attraente per le operazioni di trading a breve termine.

Oltre alle tradizionali call e put, le opzioni binarie possono distinguersi in **one touch** e **range**, in cui l'investitore ritiene che il sottostante possa raggiungere un certo livello *almeno una volta* prima della scadenza, o che rimanga fino a tale data all'interno di un *intervallo* specificato.

Per ciascuna di queste tipologie, il payoff è rispettivamente determinabile come;

$$\text{Payoff (call)} = \begin{cases} P & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T \leq K \end{cases} \quad (1.16)$$

in cui, riprendendo la notazione precedente:

- P è il pagamento fisso (profitto) se l'opzione termina in-the-money,
- S_T è il prezzo dell'asset sottostante alla scadenza,
- K è il prezzo di esercizio.

$$\text{Payoff (put)} = \begin{cases} P & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T \geq K \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\text{Payoff (one touch)} = \begin{cases} P & \text{se } \exists t \leq T \mid S_t \geq L \\ 0 & \text{se } \forall t \leq T \Rightarrow S_t < L \end{cases} \quad (1.18)$$

dove:

- S_t è il prezzo dell'asset sottostante in qualsiasi momento t ,
- L è il livello di prezzo specificato,
- T è la scadenza dell'opzione.

$$\text{Payoff (range)} = \begin{cases} P & \text{se } L_1 \leq S_T \leq L_2 \\ 0 & \text{se } S_T < L_1 \vee S_T > L_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

con:

- L_1 e L_2 limiti inferiori e superiori dell'intervallo di prezzo.

Opzioni Composte: Rappresentano una sofisticata tipologia di opzioni esotiche il cui sottostante non è un'attività finanziaria *tradizionale* (quale un'azione, una valuta o una materia prima), bensì un altro contratto di opzione. È possibile in quest'ambito distinguere le quattro combinazioni originabili da questo strumento; **Call on Call**, **Call on Put**, **Put on Call** e **Put on Put**, che permettono all'investitore di acquisire posizioni di acquisto o vendita sulle due tipologie di opzioni.

Può essere interessante prendere in analisi le cosiddette opzioni *chooser*, le quali consentono all'acquirente di scegliere, entro una certa data, se trasformare il contratto sottostante in una call o una put, mantenendo invariati strike e scadenza. Il vantaggio che un simile tipo di opzione può offrire è piuttosto evidente in contesti di elevata volatilità o in mercati con direzionalità incerta.

Il payoff delle opzioni composte si determina in modo sequenziale, dal momento che deve essere effettuata la valutazione sia dell'opzione sottostante che dell'opzione composta (in cui sarà considerato come sottostante S_T il valore intrinseco appena calcolato della prima opzione).

In altri termini, esso può essere espresso come la somma algebrica dei payoff delle singole opzioni che la compongono, dati i prezzi di esercizio e le scadenze di ciascuna. Pertanto, considerando una *call on call* avente strike K_1 per l'opzione composta e K_2 per la

sottostante, alla scadenza T il payoff sarà pari a:

$$\max(\max(S_T - K_2, 0) - K_1, 0) \quad (1.20)$$

Il calcolo del premio risulta maggiormente complesso rispetto alle opzioni vanilla, per il semplice fatto che incorpora al suo interno la valutazione del valore atteso dell'opzione sottostante, il cui computo, può essere a sua volta di per sé complesso.

Il pricing di una *call on call* è effettuabile mediante la **formula di Geske** (Geske, 1979)¹, derivante da un'estensione del modello di Black-Scholes. La principale criticità, legata all'esistenza di due date di scadenza distinte, e dunque alla determinazione del valore atteso di una variabile aleatoria condizionata ad un'altra variabile aleatoria correlata, viene superata riducendo il problema al calcolo di probabilità congiunte delle variabili gaussiane correlate, tramite la funzione di distribuzione normale bivariata, ottenendo così un prezzo analitico (chiuso) per l'opzione (nel caso in esame call on call europea) senza la necessità di ricorrere a metodi numerici o simulazioni Monte Carlo². Dal punto di vista tecnico, siamo dunque di fronte ad una formula che nasce dalla necessità di calcolare il valore atteso di un payoff dipendente da due variabili aleatorie correlate, ovvero i logaritmi dei prezzi del sottostante a due scadenze diverse, dove la standardizzazione tramite d_i e b_i consente di mappare il problema nel dominio della probabilità gaussiana, mentre la funzione normale bivariata consente di integrare la dipendenza tra le due variabili.

In particolare, volendo definire S_t come il prezzo del sottostante finanziario che segue un **moto browniano geometrico** (concetto che sarà largamente ripreso nel corso dei capitoli successivi) sotto la misura di rischio neutrale:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.21)$$

è dimostrato che il prezzo C_{cc} dell'opzione composta al tempo zero è pari a:

$$C_{cc} = S_0 N_2(d_1, b_1; \rho) - K_2 e^{-rT_2} N_2(d_2, b_2; \rho) - K_1 e^{-rT_1} N(d_3)^3 \quad (1.22)$$

¹Sebbene Geske sia stato il primo a proporre una relazione per il prezzaggio delle opzioni composte, si annovera il metodo alternativo proposto da Buraschi e Dumas (2001), particolarmente efficiente anche per la valutazione di opzioni americane su azioni che pagano dividendi, nonché l'approccio innovativo proposto da Hess (2022), basato sul calcolo di Malliavin e sulle trasformate di Fourier per la valutazione di opzioni composte in contesti di volatilità stocastica e processi non standard.

²Ciononostante, il ricorso a tali tecniche risulta comunque inevitabile in una vasta pluralità di circostanze, comprendenti volatilità stocastica, presenza di dividendi o flussi di cassa intermedi e path-dependence.

³Analizzando la struttura della relazione notiamo come questa si componga del valore atteso scontato del sottostante, ponderato dalla probabilità congiunta che entrambe le variabili siano sopra le soglie d_1 e b_1 , $S_0 N_2(d_1, b_1; \rho)$, dello strike della call sottostante, anch'esso ponderato per la probabilità congiunta associata, $K_2 e^{-rT_2} N_2(d_2, b_2; \rho)$ e dello strike dell'opzione composta, ponderato dalla probabilità che l'opzione sottostante abbia, al tempo T_1 , valore superiore a K_1 , $K_1 e^{-rT_1} N(d_3)$.

dove:

- $N(\cdot)$ è la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard univariata,
- $N_2(\cdot, \cdot; \rho)$ è la funzione di distribuzione cumulativa della normale bivariata standard con correlazione ρ .

mentre i parametri b_i e d_i sono definiti come:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_1} \\ b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}} \\ b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2} \\ d_3 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_1}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \end{cases} \quad (1.23)$$

La correlazione tra le due variabili normali risulta:

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad (1.24)$$

Infine, per completezza definiamo la funzione di distribuzione cumulativa della normale bivariata standard, la quale assume la forma:

$$N_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right) du dv \quad (1.25)$$

Opzioni Bermudiane: rappresentano un'interessante categoria intermedia tra le opzioni americane ed europee, caratterizzata dall'esistenza di diverse date di esercizio, fissate contrattualmente *ex-ante*.

È dunque possibile affermare che siano provviste di un grado di flessibilità intermedio⁴, che le rende molto diffuse nei mercati obbligazionari, in veste di clausole di rimborso anticipato nei callable bonds, e nei derivati su tassi di interesse (come testimonia l'ampia diffusione

⁴che si traduce in un premio generalmente inferiore a quello di un'opzione americana ma superiore a quello di un'opzione europea con identiche caratteristiche in termini di sottostante, strike e scadenza

delle c.d. swaptions bermudiane), con le date di esercizio generalmente coincidenti con quelle dei pagamenti delle cedole.

Definiamo il payoff come il massimo tra il valore dell'esercizio immediato nelle date consentite e il valore atteso di mantenimento dell'opzione fino alla data di esercizio successiva, e dunque, considerando un insieme ordinato di date di esercizio $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ con $t_n = T$, il payoff al tempo t_i risulta:

$$V(t_i, S_{t_i}) = \max \left(h(S_{t_i}), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(t_{i+1}-t_i)} V(t_{i+1}, S_{t_{i+1}}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \right) \quad (1.26)$$

in cui si precisa che:

- $h(S_{t_i})$ corrisponde al payoff dell'esercizio immediato, ad esempio per una call: $\max(S_{t_i} - K, 0)$;
- $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot | \mathcal{F}_{t_i}]$ è l'aspettativa condizionata sotto la misura di rischio neutrale.

Il confronto tra il payoff dell'esercizio immediato e il valore atteso scontato del mantenimento *in vita* dell'opzione genera un problema di ottimizzazione dinamica e di valutazione condizionata su un processo stocastico, che si traduce in una struttura a più stadi (o *ricorsiva*) in cui il valore dell'opzione è funzione del valore futuro atteso e delle decisioni ottimali di esercizio, e proprio in luce di tale ricorsività non è ammissibile una soluzione chiusa per questa tipologia di opzioni esotiche, in quanto il valore di ogni nodo dipende da un'aspettativa condizionata sul valore dei nodi futuri, a sua volta legata ad ulteriori aspettative condizionate, ed inoltre, il processo stocastico del sottostante, spesso modellato come un moto browniano geometrico, rende impossibile integrare analiticamente tutte le variabili coinvolte in questa struttura dinamica.

La determinazione del premio di un'opzione bermudiana richiede in definitiva l'utilizzo di modelli binomiali o trinomiali, i quali permettono la discretizzazione del processo e valutano iterativamente il valore dell'opzione tramite *backward induction*, o alternativamente di simulazioni Monte Carlo con regressione, o **LSM** (Longstaff e Schwartz, 2001).⁵

Opzioni Basket: Si fa riferimento ad una classe di derivati esotici il cui payoff dipende da attività sottostanti, tipicamente costituiti da azioni, indici o valute. A differenza delle opzioni vanilla, le basket options si basano su un valore aggregato calcolato come combinazione lineare dei prezzi dei singoli componenti del paniere, pesati secondo un vettore di pesi prestabilito. Formalmente, dati un vettore di prezzi $S_t = (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \dots, S_t^{(n)})$ e un

⁵Tale valutazione può essere effettuata anche mediante il ricorso all'EDP di Black-Scholes estesa, con condizioni al contorno e condizioni aggiuntive interne al dominio temporale, che riflettono l'opportunità di esercizio discreto.

vettore di pesi $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, il valore del basket al tempo t è definito come:

$$B_t = \sum_{i=1}^n w_i S_t^{(i)} \quad (1.27)$$

Pertanto, si ha un payoff pari a:

$$\max[B_T - K, 0] \quad (1.28)$$

per una basket call europea e

$$\max[K - B_T, 0] \quad (1.29)$$

per una put.

La complessità intrinseca delle opzioni basket risiede nella natura multidimensionale del sottostante e nella necessità di modellare la dinamica congiunta dei prezzi dei singoli asset, tenendo conto delle loro volatilità individuali, e soprattutto, delle **correlazioni incrociate**. Assume rilevanza primaria per il pricing la matrice di correlazione tra i rendimenti delle attività componenti il basket, poiché la volatilità complessiva dello stesso non è semplicemente una media delle volatilità individuali, ma una funzione che incorpora le correlazioni tra i componenti, con l'effetto che una correlazione elevata tra i sottostanti tende ad aumentare la volatilità aggregata del basket, incrementando il premio dell'opzione, e viceversa.

Il modello più diffuso per descrivere la dinamica dei prezzi sottostanti è il **modello multivariato di Black-Scholes**, in cui ciascun asset segue un GBM⁶ con volatilità σ_i e i moti browniani sono correlati secondo una matrice ρ , tale che:

$$dS_t^{(i)} = rS_t^{(i)} dt + \sigma_i S_t^{(i)} dW_t^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.30)$$

dove $W_t^{(i)}$ sono moti browniani standard sotto la misura di rischio neutro \mathbb{Q} , e sono correlati tra loro secondo ρ_{ij} .

Opzioni Cliquet: Ci riferiamo in questo caso a strumenti derivati che offrono un rendimento minimo garantito annuale in cambio di un tetto massimo durante la vita del contratto. È certamente vero che anche questa tipologia di opzione esotica si presta a mercati volatili, ma a differenza delle opzioni asiatiche o lookback *in senso stretto*, si prevede che il prezzo del sottostante sia soggetto ad una variabilità più contenuta, o quantomeno non si prevede un rialzo al di sopra del *cap*.

Le opzioni cliquet possono essere considerate come una forma di opzioni lookback, che

⁶Processo di moto browniano geometrico.

fissano il miglior prezzo dell'asset sottostante su una serie di date predefinite durante la vita dell'opzione.

Queste opzioni sono spesso utilizzate in prodotti strutturati, *in primis* obbligazioni equity linked e investimenti garantiti da capitale, poiché permettono di bloccare i rendimenti a intervalli regolari, proteggendo il capitale dai cali di mercato⁷, ma anche perché, in forza del loro **meccanismo di reset** permette di ricalcolare il prezzo di esercizio sulla base delle fluttuazioni del sottostante, e di attuare una gestione del rischio più efficace, catturando i momenti favorevoli del mercato mentre si limita l'esposizione ai rischi di ribasso.

Più nello specifico, le opzioni cliquet sono caratterizzate da una serie di **intervalli di reset periodici**, durante i quali il prezzo di esercizio dell'opzione viene ricalcolato in base al valore corrente dell'asset sottostante, permettendo così di fissare i guadagni ottenuti fino a quel momento, proteggendo l'investitore dai ribassi futuri.

Pertanto, il primo passo per il calcolo del payoff consiste nell'identificare le suddette date di reset periodiche, siano esse, mensili, trimestrali, annuali, o ad una cadenza diversa e procedere all'aggiornamento dello strike in accordo alle rilevazioni effettuate.

Dopodiché, è necessario calcolare il rendimento del sottostante, che dovrà essere confrontato con il *floor*; qualora il primo fosse positivo, allora verrebbe registrato come profitto per quel periodo, altrimenti, a seconda delle specifiche contrattuali, sarà valutato come zero o perdita. Dopo aver applicato limiti di rendimento massimo e minimo (tenendo in tal modo conto degli eventuali effetti modificativi degli stessi sull'importo del payoff), alla fine della vita dell'opzione, i payoff di tutti i periodi vengono sommati per ottenere il valore intrinseco dell'opzione.

Possiamo dunque constatare che il payoff finale dell'opzione cliquet è la somma dei rendimenti aggregati, tenuto conto di eventuali cap e floor applicati o, in termini matematici;

$$\text{Payoff} = \sum_{i=1}^n \max(\min(R_i, \text{Cap}), \text{Floor}), \quad (1.31)$$

con R_i che rappresenta il rendimento periodale del sottostante.

⁷Notiamo anche in questo caso che l'investitore acquista un'opzione cliquet per assicurarsi un rendimento minimo, ma non si aspetta, al contrario, che il sottostante conosca una significativa crescita di valore, ed è pertanto disposto ad accettare un tetto.

2 I modelli di option pricing

Questo capitolo si propone di prendere in rassegna i più diffusi modelli di **option pricing**, di analizzarne i fondamenti matematici e valutarne l'efficienza, mostrandone le capacità applicative su un vasto campionario di opzioni, sia *vanilla* che *esotiche*.

2.1 Introduzione ai modelli utilizzati nell'analisi

Il primo approccio preso in analisi è il **modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein**, il quale, discretizzando il processo di diffusione geometrica browniana in un **albero binomiale ricombinante** consente una flessibilità computazionale utile non solo al prezzaggio delle opzioni plain vanilla, ma ne permette anche l'estensione alle opzioni path-dependent. In secondo luogo viene descritto il **modello di Black-Scholes-Merton** (BSM), basato su ipotesi di mercato perfetto e volatilità costante⁸ e ampiamente adottato nel pricing delle opzioni europee, poiché fornisce una soluzione analitica particolarmente elegante. Trova in seguito spazio il **modello di Datar-Mathews**, di ispirazione *real options*, in cui si introduce un framework decisionale basato su **simulazioni Monte Carlo**, particolarmente adatto a contesti in cui l'incertezza è multidimensionale e il valore dell'opzione dipende da scenari discreti. Infine, viene trattato il **modello di Heston**, il quale permette di incorporare una **dinamica stocastica per la volatilità** catturando fenomeni empirici come il *volatility smile* e l'asimmetria dei rendimenti.

2.2 Il modello di Cox-Ross-Rubinstein

Il modello CRR, introdotto da Cox, Ross e Rubinstein nel 1979 come discretizzazione multiperiodale del modello continuo di Black-Scholes, si basa su una **struttura ad albero binomiale**, in cui il prezzo del sottostante può evolvere, ad ogni intervallo temporale $\Delta t = \frac{T}{N}$, secondo due possibili movimenti, quali un incremento di fattore u o un decremento di fattore d , generando una dinamica di processo stocastico moltiplicativo.

La costruzione dell'albero binomiale prevede che, in corrispondenza di ciascun nodo, il prezzo del sottostante S_n possa assumere valori pari a $S_n u$ o $S_n d$, dove i parametri u e d sono determinati in funzione della volatilità σ nella misura di:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.1}$$

⁸Ragion per cui si rendono necessarie sostanziali modifiche al modello per trattare strutture esotiche.

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2.2)$$

considerando la relazione $u = \frac{1}{d}$ che lega i fattori di incremento e decremento e la ricombinabilità della struttura, nella quale i cammini che prevedono una sequenza *up* seguita da una *down* (o viceversa) portano ad un valore pari a quello del sottostante⁹.

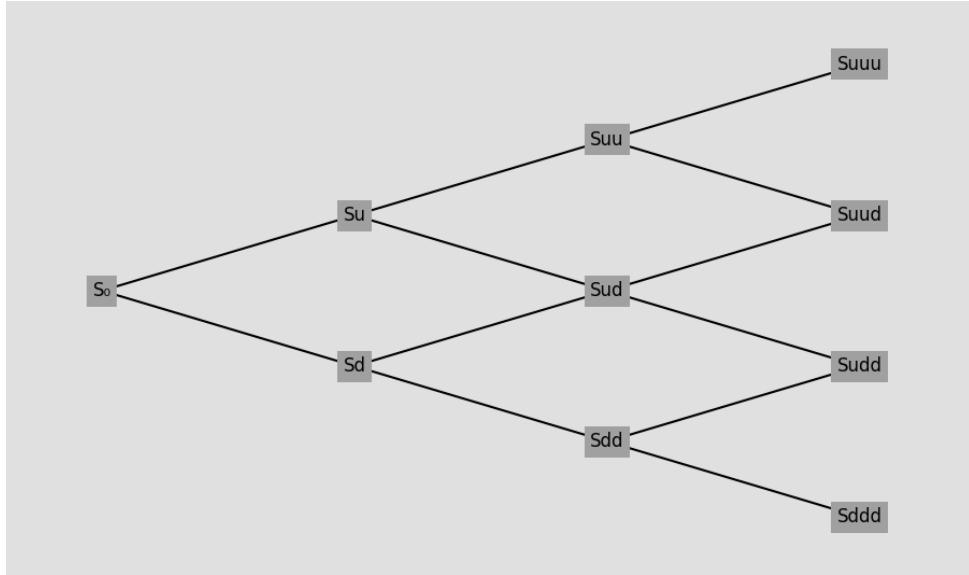


Figura 5: Albero binomiale a tre periodi

Il pricing nel modello CRR viene effettuato mediante il ricorso alla *backward induction*, partendo dai nodi terminali, dove il payoff è noto, e si risale ricorsivamente l'albero calcolando, a ciascun nodo, il valore atteso scontato dei possibili valori futuri secondo la **probabilità neutrale al rischio** q^{10} , definita nel caso discreto come:

$$q = \frac{u - (1 + r)}{u - d} \quad (2.3)$$

Il valore dell'opzione (nel seguente caso una call) in ogni nodo è quindi pari a:

$$C_n = \frac{1}{1 + r} [(1 - q)C_{n+1}^{(u)} + qC_{n+1}^{(d)}]^{11} \quad (2.4)$$

Quello proposto da Cox, Ross e Rubinstein è un modello altamente replicabile, nel quale ogni nodo rappresenta una possibile evoluzione del prezzo del sottostante, e la strategia

⁹Con il risultato di ridurre drasticamente il numero dei nodi e rendere il modello computazionalmente molto più efficiente.

¹⁰Può inoltre essere definita come la probabilità (neutrale al rischio) che il sottostante conosca un decremento nel prossimo periodo, quindi $q := P[S(t+1) = dS(t)]$.

¹¹La presente formula di ricorsione trova applicazione in tempo discreto. Nel caso continuo, la formula tiene conto della variazione della capitalizzazione del tasso di interesse, e può essere scritta come $C_n = e^{-r\Delta t} [(1 - q)C_{n+1}^{(u)} + qC_{n+1}^{(d)}]$.

di hedging può essere costruita esplicitamente tramite portafogli autofinanzianti. Inoltre, al crescere del numero di passi (o più correttamente per $n \rightarrow \infty$), la distribuzione tende a convergere alla **distribuzione lognormale del modello di Black-Scholes**, garantendo la validità asintotica del modello discreto rispetto al caso continuo.

La probabilità neutrale al rischio q consente di trattare il problema del pricing in modo coerente con l'assenza di arbitraggio, e considerando il processo \mathbb{Q} come una martingala, possiamo considerare il prezzo futuro scontato, condizionato all'informazione attualmente disponibile come:

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1}{1+r} \right] \quad (2.5)$$

oppure, in tempo continuo:

$$S_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} S_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.6)$$

2.2.1 I prezzi neutrali al rischio

Il concetto di prezzo neutrale al rischio assume un ruolo cruciale nella formulazione e nell'interpretazione del modello di Cox-Ross-Rubinstein, risulta dunque utile valutarne con maggior dettaglio i fondamenti matematici.

In prima analisi, possiamo affermare che la misura neutrale al rischio modifica le probabilità associate ai possibili movimenti del prezzo del sottostante in modo tale che, sotto tale misura, il prezzo atteso del primo cresca esattamente al tasso risk-free, implicando che il premio per il rischio, il quale di norma richiede un rendimento atteso superiore per le attività più rischiose, venga *neutralizzato*¹².

Sketch proof: La coerenza con il principio di neutralità del rischio è resa possibile dal fatto che la misura in analisi gode della **proprietà di martingala**, e può essere definita come **misura martingala equivalente** (EMM). In particolare, consideriamo un mercato con un sottostante il cui prezzo al tempo n è S_n e un periodo discreto Δt .

Il valore attuale è definito come

$$\hat{S}_n = \frac{S_n}{(1+r)^n}. \quad (2.7)$$

Nel modello binomiale, tra n e $n+1$ il prezzo del sottostante può muoversi solo in due modi:

$$S_{n+1} \in \{S_n u, S_n d\}, \quad (2.8)$$

¹²In altri termini, tutte le attività rischiose avranno lo stesso rendimento atteso, pari al tasso privo di rischio.

con $u > 1 + r > d$ per eliminare la possibilità di arbitraggio.

La misura neutrale al rischio \mathbb{Q} assegna probabilità p^* all'incremento up u e $1 - p^*$ al decremento down d , con

$$p^* = \frac{(1+r) - d}{u - d}. \quad (2.9)$$

Per dimostrare che \hat{S}_n è una martingala sotto \mathbb{Q} , dobbiamo verificare che

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\hat{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \hat{S}_n. \quad (2.10)$$

Calcoliamo esplicitamente:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\hat{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].$$

Dal momento che S_n è noto in n , e il movimento successivo è binomiale, otteniamo:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = p^* S_n u + (1 - p^*) S_n d = S_n (p^* u + (1 - p^*) d).$$

Sostituiamo p^* :

$$p^* u + (1 - p^*) d = u \frac{(1+r) - d}{u - d} + d \frac{u - (1+r)}{u - d} = \frac{u((1+r) - d) + d(u - (1+r))}{u - d},$$

sviluppiamo il numeratore:

$$u(1+r) - ud + du - d(1+r) = u(1+r) - d(1+r) = (1+r)(u-d),$$

da cui,

$$p^* u + (1 - p^*) d = \frac{(1+r)(u-d)}{u-d} = 1+r.$$

Pertanto,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\hat{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} S_n (1+r) = \frac{S_n}{(1+r)^n} = \hat{S}_n, \quad (2.11)$$

dimostrando che \hat{S}_n è una martingala sotto \mathbb{Q} .

2.2.2 Utilizzo del modello binomiale per opzioni europee e americane

Una volta appurato che la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} è definibile come un *fair game*, si può procedere con la costruzione del pricing di un derivato tramite aspettativa condizionata sotto \mathbb{Q} .

Nuovamente, considerata l'evoluzione del sottostante in N passi discreti, ciascuno di durata $\Delta t = \frac{T}{N}$, e la probabilità neutrale al rischio p^* come definita alla (2.9), risulta evidente che, dopo N passi, il sottostante possa assumere solo valori della forma:

$$S_N = S_0 u^k d^{N-k} \quad (2.12)$$

con k incrementi di prezzo e $N - k$ movimenti *down*.

Dal momento che i movimenti sono fissi e con probabilità fissa sotto la misura neutrale al rischio, la probabilità di avere esattamente k incrementi sul totale dei passi risulta pari a:

$$Q(X = k) = \binom{N}{k} p^{*k} q^{N-k}.$$

Espandendo l'aspettativa in funzione della distribuzione binomiale,

$$\mathbb{E}[Q(\Phi(S_N))] = \sum_{k=0}^N \Phi(S_0 u^k d^{N-k}) Q(X = k) = \sum_{k=0}^N \Phi(S_0 u^k d^{N-k}) \binom{N}{k} p^{*k} q^{N-k}$$

e considerando che il prezzo iniziale dell'opzione, in accordo al principio di neutralità al rischio, è il valore atteso scontato del payoff $\Phi(S_N)$ sotto \mathbb{Q} , possiamo ottenere una formula chiusa per la determinazione del prezzo iniziale di un'opzione europea:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^{*k} q^{N-k} \Phi(S_0 u^k d^{N-k}) \quad (2.13)$$

In rapporto al pricing di un'opzione americana risulta necessario implementare nella formula alcune modifiche di carattere sostanziale che consentano di tenere conto della possibilità di esercizio anticipato ad ogni nodo temporale. Deve quindi essere sviluppata una relazione che permetta il confronto tra il valore dell'opzione in caso di **esercizio immediato** $\Phi(S_n, j)$ e il **valore di continuazione**, dato dal valore atteso scontato del prezzo nei nodi successivi, e quindi, in termini formali:

$$C_{n,j} = \max \left\{ \Phi(S_{n,j}), \frac{1}{1+r} [p^* C_{n+1,j+1} + q C_{n+1,j}] \right\}^{13}. \quad (2.14)$$

¹³Ottobre, usando una notazione che metta maggiormente in risalto l'aspettativa condizionata rispetto alla filtrazione, possiamo scrivere $C_{n,j} = \max \left\{ \Phi(S_{n,j}), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{1+r} C_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right] \right\}$.

Il problema del prezzaggio di un'opzione americana può quindi essere visto in un'ottica di *optimal stopping* (Harrison e Kreps, 1979), ovvero della ricerca del momento ottimale di esercizio che permetta di massimizzare il valore atteso scontato del payoff. In particolare, seguendo suddetto approccio, la relazione del prezzo di un'opzione call americana assume la forma:

$$C_{n,j} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}^Q \left[\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} \Phi(S_\tau) \mid S_n = S_{n,j} \right]. \quad (2.15)$$

Il problema di optimal stopping si risolve facendo ugualmente ricorso alla backward induction, con il prezzo dell'opzione che al tempo finale N sarà necessariamente pari a $C_{N,j} = \Phi(S_{N,j})$, mentre per ogni periodo $n < N$, analogamente a quanto cennato in precedenza, dovranno essere confrontati i valori di esercizio e di continuazione, rispettivamente corrispondenti a:

$$\Phi(S_{n,j})$$

e

$$\mathbb{E}^Q \left[\frac{1}{1+r} C_{n+1} \mid S_n = S_{n,j} \right] = \frac{1}{1+r} (p^* C_{n+1,j+1} + q C_{n+1,j})$$

mentre la formula ricorsiva per il prezzo ad ogni nodo può essere scritta come:

$$C_{n,j} = \max \{ \Phi(S_{n,j}), V_{\text{cont}} \}.$$

2.3 Il modello di Black-Scholes-Merton

Il modello di Black-Scholes rappresenta una pietra miliare della moderna finanza matematica, in quanto è stato in grado di fornire una formula chiusa e una metodologia sistematica che hanno permesso di prezzare in modo preciso e coerente le opzioni, sulla base di variabili quali il prezzo corrente dell'asset, la volatilità, il tempo alla scadenza e il tasso privo di rischio.

La forza del modello, al quale si segnalano i successivi contributi di R.C. Merton, risiede nell'aver introdotto un approccio quantitativo basato su **processi stocastici continui** e tecniche di **hedging dinamico**¹⁴, e la sua centralità nella teoria finanziaria moderna si è costantemente accentuata, in luce della fitta attività di ricerca volta a superarne le iniziali limitazioni, che ha portato allo sviluppo di modelli più sofisticati incorporanti volatilità stocastica e salti nei prezzi.

Il fattore di maggior successo del modello di Black-Scholes è certamente la capacità di

¹⁴Quello dell'hedging dinamico è un tema di estrema innovazione del modello BSM, in quanto apre alla possibilità di costruire portafogli replicanti in grado di eliminare il rischio associato alle variazioni di prezzo del sottostante.

aver introdotto una nuova prospettiva sul pricing dei derivati, servendosi di strumenti matematici quali le martingale, gli stopping times e le probabilità neutrali al rischio.

2.3.1 Proprietà del moto browniano

Il moto browniano, osservato per la prima volta dal botanico Robert Brown nel 1827, descrive il movimento irregolare e apparentemente caotico di particelle microscopiche sospese nel vuoto. All'inizio del XX secolo, Einstein e Smoluchowski ne fornirono una spiegazione teorica, mentre Norbert Wiener, nel 1923, ne propose la formalizzazione come processo stocastico.

Nel contesto della finanza matematica, il moto browniano si pone come elemento di base dell'evoluzione dei prezzi degli asset rischiosi, e costituisce il punto cardine, nonché il più importante elemento innovativo, del modello di Black-Scholes-Merton.

Il moto browniano standard, denominato solitamente come $(W_t)_{t \geq 0}$, è un processo stocastico a tempo continuo, con $W_0 = 0$, dove per ogni $0 \leq s < t$, l'incremento $W_t - W_s$ è indipendente dalla storia del processo fino al tempo S , ovvero dalla σ -algebra generata da $W_u : u \leq s$.

In secondo luogo, suddetti incrementi sono distribuiti normalmente con media zero e varianza $t - s$ ¹⁵, e quindi $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Le traiettorie del processo $(W_t)_{t \geq 0}$ sono continue, ma non derivabili in alcun punto. Inoltre, il processo è auto-similare con esponente di Hurst $H = \frac{1}{2}$, ovvero $\forall a > 0$, $(W_{at})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (a^{1/2}W_t)_{t \geq 0}$.

Il moto browniano è, infine, una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, pertanto $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s, \forall s \leq t$.

Consideriamo il moto browniano standard $W(t)$ definito per $t \geq 0$. Per ogni intervallo $[s, t]$ con $s < t$, l'incremento $W(t) - W(s)$ può essere rappresentato come somma di incrementi elementari su una partizione dell'intervallo. Sia quindi $t_i = s + i\Delta t$ con $\Delta t = \frac{t-s}{n}$ e $i = 0, 1, \dots, n$, allora:

$$W_t - W_s = \sum_{i=0}^{n-1} [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \quad (2.16)$$

Per ogni i , $W_{i+1} - W_{t_i} \sim N(0, \Delta t)$, ovvero sono incrementi gaussiani indipendenti a media nulla e varianza Δt . In particolare, si può scrivere:

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \sqrt{\Delta t} Z_i$$

¹⁵La distribuzione normale degli incrementi implica che, su intervalli di tempo ridotti, le variazioni del processo sono proporzionali alla radice quadrata della lunghezza dell'intervallo.

dove $Z_i \sim N(0, 1)$ sono variabili indipendenti standard. Quindi, complessivamente:

$$W_t - W_s = \sqrt{t-s}Z$$

Inoltre, il moto browniano W_t è un **processo di Markov**; per verificarlo esplicitamente, consideriamo l'attesa condizionata:

$$\mathbb{E}[W_t | W_s] = W_s$$

Possiamo scrivere:

$$W_t = W_t - W_s + W_s$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[W_t | W_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s | W_s] + W_s$$

Poiché $W_t - W_s$ è indipendente da W_s e ha media nulla, si ottiene:

$$\mathbb{E}[W_t - W_s | W_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$$

Pertanto:

$$\mathbb{E}[W_t | W_s] = W_s \tag{2.17}$$

È così possibile appurare che, in un processo di moto browniano, *la probabilità di transizione ad uno stato futuro dipende solo dallo stato corrente*, confermando sia la proprietà di Markov sia quella di martingala.

2.3.2 Formula di Black-Scholes

Veniamo ora alla determinazione della formula utilizzata nell'ambito del modello in analisi per prezzare un'opzione call europea. Il punto di partenza è la modellizzazione del comportamento del valore del sottostante, che si assume segua un andamento casuale. Per eliminare il rischio legato alla volatilità del mercato, si costruisce un portafoglio composto dall'opzione e dall'attività sottostante, in modo da annullare le componenti aleatorie. Analogamente a quanto visto in precedenza, l'assenza di opportunità di arbitraggio impone che suddetto portafoglio cresca al tasso di interesse privo di rischio, rendendo così necessaria la formulazione di un'equazione differenziale parziale che permetta di descrivere l'evoluzione del prezzo dell'opzione nel tempo.

In primo luogo, ipotizziamo che il prezzo dell'azione segua un moto browniano geometrico

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.18)$$

dove μ indica il tasso di rendimento atteso e σ la volatilità, che si considera costante. La soluzione esplicita risulta essere pari a:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (2.19)$$

che implica rendimenti logaritmici normalmente distribuiti.

Consideriamo ora un'opzione call con prezzo di esercizio K e scadenza T , il cui prezzo è $C(t, S)$. Applicando il lemma di Itô¹⁶ alla funzione di prezzo dell'opzione, si ricava la sua dinamica stocastica che incorpora sia la variazione deterministica che il termine di diffusione:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2$$

Inoltre, poiché:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad (dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

si ha:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW \quad (2.20)$$

Costruiamo un portafoglio auto-finanziato replicante, composto da una posizione dinamica Δ nel sottostante e una posizione corta nell'opzione, in modo tale da neutralizzare il rischio sistematico derivante dalla volatilità del sottostante:

$$\Pi = \Delta S - C, \quad (2.21)$$

la cui variazione è:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \Delta dS - dC = \\ &= \Delta(\mu S dt + \sigma S dW) - \left[\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW \right] = \\ &= \left(\Delta \mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta \sigma S - \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dW. \end{aligned}$$

¹⁶La formula del lemma di Itô deriva da uno sviluppo di Taylor stocastico; in particolare, la formula di Taylor per una variazione infinitesima di una funzione $f(t, x)$, $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$, risulta inadeguata qualora $S(t)$ segua una traiettoria casuale. Al contrario, i processi di Itô hanno incrementi dS che includono l'incremento di moto browniano (o *termine di rumore*) dW . Sulla base di tale premessa, considerando una funzione sufficientemente regolare quale la (2.18), lo sviluppo di Taylor stocastico al secondo ordine assume la forma $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2$.

Separando i termini:

$$d\Pi = \left(\Delta\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta\sigma S - \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dW.$$

Per eliminare il rischio sistematico, poniamo che il coefficiente stocastico dW sia uguale a zero:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Di conseguenza, il valore del portafoglio replicante diventa:

$$d\Pi = - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt.$$

Poiché il portafoglio è privo di rischio, esso deve crescere al tasso r , pertanto:

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left(\frac{\partial C}{\partial S} S - C \right) dt.$$

Uguagliando le due espressioni per $d\Pi$ e riordinando i termini otteniamo, si ottiene la classica equazione differenziale parziale di Black-Scholes:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) &= r \left(\frac{\partial C}{\partial S} S - C \right), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

La PDE possiede tre distinte condizioni al contorno:

$$C(T, S) = \max(S - K, 0), \quad C(t, 0) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} C(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)}.$$

Introduciamo le variabili trasformate:

$$\tau = T - t, \quad x = \ln \left(\frac{S}{K} \right), \quad C(t, S) = Kv(\tau, x),$$

calcoliamo le derivate parziali di C in funzione di v , applicando la regola della catena:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -K \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{K}{S^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Sostituendo nella PDE originale e riordinando i termini, otteniamo:

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0,$$

che si riscrive come:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial v}{\partial x} - rv.$$

Per eliminare i termini di primo ordine e lineari in v , si introduce la trasformazione:

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x),$$

dove α e β sono parametri da determinare.

Calcoliamo le derivate di v in funzione di u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale parziale precedente e dividendo per $e^{\alpha x + \beta \tau}$, si ottiene:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ru,$$

riordinando i termini nella PDE per la funzione $u(\tau, x)$, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\sigma^2 \alpha + r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \alpha^2 + \alpha \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - r - \beta \right) u.$$

Per eliminare i termini in $\frac{\partial u}{\partial x}$ e u , imponiamo le condizioni:

$$\sigma^2 \alpha + r - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0 \implies \alpha = -\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2},$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \alpha^2 + \alpha \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - r - \beta = 0 \implies \beta = -\left(\frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + r \right).$$

Con tali scelte, la PDE per u si riduce alla classica equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.23}$$

La condizione finale per C è:

$$C(T, S) = \max(S - K, 0).$$

In termini di v e u :

$$v(0, x) = \max(e^x - 1, 0), \quad u(0, x) = e^{-\alpha x} v(0, x) = \max\left(e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x}, 0\right).$$

La soluzione dell'equazione del calore (2.23) è data dalla convoluzione con il nucleo gaussiano:

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} u(0, y) dy. \quad (2.24)$$

Ritornando alla funzione originale, il prezzo dell'opzione si esprime come:

$$C(t, S) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x).$$

Per passare dalla soluzione integrale alla formula chiusa, consideriamo la rappresentazione probabilistica:

$$u(\tau, x) = \mathbb{E} [u_0(x + \sigma\sqrt{\tau}Z)],$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e

$$u_0(y) = \max\left(e^{(1-\alpha)y} - e^{-\alpha y}, 0\right).$$

Poiché $u_0(y) = 0$ per $y < 0$, l'integrale si riduce a:

$$u(\tau, x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} \left(e^{(1-\alpha)y} - e^{-\alpha y}\right) dy.$$

È possibile separare l'integrale in due componenti:

$$u(\tau, x) = I_1 - I_2,$$

con

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \phi(y; x, \sigma^2\tau) e^{(1-\alpha)y} dy, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \phi(y; x, \sigma^2\tau) e^{-\alpha y} dy,$$

dove

$$\phi(y; m, s^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2s^2}}$$

è la densità della normale con media m e varianza s^2 . Utilizzando la proprietà del momento generatore della normale, si ha

$$\int_a^{+\infty} e^{\lambda y} \phi(y; m, s^2) dy = e^{\lambda m + \frac{\lambda^2 s^2}{2}} N\left(\frac{m + \lambda s^2 - a}{s}\right) \quad (2.25)$$

per $a = 0$ e $s = \sigma\sqrt{\tau}$, otteniamo:

$$I_1 = e^{(1-\alpha)x + \frac{(1-\alpha)^2 \sigma^2 \tau}{2}} N\left(\frac{x + (1-\alpha)\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$I_2 = e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 \sigma^2 \tau}{2}} N\left(\frac{x + \alpha \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}\right)$$

Ricordando che

$$C(t, S) = K e^{\alpha x + \beta \tau} (I_1 - I_2)$$

sostituendo I_1 e I_2 , il prezzo dell'opzione può essere scritto come:

$$C(t, S) = K e^{\alpha x + \beta \tau} \left[e^{(1-\alpha)x + \frac{(1-\alpha)^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_1) - e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_2) \right] \quad (2.26)$$

dove

$$d_1 = \frac{x + (1 - \alpha)\sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{x + \alpha \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Semplificando le esponenziali:

$$C(t, S) = K \left[e^{x + \beta \tau + \frac{(1-\alpha)^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_1) - e^{\beta \tau + \frac{\alpha^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_2) \right]$$

Usando le definizioni di α e β e sostituendo $x = \ln \frac{S}{K}$, dopo semplificazioni si ottiene la forma classica:

$$C(t, S) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)^{17} \quad (2.27)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

2.3.3 Convergenza del modello binomiale al metodo BSM

Una volta descritti i principi matematici che costituiscono la base dei due modelli, è possibile dimostrare come, l'estensione al tempo continuo del modello di Cox-Ross-Rubinstein, converga a quello di Black-Scholes.

Anche in questo caso, si suddivide l'intervallo temporale $[0, T]$ in n intervalli di ampiezza $\Delta t = \frac{T}{n}$, in ciascuno dei quali, il prezzo può salire o scendere secondo le probabilità

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

¹⁷Questa relazione fornisce una soluzione chiusa alla PDE per un'azione che non paga dividendi. Qualora sussistesse la corresponsione di un dividendo continuo ad un tasso q , proporzionale al prezzo dell'azione, la predetta formula si modificherebbe in $C(t, S) = S e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$, con $d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$.

Riprendendo l'equazione (2.9) con la quale si è definita la probabilità neutrale al rischio p

$$p = \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

e considerato che il tasso risk-free per ogni nodo r_n risulta pari a

$$r_n = e^{r\Delta t} - 1$$

predetta probabilità nel tempo continuo può essere calcolata come:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (2.28)$$

mentre la relazione per determinare il prezzo di un'opzione call assume la forma:

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(S_0 u^k d^{n-k} - K, 0)$$

Per poter conseguire l'obiettivo preposto, è necessario individuare, o quantomeno approssimare, i parametri del modello CRR qualora $\Delta t \rightarrow 0$.

Dato $x = \sigma\sqrt{\Delta t}$, espandendo u in serie di Taylor intorno a zero, risulta:

$$u = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{(\sigma\sqrt{\Delta t})^2}{2} + \frac{(\sigma\sqrt{\Delta t})^3}{6} + \dots$$

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{\sigma^3 (\Delta t)^{3/2}}{6} + \dots$$

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + o((\Delta t)^{3/2})$$

Analogamente, considerando $y = -\sigma\sqrt{\Delta t}$,

$$d = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \dots$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{(\sigma\sqrt{\Delta t})^2}{2} + \frac{(\sigma\sqrt{\Delta t})^3}{6} + \dots$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{\sigma^3 (\Delta t)^{3/2}}{6} + \dots$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + o((\Delta t)^{3/2})$$

In cui, il termine $(\sigma\sqrt{\Delta t})^2$ è di ordine superiore e diventa trascurabile rispetto al termine

in \sqrt{t} quando $\Delta t \rightarrow 0$, analogamente ai termini di ordine $(\Delta t)^{3/2}$ e superiori, ancora più piccoli e conseguentemente ignorati nelle approssimazioni di primo ordine.

Pertanto, sulla base di tali considerazioni, i termini u e d possono essere approssimati come:

$$u \approx 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}, \quad d \approx 1 - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Secondo una logica analoga, è possibile approssimare anche il valore della probabilità neutrale al rischio, espandendo in Taylor $e^{r\Delta t}$ e utilizzando i valori di u e d appena individuati:

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + o(\Delta t)$$

Pertanto la (2.9) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1 + r\Delta t - (1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t) + o(\Delta t)}{(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t) - (1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t) + o(\Delta t)} \\ p &= \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + o(\Delta t)}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)} \\ p &= \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + o(\sqrt{\Delta t}) \\ p &= \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}) \end{aligned}$$

dove il termine $\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$ riflette il drift corretto per garantire la misura neutrale al rischio nel limite.

Nel modello di Cox-Ross-Rubinstein, dopo N passi, k è una variabile casuale con distribuzione binomiale

$$k \sim \text{Bin}(n, p)$$

Come visto nei precedenti paragrafi, la probabilità di osservare esattamente k rialzi è misurata da:

$$P(k) = Q(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

e più nel dettaglio

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dato un certo m generico, la formula di Stirling fornisce un approssimazione per $m!$, data da:

$$m! \approx \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e} \right)^m \quad (2.29)$$

che può essere applicata a $n!$, $k!$ e $(n - k)!$, i possano essere stimati come:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k, \quad (n - k)! \approx \sqrt{2\pi(n - k)} \left(\frac{n - k}{e}\right)^{n-k}$$

Sostituendo tali valori alla formula di $P(k)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P(k) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n - k)} \left(\frac{n - k}{e}\right)^{n-k}} p^k (1 - p)^{n-k} \\ P(k) &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n - k)} k^k (n - k)^{n-k}} p^k (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Per semplificare il trattamento analitico, può essere conveniente considerare il logaritmo di $P(k)$,

$$\ln P(k) \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n) - \frac{1}{2} \ln(2\pi k) - \frac{1}{2} \ln(2\pi(n - k)) + n \ln n - k \ln k - (n - k) \ln(n - k) + k \ln p + (n - k) \ln(1 - p)$$

Si prenda ora la variabile normale standardizzata:

$$k = np + z \sqrt{np(1 - p)} \quad (2.30)$$

dove z è una variabile reale che misura la deviazione normalizzata del valore atteso np .

Da ciò risulta che:

$$\begin{aligned} \ln k &= \ln(np + z \sqrt{np(1 - p)}) \\ \ln(n - k) &= \ln(n(1 - p - z \sqrt{np(1 - p)})) \end{aligned}$$

Per n grandi, è possibile ricorrere nuovamente all'espansione di Taylor per approssimare i logaritmi di k e $n - k$ attorno ai loro valori attesi np e $n(1 - p)$, rispettivamente.

Ricordando che per $x \approx a$, si può espandere il logaritmo come:

$$\ln x = \ln a + \frac{x - a}{a} - \frac{(x - a)^2}{2a^2} + \dots$$

applicando questa formula a

$$k = np + \delta, \quad \delta = z \sqrt{np(1 - p)}, \quad n - k = n(1 - p) - \delta$$

si ottengono le approssimazioni ai logaritmi di k e $n - k$:

$$\ln k \approx \ln(np) + \frac{\delta}{np} - \frac{\delta^2}{2(np)^2}$$

$$\ln(n - k) \approx \ln(n(1 - p)) - \frac{\delta}{n(1 - p)} - \frac{\delta^2}{2(n(1 - p))^2}$$

Inserendo queste espressioni nella formula per $\ln P(k)$, si ricava che

$$\ln P(k) \approx \text{cost} - \frac{2}{z^2} + o(1)$$

dove si nota come il valore della costante dipenda da n e p , ma non da z .

Di conseguenza, la probabilità $P(k)$ può essere approssimata da una funzione gaussiana di tipo

$$P(k) \approx Ce^{-\frac{z^2}{2}}$$

c è una costante di normalizzazione che, tenendo conto del termine di radice proveniente dalla formula di Stirling, si traduce nella seguente espressione:

$$P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

ossia la densità della variabile normale standardizzata

$$Z_n := \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{2.31}$$

la cui funzione di ripartizione è

$$F_n(z) = P(Z_n \leq z) = P\left(k \leq np + z\sqrt{np(1-p)}\right)$$

Tale funzione corrisponde alla somma cumulativa delle probabilità binomiali fino al valore intero più grande minore o uguale a $np + z\sqrt{np(1-p)}$,

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor np + z\sqrt{np(1-p)} \rfloor} P(k) = \sum_{k=0}^{\lfloor np + z\sqrt{np(1-p)} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dal teorema locale di De Moivre-Laplace, per valori di k vicini a np , si ha:

$$P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right).$$

Si definisca ora la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.32}$$

densità della normale standard.

Per dimostrare la convergenza in distribuzione della variabile Z_n ad una normale, si può ricorrere alla costruzione di somme di Riemann.

In particolare, riformuliamo la somma delle probabilità binomiali in termini della variabile normalizzata x_k :

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

che ora diventa:

$$F_n(z) \approx \sum_{x_k \leq z} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}$$

Si osservi che la distanza tra due valori consecutivi della variabile x_k è data da

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pertanto, la somma delle probabilità può essere riscritta nella forma

$$F_n(z) \approx \sum_{x_k \leq z} g(x_k) \Delta x$$

Poiché $\Delta x \rightarrow 0$ ¹⁸ per $n \rightarrow \infty$, la somma di Riemann converge all'integrale

$$\int_{-\infty}^z g(x) dx = \Phi(z)$$

dove $\Phi(z)$ è la funzione di ripartizione della normale standard.

Se dunque, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \Phi(z)$, allora si può affermare che la funzione di ripartizione della variabile binomiale normalizzata Z_n converge puntualmente alla funzione di ripartizione della normale standard Φ , o più formalmente:

$$\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (2.33)$$

Una volta appurata tale convergenza, si riprenda la relazione (2.12), che esprime il prezzo del sottostante dopo n passi:

$$S_n = S_0 u^k d^{n-k}$$

di cui si calcola il logaritmo:

$$\ln S_n = \ln S_0 + k \ln u + (n - k) \ln d$$

¹⁸Ciò appare chiaro, dal momento che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

sostituendo i valori di u e d , si ha:

$$\ln S_n = \ln S_0 + k\sigma\sqrt{\Delta t} - (n - k)\sigma\sqrt{\Delta t} \approx \ln S_0 + \sigma\sqrt{\Delta t}(2k - n)$$

Considerando nuovamente la variabile normalizzata $Z_n = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, si riscrive $2k - n$ come

$$2k - n = 2(k - np) + 2np - n = 2\sqrt{np(1-p)}Z_n + n(2p - 1)$$

pertanto,

$$\ln S_n = \ln S_0 + \sigma\sqrt{\Delta t} \left(2\sqrt{np(1-p)}Z_n + n(2p - 1) \right)$$

Dato che $\Delta t = \frac{T}{N}$,

$$\ln S_n = \ln S_0 + \sigma\sqrt{\frac{n}{T}}2\sqrt{np(1-p)}Z_n + \sigma\sqrt{\frac{n}{T}}n(2p - 1)$$

$$\ln S_n = \ln S_0 + 2\sigma T p(1-p)Z_n + \sigma T n(2p - 1)$$

Si prendano ora in analisi i limiti dei termini presenti;

Per quanto concerne il termine stocastico, è stato appena appurato che, per il teorema del limite centrale (De Moivre-Laplace), $Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, mentre in rapporto al termine deterministico, è necessario calcolare il limite di $\sigma\sqrt{T_n}(2p - 1)$.

Ad ogni modo, considerando che

$$p = \frac{1}{2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t})$$

allora,

$$\begin{aligned} 2p - 1 &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) + o(\sqrt{\Delta t}) - 1 \\ 2p - 1 &= \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}) \end{aligned}$$

sostituiamo $\sqrt{\Delta t} = \frac{T}{n}$,

$$2p - 1 = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sigma\sqrt{Tn}(2p - 1) = \sigma\sqrt{Tn}\frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + o\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

da cui:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma\sqrt{Tn}(2p - 1) = (r - \frac{\sigma^2}{2})T$$

Quindi, è ora possibile affermare che:

$$\ln S_n \xrightarrow{d} \ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z$$

O più precisamente,

$$\ln S_n \xrightarrow{d} \ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T, \quad (2.34)$$

dove $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$.

In tal modo si è potuto dimostrare come il logaritmo del prezzo terminale nel modello di Cox-Ross-Rubinstein converga in distribuzione alla dinamica lognormale di Black-Scholes, e quindi, in altri termini, che

$$S_n = e^{\ln S_n} \xrightarrow{d} S_T = S_0 \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T \right\}$$

Considerando il prezzo di un'opzione call europea nel modello CRR al tempo 0,

$$C_0^{(n)} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} [\max(S_n - K, 0)]$$

poiché $S_n \xrightarrow{d} S_T$, e il payoff $\max(S - k, 0)$ è una funzione continua e limitata dal basso, per il **teorema della convergenza dominata**¹⁹, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n} [\max(S_n - K, 0)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

Da cui,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0^{(n)} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)] = C_{BS}(S_0, K, r, \sigma, T) \quad (2.35)$$

2.4 Metodo Monte Carlo per le opzioni

Pochi anni dopo che Black e Scholes da una parte, e Cox e Ross dall'altra proposero i rispettivi metodi di valutazione, P. Boyle introdusse un nuovo approccio basato sulle simulazioni Monte Carlo, in forza del quale era consentito stimare il valore atteso di un'opzione simulando direttamente la dinamica stocastica del sottostante, senza richiedere una soluzione analitica dell'equazione di Black-Scholes. Possiamo dire che qui giaccia, forse, la necessità di individuare un nuovo approccio alla valutazione delle opzioni, in quanto, se la (2.27) rappresenta una soluzione chiusa alla PDE in caso di azione che non paga dividendi (con le opportune modifiche in caso di **dividendo costante e proporzionale al prezzo**

¹⁹È possibile ricorrere al teorema della convergenza dominata in quanto la funzione payoff $f(S) = \max(S - K, 0)$ è continua e non negativa, e inoltre, è dominata da una funzione integrabile avente aspettativa finita sotto la misura neutrale al rischio nel modello Black-Scholes.

dell'azione), in presenza di altre politiche di dividendo è inevitabile il ricorso a metodi numerici per la risoluzione dell'equazione differenziale²⁰.

Analogamente al caso precedente, sia S_t il prezzo del sottostante al tempo t , che sotto la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} , evolve secondo il GBM:

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

la cui soluzione esplicita è rappresentata dalla (2.19).

Successivamente, si procede alla generazione delle traiettorie del prezzo del sottostante, ciascuna delle quali ne rappresenta una possibile evoluzione futura, coerentemente con il modello stocastico ipotizzato.

Sia n il numero di simulazioni; per ogni i, \dots, n , si genera una variabile casuale indipendente $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, estratta da una distribuzione normale standard. In seguito, ricorrendo alla soluzione analitica dell'equazione differenziale stocastica del moto browniano geometrico, si ottiene:

$$S_T^{(i)} = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z^{(i)} \right\}$$

Pertanto, dalla generazione di N simulazioni, si ottiene una distribuzione empirica dei possibili prezzi a scadenza.

Una volta generata la sequenza di prezzi simulati a scadenza $(S_T^{(i)})_{i=1}^n$, per ciascuna simulazione i , si calcola il payoff dell'opzione in funzione del prezzo simulato $S_T^{(i)}$, sia esso $\max(S_T^{(i)} - K, 0)$ per una call o $\max(K - S_T^{(i)}, 0)$ per una put. Successivamente, si calcola la media dei payoff ottenuti sulle n simulazioni:

$$\bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)}$$

Poiché il valore atteso del payoff è riferito alla scadenza T , è necessario attualizzarlo al tempo presente utilizzando il tasso privo di rischio:

$$C_0^{\text{MC}} = e^{-rT} \bar{P} = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)} \quad (2.36)$$

ottenendo in questo modo la stima Monte Carlo del prezzo dell'opzione.

²⁰La pubblicazione originale di Boyle fa riferimento al metodo adottato da E.S. Schwartz nel 1977, particolarmente efficace nella valutazione di opzioni in contesti in cui non è disponibile una soluzione chiusa, come nel caso di politiche di dividendo complesse. Tale approccio consiste nel discretizzare il dominio temporale e spaziale, e approssimare le derivate parziali con differenze finite, trasformando il problema continuo in un sistema lineare risolvibile con metodi iterativi.

La varianza della stima è data da:

$$\text{Var}(C_0^{\text{MC}}) = \frac{e^{-2rT}}{n} \text{Var}(P^{(i)})$$

e, conseguentemente, l'errore standard è pari a:

$$\text{SE}(C_0^{\text{MC}}) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{n}} s_P$$

dove s_P indica la deviazione standard campionaria dei payoff simulati.

Secondo il teorema del limite centrale, per n sufficientemente grande, la distribuzione di C_0^{MC} tende ad una normale, pertanto:

$$C_0^{\text{MC}} \sim \mathcal{N}\left(C_0, \frac{e^{-2rT}}{n} \text{Var}(P^{(i)})\right)$$

Per migliorare l'efficienza della simulazione, possono essere adottate tecniche di riduzione della varianza, come il metodo delle variabili di controllo e delle variabili antitetiche (Boyle, 1977); in particolare, nel primo caso, si introduce una variabile Y correlata al payoff e al valore atteso noto, e si costruisce una nuova stima:

$$\hat{C}_0^{\text{CV}} = C_0^{\text{MC}} + \lambda(Y^* - \mathbb{E}[Y])$$

mentre nel caso delle variabili antitetiche, per ogni $Z^{(i)}$, si considera anche $-Z^{(i)}$, ottenendo due simulazioni accoppiare e riducendo la varianza complessiva²¹. Nel caso in cui il sottostante paghi dividendi discreti, la simulazione deve tenerne conto riducendo il prezzo del sottostante in corrispondenza delle date di stacco.

2.4.1 Convergenza delle simulazioni Monte Carlo al modello di Black-Scholes

Così come per il modello di Cox-Ross-Rubinstein, è possibile mostrare che il prezzo calcolato tramite le simulazioni Monte Carlo converge, al crescere della numerosità dei path, al prezzo teorico individuato dal modello di Black-Scholes-Merton. Ad ogni modo, la dimostrazione in tal ultimo caso appare molto più immediata rispetto al precedente.

Si riprendano le relazioni (2.27) e (2.36), che descrivono rispettivamente il prezzo di un'opzione call europea calcolata con Monte Carlo e Black-Scholes; appare chiaro che in entram-

²¹Calcolando la media dei payoff associati a ciascuna coppia $(Z, -Z)$, si ottiene una stima che, grazie alla covarianza negativa tra i due risultati, presenta una varianza inferiore rispetto a quella ottenuta con due simulazioni indipendenti, con l'effetto di aumentare l'efficienza della simulazione senza incrementare significativamente il costo computazionale.

bi i casi, seppur mediante approcci differenti, lo scopo dei modelli sia quello di determinare il valore atteso scontato dell’aspettativa neutrale al rischio, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)]$.

Con riferimento alla formula di Monte Carlo, si è definito $P^{(i)} = \max(S_t^{(i)} - K, 0)$, da cui;

$$X_i = e^{-rT} P^{(i)} = e^{-rT} \max(S_T^{(i)} - K, 0)$$

La legge dei grandi numeri afferma che, se X_1, X_2, \dots, X_n sono variabili casuali *iid*, con valore atteso finito $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, allora

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$$

e dunque, se la quantità $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ coincide con il valore atteso del payoff scontato sotto la misura neutrale al rischio, il prezzo calcolato con il metodo Monte Carlo coincide con quello teorico Black-Scholes

$$C_0^{MC} = C_{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \max(S_T - K, 0)] \quad (2.37)$$

Tale convergenza si rafforza al crescere di n , infatti la probabilità che la media campionaria C_0^{MC} differisca significativamente dal valore atteso C_{BS} tende a 0 al crescere della numerosità delle simulazioni effettuate:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{P}(|C_0^{MC} - C_{BS}| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

Assume importanza primaria effettuare, affinché si possa apprezzare il fenomeno in analisi, un numero sufficientemente ampio di simulazioni²². Un’applicazione pratica di quanto qui affermato, sia con riferimento al metodo Monte Carlo che al modello CRR, sarà fornita a partire dal capitolo seguente.

2.5 Il modello di Datar-Mathews

Il metodo Datar-Mathews viene introdotto ad inizio millennio come estensione del tradizionale modello del Valore Attuale Netto specificamente per la valutazione delle opzioni reali. Si tratta di un nuovo approccio alquanto meritevole di interesse, che si serve delle simulazioni Monte Carlo per il calcolo del payoff, troncando i risultati negativi in modo da riflettere la facoltà dell’holder di non esercitare l’opzione in condizioni ad esso sfavorevoli.

²²Ai fini operativi, si suggerisce di implementare un minimo di 10000 simulazioni, in modo tale da poter avere un riscontro numericamente visibile della convergenza.

2.5.1 Implementazione del modello con la simulazione Monte-Carlo

Per risalire alla struttura della formula del premio dell'opzione attraverso il modello in analisi, si parta dalla concezione che, un progetto di investimento, in condizioni di incertezza, può generare una varietà di possibili valori attuali netti a scadenza. Risulta allora possibile individuare il valore dell'opzione associata al progetto come il valore atteso del massimo tra il payoff della stessa e zero:

$$V = \mathbb{E}[\max(\text{NPV}, 0)] \quad (2.38)$$

La formula generale per il calcolo del valore attuale netto $\text{NPV} = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+r)^t} - I_0$ non richiede modificazioni, ma risulta necessario soffermarsi sulla distribuzione di probabilità delle variabili che impattano sulla struttura dei flussi si cassa CF_t .

In un contesto di incertezza, ogni variabile deve essere trattata come una variabile aleatoria ed è imperativo assegnarle una distribuzione di probabilità $F_X(x)$ che ne rappresenti adeguatamente il comportamento atteso. Le principali variabili che vengono prese in considerazione sono il prezzo di vendita P_t , la quantità venduta Q_t , il costo variabile unitario $C_{var,t}$, il costo fisso totale $C_{fix,t}$, l'investimento iniziale I_0 , il tasso di sconto r e l'orizzonte temporale T .

Per ciascuna variabile, la scelta della distribuzione di probabilità deve essere guidata dalla natura intrinseca della variabile stessa, e pertanto il prezzo di vendita è tipicamente modellato tramite una distribuzione lognormale ($P_t \sim \text{LogNorm}(\mu_P, \sigma_P^2)$), in quanto la stessa garantisce la positività dei prezzi e riflette la possibilità di variazioni asimmetriche e di eventi estremi, caratteristiche che possono risultare alquanto frequenti nei mercati reali, mentre la quantità venduta può essere rappresentata da una distribuzione normale troncata ($Q_t \sim \text{TruncNorm}_{[0,\infty)}(\mu_Q, \sigma_Q^2)$), discreta (ad esempio Poisson, per beni indivisibili), o uniforme, a seconda della granularità dei dati e delle specificità del settore. I costi variabili sono frequentemente modellati attraverso distribuzioni triangolari $X \sim \text{Triang}(a, m, b)$, in modo da poter incorporare con maggior precisione informazioni su valori minimo, massimo e più probabile, oppure, in presenza di variabilità simmetrica e ben documentata, il ricorso ad una normale può essere ugualmente adeguato. In rapporto ai costi fissi, la loro stabilità rende possibile trattarli come deterministici e conseguentemente di modellarli con una distribuzione normale a bassa varianza, in modo da poter includere possibili shock esogeni, mentre l'investimento iniziale, anch'esso di norma considerato come deterministico, può essere rappresentato da una distribuzione discreta in presenza di scenari alternativi di investimento.

Una volta individuate le variabili e le relative distribuzioni, si procede, per ciascuna

simulazione i , all'estrazione dei valori $P_t^{(i)}, Q_t^{(i)}, C_{\text{var},t}^{(i)}, C_{fx}^{(i)}$ per ogni t secondo le rispettive $F_X(x)$ definite nella precedente fase di modellazione. Appare chiaro che molte di queste variabili sono lunghi dall'essere indipendenti (banalmente, il prezzo di vendita e la quantità venduta sono generalmente correlati negativamente, oppure i costi variabili possono essere influenzati, positivamente, dai volumi di produzione) e per tale motivo, prima di procedere all'estrazione dei dati, si origina la necessità di rappresentare correttamente la dipendenza tra le stesse, generando campioni che rispettino la struttura di correlazione empirica o attesa.

Uno strumento che in una simile circostanza può rivelarsi particolarmente utile è la decomposizione di Cholesky, grazie alla quale è possibile generare campioni di variabili aleatorie multivariate con una struttura di correlazione specifica. Volendo approfondire, si consideri una matrice di covarianza²³ Σ , simmetrica e definita positiva. Per un sistema di N variabili, Σ assume la forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1N}\sigma_1\sigma_N \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2N}\sigma_2\sigma_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N}\sigma_1\sigma_N & \rho_{2N}\sigma_2\sigma_N & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

La tecnica in analisi consiste nel trovare una matrice triangolare inferiore L , tale che:

$$\Sigma = LL^\top$$

La matrice L si calcola ricorsivamente, con gli elementi diagonali dati da:

$$L_{kk} = \sqrt{\Sigma_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}$$

mentre gli elementi sotto la diagonale sono della forma:

$$L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left(\Sigma_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}L_{kj} \right), \quad i > k$$

A questo punto, generando un vettore $Z = (Z_1, \dots, Z_N)^T$ di variabili aleatorie standard normali indipendenti, si ottiene il vettore

$$X = LZ$$

²³Ottobre, in presenza di variabili standardizzate, la matrice di correlazione.

La variabile casuale X ha distribuzione multivariata normale con media nulla e matrice di covarianza Σ , in quanto, per definizione di covarianza e linearità dell'operatore, si ha:

$$\text{Cov}(X) = \text{Cov}(LZ) = L \text{Cov}(Z)L^\top$$

Dato che Z è un vettore di variabili standard normali indipendenti, la sua matrice di covarianza è la matrice identità I , pertanto

$$\text{Cov}(X) = LIL^\top = LL^\top = \Sigma^{24} \quad (2.39)$$

Una volta impostata la decomposizione di Cholesky e generati campioni di variabili aleatorie correlate che siano effettivamente in grado di catturare la dipendenza tra le variabili economiche chiave, si può procedere alla costruzione delle simulazioni dei flussi di cassa, secondo una linea d'azione ormai non dissimile a quella disaminata nel precedente paragrafo 2.4.

Nello specifico, è ora possibile, per ciascuna simulazione, utilizzare i valori delle variabili correlate per ogni periodo t , ottenuti tramite Cholesky tenuto conto delle rispettive distribuzioni marginali e procedere al calcolo del valore attuale del progetto:

$$\text{NPV}^{(i)} = \sum_{t=1}^T \frac{P_t^{(i)} Q_t^{(i)} - C_{\text{var},t}^{(i)} Q_t^{(i)} - C_{\text{fx}}^{(i)}}{(1+r)^t} - I_0. \quad (2.40)$$

Rammentando dalla (2.38) che il modello in analisi interpreta il valore dell'opzione come il valore atteso tra il payoff simulato e zero, si procede al calcolo della media dei payoff opzionali sulle n simulazioni:

$$C_0^{\text{DM}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(\text{NPV}^{(i)}, 0), \quad (2.41)$$

che rappresenta la stima Monte Carlo del prezzo dell'opzione reale secondo il modello Datar-Mathews.

2.6 Il modello di Heston

Introdotto nel 1993, il modello di Heston si distingue da quelli precedentemente analizzati in quanto considera la volatilità come una variabile casuale che segue un processo stocastico, andando oltre una delle più rilevanti assunzioni del modello di Black-Scholes.

²⁴Inoltre, poiché la trasformazione LZ è lineare e Z è gaussianamente distribuito, anche $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Si consideri un asset avente distribuzione

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dZ^{(1)}(t)$$

Se la volatilità segue un processo di Ornstein-Uhlenbeck²⁵, allora la sua dinamica può essere descritta come

$$dY_t = -\beta Y_t dt + \delta dW_t^{(2)}, \quad \beta > 0, \quad \delta > 0^{26}.$$

Utilizzando il lemma di Itô si può mostrare che la varianza istantanea segue il processo

$$dv_t = 2Y_t dY_t + (dY_t)^2 = (\delta^2 - 2\beta v_t) dt + 2\delta\sqrt{v_t} dW_t^{(2)},$$

che, facendo ricorso al processo CIR, può essere riscritto come

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t^{(2)},$$

con identificazione

$$\kappa = 2\beta, \quad \xi = 2\delta, \quad \theta = \frac{\delta^2}{2\beta},$$

definendo in tal modo l'ampiamente adottata notazione contestualmente al metodo in analisi

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (2.42)$$

con correlazione istantanea $d\langle W^{(1)}, W^{(2)} \rangle_t = \rho dt$.

Ipotizzando che il tasso di interesse rimanga costante, è possibile affermare che il prezzo al tempo t di un'unità del bond²⁷ a scadenza $\tau + t$ sia pari a

$$P(t, t + \tau) = e^{-r\tau}.$$

In analogia con l'argomento di copertura alla Black-Scholes, il prezzo $U(S, v, t)$ soddisfa la PDE

$$U_t + \frac{1}{2}vS^2 U_{SS} + \rho\xi vS U_{Sv} + \frac{1}{2}\xi^2 v U_{vv} + rS U_S + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] U_v - rU = 0 \quad (2.43)$$

soggetta ai vincoli:

²⁵Equazione differenziale stocastica che descrive l'evoluzione dei sistemi mean-reverting.

²⁶Si noti che il termine di rumore è *additivo* nel processo $Y_t = \sqrt{v_t}$, e diventa *moltiplicativo* in v_t dopo il cambio di variabile.

²⁷O di altra attività priva di rischio.

- $U(S, v, T) = \max[0, S - K]$,
- $\frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1$,
- $U(S, \infty, t) = S$,
- $U(0, v, t) = 0$,
- $rS U_S(S, 0, t) + \kappa\theta U_v(S, 0, t) - rU(S, 0, t) + U_t(S, 0, t) = 0$.

Il termine λ rappresenta il costo legato alla volatilità, indipendente dallo specifico asset. Lamoureux e Lastrapes (1993) hanno mostrato che tale valore è significativamente diverso da 0 (t-test asintotico). Richiamando ora il modello basato sul consumo di Breeden, si afferma che

$$\lambda(S, v, t)dt = \gamma \text{Cov}[dv, \frac{dC}{C}],$$

in cui $C(t)$ è il tasso di consumo e γ indica l'avversione al rischio dell'investitore.

Si prenda ora in considerazione il processo di consumo che emerge nel modello di Cox-Ingersoll-Ross,

$$dC(t) = \mu_c v(t) C dt + \sigma_C \sqrt{v(t)} C dZ^{(3)}(t), \quad (2.44)$$

nel quale la crescita del consumo mostra una correlazione con il ritorno dell'asset. Da ciò si genera un premio proporzionale a v , con $\lambda(S, v, t) = \lambda v_t$.

In accordo a quanto precedentemente appurato già a partire dal paragrafo 2.3, per analogia con la formula di Black-Scholes, possiamo individuare, per un'opzione call, una soluzione della forma

$$C(S, v, t) = S P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2,$$

dove il primo termine indica il valore attuale dell'asset dietro esercizio ottimale dell'opzione, e il secondo consta nel valore attuale del prezzo di esercizio, entrambi soddisfacenti la PDE originale di Black-Scholes.

Può essere conveniente scrivere i due membri in termini del logaritmo del prezzo spot,

$$x = \ln[S].$$

Sostituendo la soluzione appena proposta nella PDE originale, è possibile constatare che P_1 e P_2 soddisfano le equazioni differenziali parziali

$$\frac{1}{2} v P_{j,xx} + \rho \xi v P_{j,xv} + \frac{1}{2} \xi^2 v P_{j,vv} + (r + u_j v) P_{j,x} + (a - b_j v) P_{j,v} + P_{j,t} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.45)$$

per

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\xi, \quad b_2 = \kappa + \lambda.$$

Affinché il prezzo del sottostante soddisfi le condizioni terminali appena esposte, le PDE sono soggette alla condizione

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \mathbf{1}_{x \geq \ln[K]}$$

e possono pertanto essere interpretate come probabilità aggiustate per il rischio;

$$dx_t = (r + u_j v_t) dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(1)}, \quad (2.46)$$

$$dv_t = (a - b_j v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^{(2)}. \quad (2.47)$$

dove a e b_j rappresentano la definizione precedentemente fornita. La probabilità condizionata che l'opzione scada ITM è definita come

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \mathbb{P}[x(T) \geq \ln[K] \mid x(t) = x, v(t) = v]. \quad (2.48)$$

Sudette probabilità non possono essere calcolate attraverso il ricorso ad una forma chiusa, tuttavia, è possibile dimostrare che le funzioni caratteristiche soddisfano le PDE sopra esposte. Nello specifico, consideriamo la funzione (doppiamente derivabile) $f(x, v, t)$, che presenta una buona aspettativa condizionata di x e v ;

$$f_j(x, v, t) = \mathbb{E}[g(X_T, V_T) \mid X_t = x, V_t = v]. \quad (2.49)$$

Il Lemma di Itô mostra che;

$$\begin{aligned} df_j &= \left(\frac{1}{2} v f_{j,xx} + \rho\xi v f_{j,xv} + \frac{1}{2} \xi^2 v f_{j,vv} + (r + u_j v) f_{j,x} + (a - b_j v) f_{j,v} + f_{j,t} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{v} f_{j,x} dW_t^{(1)} + \xi \sqrt{v} f_{j,v} dW_t^{(2)}. \end{aligned}$$

Ricorrendo alle aspettative iterate, sappiamo che f deve essere una martingala;

$$\mathbb{E}[df] = 0.$$

Per completezza, vale la pena di notare che la densità di transizione congiunta $p_j(x, v, t)$ soddisfa l'equazione di Fokker–Planck (forward):

$$\partial_t p_j = -\partial_x [(r + u_j v) p_j] - \partial_v [(a - b_j v) p_j] + \frac{1}{2} \partial_{xx} [v p_j] + \partial_{xv} [\rho\xi v p_j] + \frac{1}{2} \partial_{vv} [\xi^2 v p_j]. \quad (2.50)$$

Ai fini del pricing, tuttavia, è di maggior interesse la funzione valore (2.49) appena definita, la cui condizione terminale associata risulta

$$f_j(x, v, T) = g(x, v).$$

Nel dettaglio, se $g(x, v) = \delta(x - x_0)$, la soluzione rappresenta (in senso distribuzionale) la densità di transizione in x_0 , se $g(x, v) = \mathbf{1}_{\{x \geq \ln K\}}$, essa coincide con la probabilità condizionata che $X_T \geq \ln K$, e per $g(x, v) = e^{i\Phi x}$, si ottiene la funzione caratteristica.

Data la natura affine della dinamica della varianza (processo CIR) e la linearità di $x = \ln[S_t]$ in v_t , è naturale ipotizzare che la funzione caratteristica del processo congiunto abbia una forma esponenziale affine assimilabile a

$$f_j(x, v, t; u) = \exp(C_j(\tau, u) + D_j(\tau, u)v + iux), \quad (2.51)$$

con $\tau = T - t$. La presente relazione soddisfa l'equazione di Kolmogorov backward

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathcal{L}_j f_j = 0, \quad (2.52)$$

dove \mathcal{L} è l'operatore infinitesimale associato al processo (x_t, v_t) ,

$$\mathcal{L}_j = (r + u_j v) \partial_x + (a - b_j v) \partial_v + \frac{1}{2} v \partial_{xx} + \rho \xi v \partial_{xv} + \frac{1}{2} \xi^2 v \partial_{vv}.$$

Le derivate di f secondo l'ansatz risultano:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_j}{\partial t} = - \left(C'_j(\tau, u) + D'_j(\tau, u)v \right) f_j, \\ \frac{\partial f_j}{\partial x} = iu f_j, \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} = -u^2 f_j, \\ \frac{\partial f_j}{\partial v} = D_j(\tau, u) f_j, \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} = D_j(\tau, u)^2 f_j, \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = iu D_j(\tau, u) f_j. \end{cases}$$

Sostituendo l'ansatz nella (2.52) e dividendo per $f_j \neq 0$, si ottiene

$$-(C'_j + D'_j v) + (r + u_j v)(iu) + (a - b_j v)D_j + \frac{1}{2}v(-u^2) + \rho \xi v(iuD_j) + \frac{1}{2}\xi^2 v D_j^2 = 0.$$

Raggruppando i termini costanti e quelli proporzionali a v :

$$\left(-C'_j + iur + aD_j \right) + v \left(-D'_j + u_j iu - \frac{1}{2}u^2 + (\rho\xi iu - b_j)D_j + \frac{1}{2}\xi^2 D_j^2 \right) = 0.$$

Poiché l'identità deve valere per ogni v , entrambi i termini devono annullarsi. Si ottengono in tal modo le equazioni differenziali ordinarie

$$C'_j(\tau, u) = iur + a D_j(\tau, u), \quad (2.53)$$

$$D'_j(\tau, u) = \left(u_j iu - \frac{1}{2}u^2 \right) + (\rho\xi iu - b_j)D_j(\tau, u) + \frac{1}{2}\xi^2 D_j(\tau, u)^2, \quad (2.54)$$

con condizioni iniziali $C_j(0, u) = 0$, $D_j(0, u) = 0$.

Si definisca ora la funzione caratteristica nella forma;

$$f_j(x, v, t; \Phi) = \exp(C_j(T-t; \Phi) + D_j(T-t; \Phi)v + i\Phi x).$$

C_j e D_j soddisfano dunque certe equazioni differenziali ordinarie del tipo Riccati; nello specifico

$$C_j(\tau, u) = iur\tau + \frac{a}{\xi^2} \left[(b_j - \rho\xi iu + d_j(u))\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j(u)e^{d_j(u)\tau}}{1 - g_j(u)} \right) \right], \quad (2.55)$$

$$D_j(\tau, u) = \frac{b_j - \rho\xi iu + d_j(u)}{\xi^2} \frac{1 - e^{d_j(u)\tau}}{1 - g_j(u)e^{d_j(u)\tau}}, \quad (2.56)$$

dove:

$$d_j(u) = \sqrt{(\rho\xi iu - b_j)^2 - \xi^2(2u_j iu - u^2)}, \quad g_j(u) = \frac{b_j - \rho\xi iu + d_j(u)}{b_j - \rho\xi iu - d_j(u)}.$$

Una volta adeguatamente analizzate le equazioni differenziali ordinarie, risulta più semplice calcolare il prezzo dell'opzione superando i limiti della volatilità costante del modello di Black-Scholes.

Si esprima, mutuando la precedente notazione, il prezzo di una call europea attraverso

$$C(S_0, v_0, T) = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2,$$

dove P_1 è una probabilità sotto misura azionaria (share measure) $\mathbb{Q}^{(1)}$ e P_2 è una probabilità sotto misura risk-neutral \mathbb{Q} .

La logica secondo la quale si articolano i seguenti passaggi risiede nell'idea che

$$P_1 = \mathbb{Q}^{(1)}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t), \quad P_2 = \mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t).$$

La probabilità $\mathbb{Q}[X > \ln K]$ può essere dunque scritta come:

$$P_j(x, v, t; K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} f_j(x, v, t; u)}{iu} \right] du, \quad j = 1, 2, \quad (2.57)$$

con $\Phi_1(u) = \frac{\Phi(u-i)}{\Phi(-i)}$, $\Phi_2(u) = \Phi(u)$.

A questo punto, dato:

$$(S_T - K)^+ = S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} - K \mathbf{1}_{\{S_T > K\}},$$

$$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] - K e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t).$$

Definendo la misura azionaria (share measure) $\mathbb{Q}^{(1)}$:

$$\frac{d\mathbb{Q}^{(1)}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{e^{-r(T-t)} S_T}{S_t},$$

si ottiene

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] = S_t \mathbb{Q}^{(1)}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) =: S_t P_1,$$

$$\mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) =: P_2.$$

Pertanto

$$C_t = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2. \quad (2.58)$$

Appendice: Processi stocastici e simulazioni Monte-Carlo per le azioni

L'applicabilità delle simulazioni Monte Carlo in campo finanziario si estende notevolmente oltre le opzioni, in quanto esse si rivelano di particolare utilità ogniqualvolta sussistano scenari di incertezza nei mercati.

L'utilizzo di Monte Carlo è pertanto ampiamente adottato relativamente a problemi di gestione del rischio e ottimizzazione dell'allocazione delle attività in contesti di incertezza dinamica.

L'approccio tradizionale, introdotto da Markowitz nel 1952 attraverso la teoria media-varianza²⁸ risulta limitato dalle sue assunzioni di normalità dei rendimenti e linearità delle relazioni tra le attività, che spesso risultano inadeguate nel cogliere a pieno le caratteristiche reali delle serie storiche finanziarie, quali asimmetrie, kurtosi elevata, volatilità stocastica (Cont, 2001) e rischi di coda. L'implementazione tipica della tecnica in analisi prevede l'utilizzo di distribuzioni multivariate per i rendimenti giornalieri o logaritmici dei titoli, dalle quali si estraggono molteplici traiettorie simulate $R^{(i)} = \{r_t^{(i)}\}_{t=1}^T$, con $i = 1, \dots, N$, la cui aggregazione, tenuto conto dei pesi assegnati ai singoli asset, genera una distribuzione probabilistica del valore futuro del portafoglio. Ricorrendo ora ad un maggior formalismo matematico, è possibile constatare che il valore finale del portafoglio simulato per ciascuna traiettoria possa essere determinato come

$$V_T^{(i)} = V_0 \prod_{t=1}^T \left(1 + \mathbf{w}^\top r_t^{(i)}\right)$$

L'aggregazione sulle N simulazioni fornisce la citata distribuzione empirica per la variabile aleatoria V_T , da cui è possibile stimare diverse misure di rischio, quali, in primis, il **Value at Risk** (VaR), definibile al livello di confidenza α da

$$\text{VaR}_\alpha = - \inf \{v \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(V_T - V_0 \leq v) \geq \alpha\}$$

All'interno dell'analisi a cui è dedicata questa appendice, si è scelto di affiancare a tal ultimo indicatore anche l'Expected Shortfall o **Conditional VaR** (CVaR), definibile come la media delle perdite peggiori oltre il VaR stesso (Rockafellar e Uryasev, 2000), o più precisamente

$$\text{CVaR}_\alpha = \mathbb{E}[V_T - V_0 | V_T - V_0 \leq -\text{VaR}_\alpha]$$

²⁸Tale approccio prevede la minimizzazione della varianza del portafoglio dato un rendimento atteso prefissato.

Un punto di notevole forza di tale approccio è la possibilità, grazie alla natura iterativa e parametrica delle simulazioni, di testare diverse allocazioni, scenari economici e parametri di input (quali tassi risk-free, orizzonti temporali e correlazioni) in modo da poter effettuare analisi di sensibilità approfondite.

Inoltre, tale framework è compatibile con diverse metodologie di ottimizzazione robusta e approcci bayesiani per l'aggiornamento dinamico dell'aspettativa su parametri incerti (Jobson e Korkie, 1980), integrando stimoli empirici continui dalla simulazione con valutazioni teorico-statistiche.

Poste tali premesse, anche con l'intenzione di fornire un preludio all'analisi di maggior rilievo pratico che avrà luogo successivi capitoli, si vuole qui proporre un semplice *tool* sviluppato in Python concepito per la valutazione del valore futuro dei portafogli mediante il metodo Monte Carlo.

Nello specifico, il codice, partendo dai dati storici ricavati dalla piattaforma Yahoo Finance, stima media e matrice di covarianza, genera percorsi tramite campionamento multivariato e calcola diversi indicatori di performance e rischio. Infine, sono generati due grafici che permettono meglio di valutare la stabilità numerica e consentono la visualizzazione delle distribuzioni.

Volendo approfondire gli aspetti computazionali dello strumento oggetto di trattazione è possibile esaminare con maggior dettaglio la funzione usata per la generazione dei *path* simulati.

```
def run_mc(stocks, weights, start, end, sims_n, T, init, rf):
    df = yf.download(stocks, start=start, end=end, auto_adjust=False,
                     progress=False)[‘Close’].ffill()
    r = df.pct_change().dropna()
    mu, cov = r.mean(), r.cov()
    simulations = np.zeros((T, sims_n))
    finals = np.zeros(sims_n)
    for i in range(sims_n):
        dr = np.random.multivariate_normal(mu.values,
                                            cov.values, T)
        simulations[:, i] = init*np.cumprod(1 + dr.dot(weights))
        finals[i] = simulations[-1, i]
    rets = np.log(simulations[1:] / simulations[:-1]).flatten()
    ann_ret = rets.mean() * 252
    ann_vol = rets.std() * np.sqrt(252)
    downside = rets[rets < 0]
    sharpe = (ann_ret - rf) / (ann_vol + 1e-9)
```

```

sortino = (ann_ret - rf) / (np.std(downside) *
np.sqrt(252) + 1e-9)
sk = skew(finals); ku = kurtosis(finals, fisher=True)
cum_mean = np.cumsum(finals) / np.arange(1, sims_n + 1)
stderr = np.std(finals, ddof=1) / np.sqrt(np.arange
(1, sims_n + 1))
return simulations, finals, (cum_mean, stderr), {
    "Media simulazione": cum_mean[-1], "Minimo": finals.min(),
    "Massimo": finals.max(), "5 percentile (VaR)": np.percentile(finals, 5),
    "95 percentile": np.percentile(finals, 95), "CVaR 5%": compute_cvar(finals),
    "Rendimento annuo %": ann_ret * 100,
    "Volatilita' annua %": ann_vol * 100,
    "Sharpe Ratio": sharpe, "Sortino Ratio": sortino,
    "Skewness": sk, "Kurtosis": ku,
    "StdErr media": stderr[-1], "CoeffVar": stderr[-1] /
    cum_mean[-1]}

```

Listing 1: Funzione path Monte Carlo.

La funzione prende in input una lista di ticker azionari o di altra tipologia²⁹, di cui si scaricano i dati storici dell’ultimo anno, i pesi di ciascuno di essi all’interno del portafoglio (individuato all’interno di un array numpy la cui somma dei valori deve essere pari a 1, pena il sollevamento di un’eccezione e la conseguente interruzione della simulazione), le date, di inizio e fine per il periodo storico da cui estrarre o i dati in serie storica, il numero delle simulazioni Monte Carlo da eseguire, il numero di passi temporali T (il cui valore di default è fissato a 252 giorni di trading), il valore iniziale del portafoglio e il tasso di interesse privo di rischio.

In seguito si procede allo scaricamento dei prezzi di chiusura storici non aggiustati per il periodo indicato da Yahoo Finance e al calcolo dei rendimenti medi giornalieri e della matrice di covarianza dei rendimenti tra i titoli. La variabile *simulations* contiene la matrice $T \times \text{sims_n}$ per memorizzare i valori del portafoglio simulati giorno per giorno e per ciascuna simulazione, mentre *finals* è un vettore di lunghezza *sims_n* con all’interno il valore finale di ogni simulazione.

Il ciclo *for* rende possibile che per ogni simulazione i , si generi un cammino di rendimenti

²⁹Vengono forniti come valori di default i ticker ‘META’ e ‘NVDA’.

multivariati giornalieri³⁰. I rendimenti giornalieri del portafoglio sono calcolati mediante il prodotto vettoriale tra i rendimenti simulati di ciascun titolo e il relativo peso degli stessi. Successivamente è calcolata la serie cumulativa del valore del portafoglio simulato mediante $np.cumprod(1 + dr.dot(weights))$, moltiplicata per il valore iniziale $init$ ed infine, l'ultimo valore di ciascun cammino simulato viene salvato nella variabile $finals[i]$.

Attraverso la variabile $rets$ si individuano i rendimenti logaritmici giornalieri di tutte le simulazioni, che vengono concatenati in un vettore unidimensionale utilizzato immediatamente dopo per il calcolo delle statistiche annualizzate e degli indici di performance.

Una volta eseguito il codice, all'utente è fornito accesso all'interfaccia iniziale, nella quale è possibile inserire i valori di input precedentemente menzionati.

The screenshot shows a Jupyter Notebook cell containing a form for portfolio simulation. The form includes the following fields:

- Tickers:** AAPL, MSFT, JNJ, LDO.MI, JPM, TLT, GLD, USO
- Pesi:** 0.25, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.15, 0.05, 0.05
- Inizio:** 10/08/2022
- Simulazioni:** A slider set to 10000.
- Giorni T:** A slider set to 252.
- Valore inizi...**: A dropdown menu set to 10000.
- Risk-free %:** A dropdown menu set to 0,025.
- Esegui simulazione**: A blue button at the bottom left.

Figura 6: Esempio di assegnazione valori di input.

L'accensione del pulsante **Esegui simulazione** attiva la funzione `on_run`, tramite la quale vengono mostrati i dati relativi alla simulazione e riportati i grafici annessi.

```
def on_run(_):
    with out:
        out.clear_output()

        tk = [t.strip().upper() for t in tickers_w.value.split(',')]
        w = np.array([float(x) for x in weights_w.value.split(',')])

        total_weight = w.sum()
        if abs(total_weight - 1.0) > 1e-4:
            raise ValueError(f"La somma dei pesi deve essere 1.
Somma attuale = {total_weight:.4f}")
```

³⁰Più precisamente, si tratta di un array $T \times \text{len}(stocks)$ estratto da una normale multivariata con media μ e covarianza Σ .

```

    simulations, finals, (cum_mean, stderr), stats = run_mc(
        tk, w, start_w.value, dt.date.today(),
        sims_w.value, T_w.value, init_w.value, rf_w.value)

    df = pd.DataFrame(stats.items(), columns=[ 'Statistica' , 'Valore'])
    sty = (df.style.format({ 'Valore': smart_val_format}).
background_gradient('Blues', subset=[ 'Valore']))
        .set_table_styles([{ 'selector': 'th', 'props': [( 'background-color', '#003366'),( 'color', 'white'),( 'font-size', '14px')]},{ 'selector': 'td', 'props': [( ('padding', '6px'),( 'font-size', '13px'))]}]).set_caption("Statistiche Monte Carlo"))
    display(sty)

```

Listing 2: Attivazione pulsante **Esegui simulazione**.

Una volta verificatosi l'evento utente (i.e. l'utilizzo del pulsante) gli input forniti dallo stesso vengono puliti, convertiti in maiuscolo, trasformati in una lista di *float* e normalizzati per sommare a 1. Come sopra cennato, qualora questa condizione non fosse soddisfatta, sarebbe sollevato un **ValueError** che comporterebbe l'interruzione della simulazione.

I dati, ora adeguatamente pre-processati possono essere usati per la costruzione dei path simulati, attraverso *simulations*, *finals*, (*cum_mean*, *stderr*), *stats* che esegue la funzione *run_mc* con i relativi parametri utente. L'output restituito comprende la matrice dei cammini simulati, il vettore dei valori finali delle simulazioni, la media cumulativa e l'errore standard, e il dizionario delle metriche sintetiche.

Tutti i valori, formattati secondo l'apposita funzione *smart_val_format*

```

def smart_val_format(x):
    return f'{x:.2e}' if abs(x) < 0.01 else f'{x:.2f}'

```

Listing 3: Funzione di formattazione dati.

sono mostrati in un *DataFrame* a due colonne, in cui sono indicate ciascuna statistica e il rispettivo valore numerico.

	Statistica	Valore
0	Media simulazione	12,170.44
1	Minimo	7,364.80
2	Massimo	19,611.28
3	5° percentile (VaR)	9,725.16
4	95° percentile	14,961.72
5	CVaR 5%	9,213.62
6	Rendimento annuo %	18.79
7	Volatilità annua %	13.08
8	Sharpe Ratio	1.25
9	Sortino Ratio	2.11
10	Skewness	0.36
11	Kurtosis	0.16
12	StdErr media	15.91
13	CoeffVar	1.31e-03

Figura 7: Tabella riepilogativa della simulazione.

In aggiunta alla tabella, sono forniti due grafici interattivi realizzati con il ricorso alla libreria Matplotlib, progettati per fornire un riscontro visivo dei risultati della simulazione effettuata. Più precisamente i grafici visualizzano rispettivamente l’evoluzione simulata del portafoglio nel tempo e la media cumulata dei valori finali nel corso delle simulazioni.

```

for i in range(n):
    ax0.plot(simulations[:, i], color=colors[i],
              alpha=0.35, lw=0.7)
    ax0.grid(True, linestyle=':', linewidth=0.7, alpha=0.7)

N, bins, patches = ax1.hist(finals, bins=30,
                           density=True, orientation='horizontal',
                           edgecolor='white', lw=0.5)

norm = Normalize(vmin=0, vmax=N.max())
cmap_hist = plt.get_cmap('Blues')
for count, patch in zip(N, patches):
    patch.set_facecolor(cmap_hist(norm(count)))
ax1.tick_params(axis='y', labelleft=False)

kde = gaussian_kde(finals)
ys = np.linspace(finals.min(), finals.max(), 1000)
dens = kde(ys)

```

```

    ax1.plot(dens, ys, color='#5FA8D3', lw=2)
    ax1.axhline(finals.mean(), color='#5FA8D3', ls='--', lw=1.5)

    ax1.grid(True, linestyle=':', linewidth=0.7, alpha=0.6)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 4: Plot percorsi Monte Carlo.

La figura è divisa in due sotto-grafici orizzontali, in cui il primo, *ax0*, mostra nel dettaglio l'andamento temporale dei percorsi simulati, mentre il secondo, *ax1*, presenta la distribuzione marginale dei valori finali.

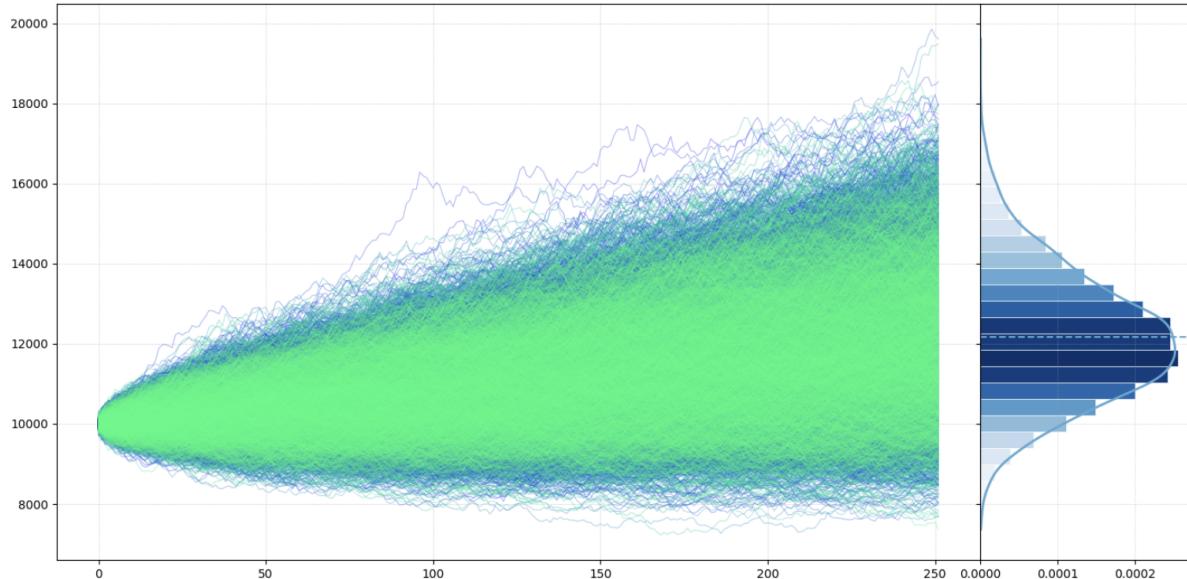


Figura 8: Simulazione Monte Carlo del portafoglio ($n = 10000$).

Può essere utile segnalare l'utilizzo della Kernel Density Estimation (KDE) per stimare la distribuzione dei risultati finali.

```

fig2, ax2 = plt.subplots(figsize=(10, 4))
fig2.canvas.header_visible = False
fig2.canvas.toolbar_visible = True
fig2.canvas.footer_visible = False

ax2.plot(cum_mean, label='Media cumulata', color='navy')
ax2.fill_between(np.arange(len(cum_mean)), cum_mean -
    stderr, cum_mean + stderr,

```

```

        color='navy', alpha=0.2, label='+/-1 std err')
ax2.grid(True, linestyle='--', linewidth=0.6, alpha=0.7)
ax2.legend()

fig2.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 5: Media cumulata dei risultati simulati

Nel secondo grafico, la riga `ax2.plot(cum_mean, label='Media cumulata', color='navy')` traccia la media cumulata dei risultati simulati, a cui successivamente viene aggiunta una barra intorno alla curva pari a ± 1 errore standard.

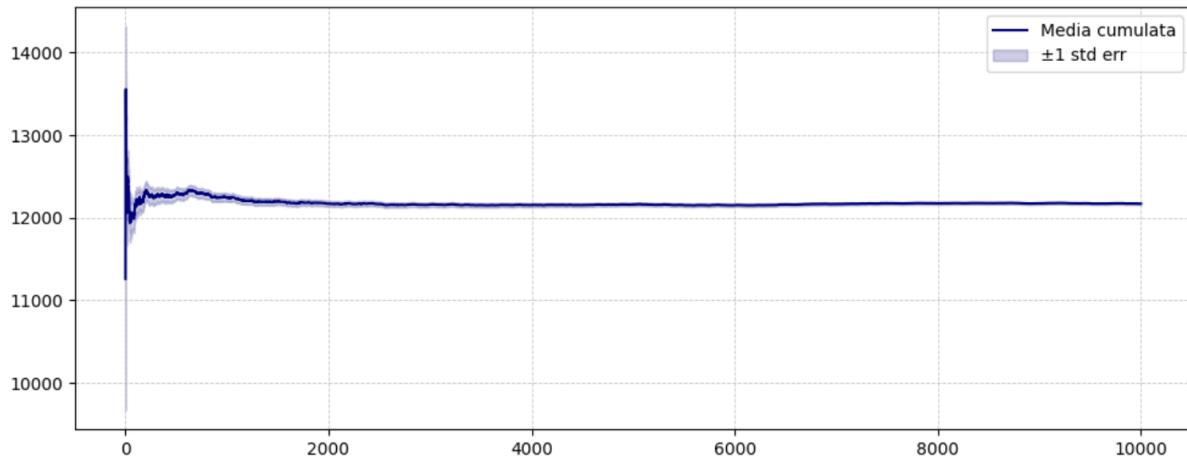


Figura 9: Media cumulata della simulazione ($n = 10000$)

È ampiamente apprezzabile la riduzione dell'errore standard della media al crescere del numero dei cammini. Significativo risulta anche il beneficio di un maggior numero di simulazioni nei confronti del coefficiente di variazione, nell'ambito di una maggiore robustezza dell'intero processo in presenza di un'elevata numerosità di percorsi simulati.

Come precisato in apertura di sezione, il ricorso a tecniche di simulazione Monte Carlo consente di superare i limiti del tradizionale approccio media-varianza, fondato sull'assunzione di normalità dei rendimenti. Tale ipotesi, tuttavia, risulta spesso disattesa nei mercati reali, dove le distribuzioni empiriche dei rendimenti mostrano frequenti deviazioni dalla normalità, rendendo l'approssimazione gaussiana inadeguata a descriverne accuratamente il comportamento.

Si consideri, a titolo esemplificativo, un portafoglio composto in via esclusiva ed in pari misura dai titoli Meta e Nvidia, il cui valore di partenza è fissato a \$10000.

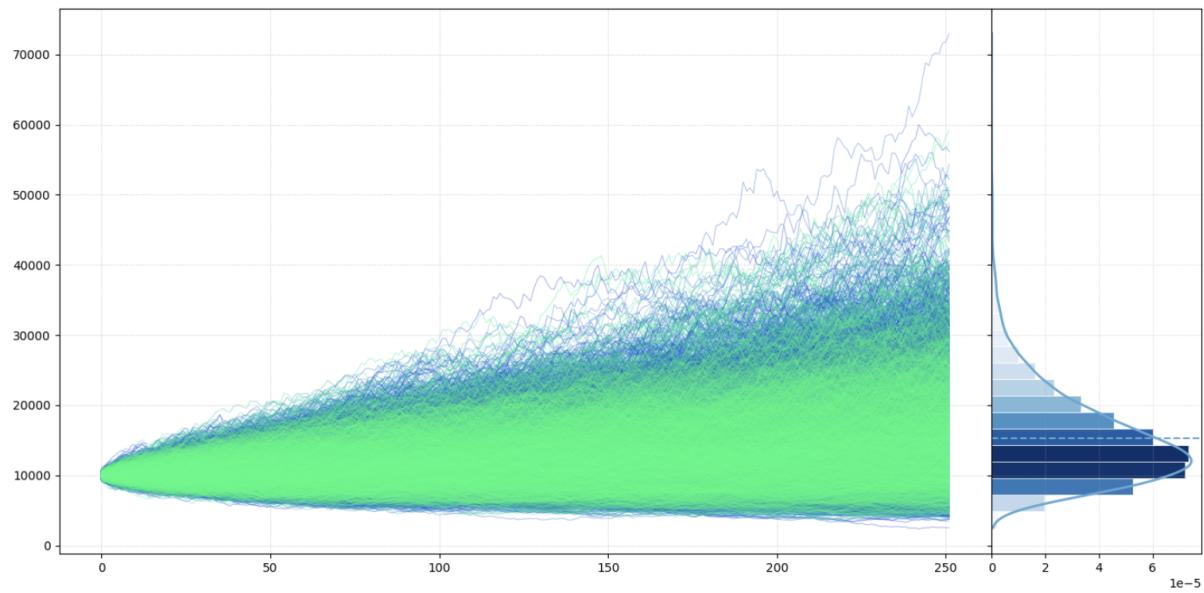


Figura 10: Distribuzione asimmetrica dei rendimenti (META = 0.5 ; NVDA = 0.5).

La simulazione³¹ mostra valori di Skewness e Kurtosis rispettivamente pari a 1.36 e 3.43, indicando che la distribuzione presenta un’asimmetria a destra e code pesanti (e dunque, una **non normalità statisticamente significativa**³²), distaccandosi fortemente dal modello gaussiano, come facilmente desumibile dall’immagine di cui sopra.

Inoltre, considerando lo Sharpe Ratio e il Sortino Ratio, quantificati in 0.72 e 1.19, si coglie facilmente come considerare la deviazione standard come unica misura del rischio, in accordo alla logica di Markowitz, porti ad una sottostima del rendimento corretto per il rischio, o, secondo la prospettiva opposta, che contribuisca a sovrastimare il rischio effettivo percepito dall’investitore, in quanto manca della capacità di distinguere tra rischio *upside* e *downside*.

³¹Effettuata in data 8 agosto 2025, 41 minuti dopo l’apertura dei mercati.

³²Con la conseguente maggiore probabilità di eventi estremi, sia negativi che positivi.

3 Applicazioni pratiche dei modelli

Il presente capitolo apre la seconda sezione dell’elaborato, incentrata sulla valutazione empirica delle performance predittive dei modelli teorici finora discussi. In particolare, i prezzi delle opzioni ottenuti mediante le diverse metodologie verranno confrontati con i corrispondenti dati di mercato, al fine di verificarne l’attendibilità e la capacità di replica delle dinamiche reali.

3.1 Introduzione all’analisi

Dopo aver delineato i principi matematici alla base dei modelli di Cox-Ross-Rubinstein, Black-Scholes, Monte Carlo e Heston, si procede ora alla loro comparazione pratica. L’obiettivo è testare le ipotesi teoriche alla luce dei dati osservati, valutando la capacità di ciascun modello di approssimare i prezzi delle opzioni effettivamente negoziati sul mercato.

3.1.1 Un programma omnicomprensivo

Nell’ottica dell’attuazione del confronto tra i diversi modelli di pricing, si fa ricorso ad un apposito programma progettato per misurare la capacità di ciascun modelli di aderire ai prezzi di mercato delle opzioni, misurando l’accuratezza predittiva tramite l’RMSE.

L’analisi che segue fornirà una valutazione approfondita della convergenza del modello di Cox-Ross-Rubinstein (CRR) e delle simulazioni Monte Carlo rispetto ai prezzi calcolati mediante il modello Black-Scholes, ferma restando l’osservanza delle condizioni preliminari stabilite. Sarà inoltre proposta una valutazione esaustiva del modello di Heston, con particolare attenzione alla sua procedura di calibrazione. Nello specifico, il modello di Heston con salti viene calibrato utilizzando un processo di ottimizzazione numerica, che mira a minimizzare la differenza tra i prezzi derivati dal modello e quelli osservati sul mercato. I parametri ottimizzati includono la volatilità stocastica, la correlazione tra il processo stocastico del sottostante e la volatilità, nonché i parametri associati ai salti nel processo di prezzo.

Inoltre, il programma fornisce una serie di grafici interattivi generati tramite la libreria *Plotly*, che permettono di visualizzare in modo intuitivo e dettagliato i risultati dell’analisi e consentono di esplorare facilmente la performance di ciascun modello, facilitando un confronto visivo tra i prezzi simulati e quelli di mercato.

3.2 Capacità previsionali dei modelli

Poste le ampie premesse teoriche, è possibile nell'immediato appurare la convergenza BS-CRR-MC, i quali, posti come base di riferimento, saranno confrontati con il modello Heston, in modo tale da poter verificare i vantaggi introdotti dall'adozione di un sistema a volatilità stocastica.

Si prenda in analisi il test effettuato in data 28 agosto 2025 sull'option chain AAPL con scadenza al 5 settembre dello stesso anno. In generale, le opzioni del settore tecnologico presentano una maggiore volatilità e dunque permettono di valutare il comportamento dei modelli tradizionali in condizioni non ottimali.

	K	T	Market	Heston	BS	CRR	MC_BS	SQError_Heston	SQError_BS	SQError_CRR	SQError_MC_BS	IV	Intrinsic
0	180.00	0.024	30.75	31.41	29.77	31.54	29.77	0.4293	0.9658	0.6309	0.9658	0.000	29.767271
1	182.50	0.024	28.10	28.95	27.27	29.05	27.27	0.7249	0.6892	0.8964	0.6892	0.000	27.269799
2	185.00	0.024	25.90	26.50	24.82	24.82	24.83	0.3575	1.1583	1.1586	1.1532	0.367	24.772328
3	187.50	0.024	22.80	24.04	22.27	24.05	22.27	1.5499	0.2758	1.5671	0.2758	0.000	22.274856
4	190.00	0.024	21.12	21.59	20.01	20.01	20.03	0.2203	1.2421	1.2422	1.2083	0.385	19.777385
5	192.50	0.024	18.45	19.15	17.46	17.46	17.47	0.4948	0.9766	0.9771	0.9522	0.327	17.279913
6	195.00	0.024	16.30	16.74	14.97	14.97	14.98	0.1918	1.7609	1.7615	1.7298	0.289	14.782442
7	197.50	0.024	14.30	14.37	13.24	13.24	13.25	0.0052	1.1322	1.1326	1.0985	0.382	12.284970
8	200.00	0.024	12.03	12.09	10.77	10.77	10.78	0.0043	1.5768	1.5766	1.5473	0.331	9.787499
9	202.50	0.024	9.85	9.94	8.59	8.59	8.60	0.0080	1.5805	1.5800	1.5746	0.309	7.290027
10	205.00	0.024	8.05	7.98	6.91	6.92	6.89	0.0052	1.2883	1.2877	1.3363	0.320	4.792556
11	207.50	0.024	6.20	6.25	5.19	5.19	5.16	0.0024	1.0122	1.0120	1.0795	0.307	2.295084
12	210.00	0.024	4.70	4.77	3.84	3.85	3.81	0.0049	0.7313	0.7306	0.7932	0.306	0.000000
13	212.50	0.024	3.55	3.55	2.85	2.85	2.82	0.0000	0.4949	0.4955	0.5393	0.312	0.000000
14	215.00	0.024	2.55	2.59	1.96	1.96	1.95	0.0017	0.3492	0.3487	0.3611	0.309	0.000000
15	217.50	0.024	1.85	1.85	1.40	1.40	1.40	0.0000	0.2060	0.2057	0.2003	0.317	0.000000
16	220.00	0.024	1.27	1.29	0.93	0.93	0.94	0.0004	0.1153	0.1153	0.1045	0.317	0.000000
17	222.50	0.024	0.94	0.87	0.68	0.68	0.70	0.0044	0.0701	0.0702	0.0599	0.330	0.000000
18	225.00	0.024	0.66	0.58	0.46	0.46	0.49	0.0058	0.0383	0.0382	0.0306	0.337	0.000000
19	227.50	0.024	0.49	0.38	0.34	0.34	0.36	0.0111	0.0220	0.0221	0.0169	0.349	0.000000
20	230.00	0.024	0.37	0.25	0.26	0.26	0.27	0.0149	0.0129	0.0129	0.0093	0.362	0.000000

Figura 11: Tabella riepilogativa AAPL Call 9/5/2025.

Per garantire una maggiore qualità dell'analisi, i dati riportati sono stati precedentemente filtrati, in modo che venissero considerate solo opzioni in un intervallo dello strike compreso tra l'85% e il 115% del prezzo spot.

Un secondo elemento di filtraggio è rappresentato dallo spread bid/ask contro prezzo di riferimento, il quale deve sottostare a valori inferiori al 30%. Sono inoltre considerate le opzioni solo con valori di volatilità *ragionevoli*, ossia compresi tra 0.000001 e 2.5.

Infine, il prezzo di mercato deve risultare superiore al valore intrinseco dell'opzione, ma non deve andare oltre un multiplo ragionevole del sottostante.

Potendo ora passare alla valutazione dei risultati, si nota come, da una parte i prezzi calcolati dai modelli ad albero binomiale, Black-Scholes e Monte Carlo **tendano a convergere**, fornendo una conferma empirica di quanto stabilito nella sezione teorica, e dall'altra quanto, alla luce della prossimità temporale della scadenza e delle caratteristiche intrinseche del settore in cui opera Apple, questi forniscano una stima meno accurata del più recente modello di Heston.

Le opzioni su titoli tecnologici presentano caratteristiche strutturali che incidono fortemente sulla qualità del pricing e sulla precisione di ciascun modello. In primo luogo, come precedentemente affermato, si annovera la forte volatilità storica, che si traduce in alti valori delle relative volatilità implicite (e dunque di superfici di volatilità più accentuate), specialmente nel breve termine.

È da considerare anche la forte dipendenza da *eventi specifici*, relativi alla singola impresa o al più ampio scenario macroeconomico, dalle cui aspettative si può originare uno *skew* temporaneo.

Tali considerazioni giustificano la formazione di uno *smile* di volatilità e mettono in mostra i noti limiti del modello di Black-Scholes (e, per estensione, di CRR e MC).

Nel caso in analisi si evidenzia che, su una scadenza di pochi giorni il modello di Heston con salti fornisce la miglior aderenza ai prezzi di mercato, con un RMSE complessivo di 0.3039, contro valori maggiori di 0.80 relativi agli altri modelli.

Tuttavia, può essere utile soffermarsi sulle caratteristiche degli errori commessi dai modelli. Nello specifico, mentre per strike compresi tra 180 e 200 USD, Heston sovrastima in modo sistematico, i modelli a volatilità costante tendono a sottostimare anche di oltre 2 USD. La superiorità di Heston diventa lampante nella regione ATM (Strike da 195 a 205 USD), dove Heston mantiene errori dell'ordine di 10^{-3} , a differenza di Black-Scholes, CRR e Monte Carlo che mostrano errori quadratici intorno al dollaro e mezzo. Dai dati si evince chiaramente come i salti e la volatilità stocastica siano uno strumento di grande valore per catturare l'accelerazione dello skew di breve periodo.

Il medesimo comportamento è riscontrabile in tutte le altre opzioni del settore tech, e il modello di Heston (specialmente nella variante qui utilizzata) si presenta come un'alternativa generalmente più raffinata rispetto ai modelli a volatilità costante.

Spostando l'attenzione dal settore tecnologico è possibile compiere il medesimo test su uno strumento di replica, come un ETF, su una scadenza più lunga.

K	T	Market	Heston	BS	CRR	MC_BS	SQError_Heston	SQError_BS	SQError_CRR	SQError_MC_BS	IV	Intrinsic	
0	495.00	0.083	82.84	75.69	65.22	65.22	65.29	51.0669	310.2362	310.2940	307.9942	0.406	59.920157
1	500.00	0.083	77.89	71.37	60.50	60.50	60.55	42.6301	302.6853	302.6826	300.9143	0.388	54.937835
2	505.00	0.083	72.94	67.06	55.82	55.82	55.86	34.5582	292.9091	292.9205	291.6642	0.372	49.955512
3	510.00	0.083	68.09	62.76	51.18	51.18	51.20	28.4419	286.1637	286.2180	285.4094	0.355	44.973189
4	515.00	0.083	63.41	58.48	45.00	45.00	45.03	24.2357	338.6088	338.7283	337.5465	0.302	39.990866
5	520.00	0.083	58.53	54.22	40.37	40.37	40.39	18.5475	329.7225	329.8107	329.1869	0.285	35.008543
6	525.00	0.083	53.78	49.99	36.08	36.08	36.08	14.3729	313.1520	313.1569	313.4342	0.275	30.026220
7	530.00	0.083	49.03	45.79	31.65	31.65	31.62	10.5291	302.0379	302.0730	303.1049	0.259	25.043897
8	535.00	0.083	44.45	41.62	27.58	27.58	27.51	7.9871	284.4210	284.4261	286.6598	0.248	20.061574
9	540.00	0.083	39.68	37.50	23.37	23.37	23.27	4.7562	266.0654	266.1387	269.1995	0.233	15.079251
10	541.00	0.083	38.84	36.68	22.84	22.84	22.74	4.6382	255.8697	255.9318	259.1959	0.234	14.082786
11	542.00	0.083	37.90	35.87	21.95	21.95	21.84	4.1391	254.4197	254.4890	257.8153	0.230	13.086321
12	543.00	0.083	37.02	35.05	21.28	21.28	21.17	3.8930	247.9771	247.9836	251.4615	0.229	12.089857
13	544.00	0.083	36.09	34.24	20.44	20.44	20.33	3.4198	244.9383	245.0155	248.4601	0.225	11.093392
14	545.00	0.083	35.18	33.43	19.69	19.69	19.58	3.0537	239.9037	239.9103	243.4573	0.223	10.096928
15	546.00	0.083	34.32	32.63	19.06	19.05	18.94	2.8671	233.0005	233.0738	236.5743	0.222	9.100463
16	547.00	0.083	33.45	31.82	18.31	18.31	18.20	2.6274	229.0022	229.0080	232.5369	0.220	8.103998
17	548.00	0.083	32.54	31.02	17.54	17.54	17.42	2.2973	225.1196	225.1351	228.6068	0.216	7.107534
18	549.00	0.083	31.58	30.23	16.72	16.72	16.61	1.8287	220.7884	220.8709	224.2043	0.212	6.111069
19	550.00	0.083	30.78	29.43	16.22	16.22	16.10	1.8104	212.0310	212.0529	215.4537	0.213	5.114605
20	551.00	0.083	29.88	28.64	15.47	15.47	15.35	1.5153	207.5279	207.5674	210.9391	0.210	4.118140

Figura 12: Tabella riepilogativa QQQ ETF 9/26/2025.

Si propongono pertanto i prezzi calcolati sui primi 20 strike filtrati dell'ETF offerto da Invesco e negoziato sul Nasdaq, con scadenza fissata al 26 settembre 2025.

Anche in questo caso la modellizzazione con volatilità stocastica si mostra superiore rispetto ai modelli a volatilità costante, specialmente in corrispondenza degli strike in cui il volatility smile risulta più accentuato. Tuttavia, si denotano i primi segni di deterioramento della stima anche in rapporto al modello di Heston, in parte a causa della qualità dei dati offerti dalla piattaforma Yahoo Finance, che sebbene adeguati a scopi informativo/divulgativi, possono risultare inadeguati per una calibrazione efficace dei parametri di Heston, ma anche a causa delle limitazioni intrinseche del modello, anche al netto dell'implementazione del termine di salto. Per tale ragione, nel capitolo successivo è proposta la derivazione di un nuovo modello della famiglia Heston, con l'intenzione di fornire una stima del prezzo maggiormente accurata sotto le condizioni in cui il modello di Heston tradizionale di è dimostrato fallace.

3.2.1 Implementazione dei salti lognormali nel modello di Heston

Per raggiungere una stima il più precisa possibile si è scelto di dotare il modello di Heston tradizionale di un termine che potesse tenere in considerazione gli effetti dei salti di prezzo, sulla scia dei modelli di Bates e dei jump-diffusion di Merton.

Nel particolare caso in analisi si combina una dinamica diffusa a varianza stocastica di tipo CIR con un processo di Poisson indipendente che genera salti moltiplicativi del prezzo. Sotto la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} , le dinamiche del prezzo del sottostante e della varianza risultano

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = (r - q - \lambda_J \kappa_J) dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(S)} + (e^J - 1) dN_t, \quad (3.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^{(V)}, \quad (3.2)$$

dove $d\langle W_t^{(S)}, W_t^{(V)} \rangle = \rho dt$, mentre i parametri $\kappa, \theta, \xi > 0$ indicano la velocità di mean reversion, il livello di lungo periodo e la volatilità della volatilità del processo CIR per v_t . Il termine

$$\kappa_J := \mathbb{E}[e^J - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \quad (3.3)$$

rappresenta il compensatore dei salti, avente funzione correttiva del drift affinché $e^{-(r-q)t} S_t$ sia una martingala sotto \mathbb{Q} . La coppia (S_t, v_t) risulta in tal modo un *affine jump-diffusion* (Duffie-Pan-Singleton, 2000).

Denotando $X_T = \ln S_T$ e $x = \ln S_0$, il prezzo di una call europea può essere ottenuto a partire dalla funzione caratteristica $\varphi(u; T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{iuX_T}]$.

In particolare, la struttura affine implica una fattorizzazione della funzione caratteristica in una componente diffusa (Heston) e una di salto (Merton):

$$\varphi(u; T) = \exp\left(C(u; T) + D(u; T) v_0 + iu [x + (r - q - \lambda_J \kappa_J)T]\right) \exp\left(\lambda_J T \left(e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1\right)\right). \quad (3.4)$$

La seconda esponenziale è la funzione caratteristica del processo di salti lognormali alla Merton. I coefficienti C e D della parte Heston risolvono ODE di Riccati e ammettono forma chiusa. Seguendo i lavori di Kahl & Jaekle (2005) e Lord & Kahl (2010), si introducono

$$d(u) = \sqrt{(\kappa - \rho\xi iu)^2 + \xi^2(iu + u^2)}, \quad g(u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d(u)}{\kappa - \rho\xi iu + d(u)}, \quad \Re d(u) > 0, \quad (3.5)$$

da cui

$$C(u; T) = \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left[(\kappa - \rho\xi iu - d(u))T - 2 \ln\left(\frac{1 - g(u)e^{-d(u)T}}{1 - g(u)}\right) \right], \quad (3.6)$$

$$D(u; T) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d(u)}{\xi^2} \frac{1 - e^{-d(u)T}}{1 - g(u)e^{-d(u)T}}. \quad (3.7)$$

Le espressioni appena descritte sono numericamente stabili per l'uso in integrazioni di

Fourier in forza della scelta della radice con parte reale positiva e alla normalizzazione tramite $g(u)$.

Con maggior dettaglio, si consideri l'ansatz affine

$$f(t, s, v) = \mathbb{E}_t \left[\exp(iuX_T) \right] = \exp \left(A(\tau) + B(\tau)v + iu \log s \right), \quad \tau = T - t, \quad (3.8)$$

applicando Feynman-Kac alle dinamiche di cui alle equazioni (3.1) e (3.2) con generatore \mathcal{L} e sostituendo la (3.8) si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_\tau f &= \mathcal{L}f = f \left\{ iu(r - q - \lambda_J \kappa_J) - \frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{2}\xi^2vB(\tau)^2 + \kappa(\theta - v)B(\tau) + \rho\xi uvB(\tau)i \right\} \\ &\quad + f \lambda_J (\mathbb{E}[e^{iuJ}] - 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Equagliando i coefficienti in potenze di v e nei termini costanti si ricavano le ODE in τ :

$$B'(\tau) = \frac{1}{2}\xi^2B(\tau)^2 + (\rho\xi iu - \kappa)B(\tau) - \frac{1}{2}u^2, \quad B(0) = 0, \quad (3.10)$$

$$A'(\tau) = iu(r - q - \lambda_J \kappa_J) + \kappa\theta B(\tau) + \lambda \left(e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1 \right), \quad A(0) = 0. \quad (3.11)$$

L'equazione (3.10) è una Riccati a coefficienti costanti che si integra in forma chiusa introducendo $d(u)$ e $g(u)$ come in (3.5); reinserendo B in (3.11) e integrando si ottiene A , e complessivamente la decomposizione (3.4) con i coefficienti (3.6) e (3.7).

Come proposto da Heston (1993) e Lewis (2001), si consideri il prezzo di call espresso nella nota forma

$$C(S_0, K, T) = S_0 e^{-qT} P_1 - K e^{-rT} P_2,$$

con le probabilità neutrali al rischio P_1, P_2 definite come

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iu \log K} \varphi(u - i; T)}{iu \varphi(-i; T)} \right) du, \quad (3.12)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iu \log K} \varphi(u; T)}{iu} \right) du, \quad (3.13)$$

con $\varphi(-i; T) = \mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{(r-q)T}$.

La rappresentazione per P_1 si ottiene mediante cambio di misura alla *share measure* e normalizzazione, e in entrambe le espressioni la singolarità in $u = 0$ è rimossa dalla quota $\frac{1}{2}$ e dal fattore $1/(iu)$. Le trasformate (3.12) e (3.13) sono ben condizionate nel contesto Heston/Bates, purché si impieghi la *Little Heston Trap* per la parte diffusiva della funzione caratteristica.

In particolare, la parametrizzazione LHT impone $\Re d(u) > 0$ e $|g(u)| < 1$ nell'insieme di (u, T) di interesse. Il fattore logaritmico che compare in $C(u; T)$ può essere riscritto come

$$z(T, u) = \frac{1 - g(u) e^{-d(u)T}}{1 - g(u)} = 1 - \underbrace{g(u) e^{-d(u)T}}_{=: w(T, u)}.$$

Poiché $|g(u)| < 1$ e $\Re d(u) > 0$, si ha $|w(T, u)| < 1$ per ogni $T > 0$, e dunque $z(T, u)$ rimane in un intorno controllato di 1.

Ne conseguono due limiti regolari che guidano la scelta del ramo del logaritmo; più precisamente, per $T \rightarrow \infty$ si ha $e^{-dT} \rightarrow 0$ e quindi $z(T, u) \rightarrow 1$ dall'interno del disco unitario, e per $T \rightarrow 0$, $z(T, u) \rightarrow 1$ in modo continuo.

Pertanto, al variare di (u, T) , la traiettoria di $z(T, u)$ non attraversa la semiretta reale negativa (branch cut del logaritmo complesso), il numero di avvolgimento attorno all'origine è nullo e $\text{Arg } z(T, u)$ resta lontano da $\pm\pi$.

In termini computazionali, il termine $\ln z(T, u)$ nella formula del pricing di una call è valutabile sul ramo principale senza salti di fase (di valore pari a $\pm 2\pi i$) né cancellazioni *catastrofiche* quando $1 - ge^{-dT}$ è particolarmente ridotto. Tale normalizzazione, introdotta per evitare trappole di ramo e singolarità spurie, si è dimostrata particolarmente efficace per scadenze lunghe e per valori di $|u|$ elevati (Lord & Kahl, 2010)³³.

Può inoltre essere utile analizzare il ruolo della condizione di Feller nel garantire la stabilità computazionale del modello.

Nello specifico suddetta condizione, definita attraverso la relazione

$$2\kappa\theta > \xi^2, \tag{3.14}$$

assicura che lo zero sia inaccessibile e che v_t rimanga strettamente positivo con probabilità uno. Se la condizione è soddisfatta, allora $\sqrt{v_t}$ risulta definita lungo tutto il cammino, la densità di v_t è regolare e non emergono comportamenti patologici al bordo.

La rappresentazione affine resta valida anche quando Feller non è soddisfatta, ma la prossimità allo zero può accrescere la sensibilità numerica nella valutazione di $d(u)$ e del rapporto $\frac{(1-ge^{-dT})}{(1-g)}$ per orizzonti brevi. La Little Heston Trap mitiga tali instabilità, mentre la condizione in analisi fornisce una garanzia strutturale addizionale che si riflette in una maggiore regolarità dello smile nel breve e in una riduzione del rischio di degenerazioni

³³Per completezza, si osservi che una forma algebricamente equivalente ma numericamente sfavorevole sostituisce g con il suo reciproco $\tilde{g} = 1/g$ (tipicamente con $|\tilde{g}| > 1$); in tal caso il fattore $\tilde{z}(T, u) = \frac{1-\tilde{g}e^{-dT}}{(1-\tilde{g})}$ può avvicinarsi a zero lungo traiettorie che lambiscono o attraversano la branch cut, inducendo cambi di ramo del logaritmo e una generale maggiore instabilità. Ad ogni modo, la scelta Little Trap evita sistematicamente simili fenomeni, e risulta pertanto in questo contesto preferibile.

numeriche.

La valutazione degli integrali delle probabilità neutrali al rischio richiede una scelta accurata dello schema di integrazione numerica sull'asse reale positivo. In primo luogo, il contributo in $u = 0$ è trattato separando esplicitamente la quota $\frac{1}{2}$ e la regolarizzazione indotta dal fattore $\frac{1}{(iu)}$, cosicché l'integrandi è ben definito al limite. Inoltre, è opportuno troncare l'intervallo di integrazione a $[0, U_{\max}]$ con U_{\max} selezionato in funzione della scadenza e dei parametri: in molte configurazioni pratiche un intervallo nell'ordine di grandezza compreso tra poche decine e qualche centinaio è sufficiente, mentre in presenza di frequenze di salto elevate o varianze dei salti più ampie è spesso necessario estendere il dominio di integrazione per catturare l'apporto delle code. In terzo luogo, la scelta di tolleranze assolute e relative stringenti nella quadratura adattiva consente di controllare l'errore numerico accumulato e di evitare artefatti oscillatori; la stabilizzazione fornita dalla Little Trap sulla parte diffusiva contribuisce a rendere l'integrandi più regolare, migliorando la velocità di convergenza. Infine, risulta buona pratica verificare la condizione di normalizzazione $\varphi(-i; T) = S_0 e^{(r-q)T}$ come controllo interno di coerenza sulla compensazione del drift e sulla fattorizzazione.

Per $T \rightarrow 0$ si ha $C(u; 0) = D(u; 0) = 0$ e $\varphi(u; 0) = e^{iux}$, come richiesto dalle condizioni iniziali. Per $T \rightarrow \infty$, segue che $\ln\left(\frac{1-ge^{-dT}}{1-g}\right) \rightarrow -\ln(1-g)$, e che $D(u; T) \rightarrow \frac{\kappa-\rho\xi u-d}{\xi^2(1-g)}$, riflettendo l'avvicinamento al regime stazionario della varianza.

I vincoli di non arbitraggio $0 \leq C \leq S_0 e^{-qT}$ e la parità put-call sono preservati dall'impostazione per trasformata, grazie alla correzione $-\lambda_J \kappa_J$ nel drift e alla normalizzazione $\varphi(-i; T) = S_0 e^{(r-q)T}$.

3.2.2 Calibrazione del modello Heston-Bates

La procedura di calibrazione del modello è fortemente legata alle considerazioni teoriche appena poste. L'impiego della forma LHT costituisce un passaggio chiave per garantire la stabilità numerica del modello.

Volendo evidenziare alcune specificità più tecniche di suddetta procedura, si osserva innanzitutto che sotto la misura di rischio neutro \mathbb{Q} si fissa la funzione caratteristica $\varphi(u; T)$ del log-prezzo $X_T = \log S_T$ come prodotto tra la componente diffusiva e quella di salto, con drift compensato pari a $r - q - \lambda_J \kappa_J$, dove $\kappa_J = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$.

Tale struttura è incapsulata, nel caso del programma di pricing proposto in questo elaborato, nella funzione interna `_heston_charfun`, nella quale si definiscono, oltre a $d(u)$ e $g(u)$, i termini $C(u; T)$ e $D(u; T)$, e si moltiplica per il fattore di Merton $\exp\left[\lambda_J T \left(e^{i u \mu_J - \frac{1}{2} \sigma_J^2 u^2} - 1\right)\right]$.

```

def _heston_charfun(u, T, S0, r, q, kappa, theta, v0, xi, rho,
lambda_jump, muJ, sigmaJ):
    i = 1j
    x = np.log(S0)
    d = np.sqrt((rho*xi*i*u - kappa)**2 + (xi**2)*(i*u + u**2))
    g = (kappa - rho*xi*i*u - d) / (kappa - rho*xi*i*u + d)
    edT = np.exp(-d*T)
    C = (kappa*theta/(xi**2)) * ((kappa - rho*xi*i*u - d)*T -
        2.0*np.log((1.0 - g*edT)/(1.0 - g)))
    D = ((kappa - rho*xi*i*u - d)/(xi**2)) * ((1.0 - edT)/(1.0 -
        g*edT))

    k_jump = np.exp(muJ + 0.5*sigmaJ*sigmaJ) - 1.0
    phi_J = np.exp(lambda_jump*T) * (np.exp(i*u*muJ - 0.5*sigmaJ*
        sigmaJ*u*u) - 1.0)
    drift = (r - q - lambda_jump * k_jump)
    return np.exp(C + D*v0 + i*u*(x + drift*T)) * phi_J

```

Listing 6: Implementazione della funzione caratteristica con Little Heston Trap.

La funzione restituisce il valore atteso sotto \mathbb{Q} dell'esponenziale complesso e^{iuX_T} (dove $u \in \mathbb{C}$ indica la variabile di Fourier. Con maggiore dettaglio, l'input u viene immediatamente convertito in array di tipo complesso per garantire compatibilità con operazioni vettoriali e complesse.

Successivamente, si definisce l'unità immaginaria $i = 1j$ e si calcola il logaritmo del prezzo iniziale (che rappresenta lo stato iniziale del processo).

La parte diffusiva è gestita attraverso la soluzione analitica del modello di Heston, con stabilizzazione numerica ottenuta tramite il metodo Little Heston Trap; si calcola il termine $d(u)$, dipendente dai parametri di mean-reversion, e successivamente $g(u)$, il quale rappresenta una trasformazione razionale di $d(u)$ e consente di evitare instabilità nei logaritmi. L'esponenziale di $-dt$ viene precomputato per semplificare i calcoli successivi.

In seguito, si determinano i coefficienti $C(u; T)$ e $D(u; T)$; nuovamente, il primo rappresenta la parte deterministica della funzione caratteristica, mentre il secondo modula l'effetto della variabile iniziale v_0 .

Con riferimento alla componente di salto, modellata come un processo di Poisson con ampiezze lognormali, è calcolato il compensatore κ_J , che rappresenta il valore atteso del salto e corregge la deriva del processo. La funzione caratteristica dei salti, $\Phi_J(u)$, è

determinata secondo la relazione sopra definita immediatamente dopo κ_J .

Infine, il drift del processo del log-prezzo viene compensato nella modalità precedentemente illustrata. Il valore della funzione caratteristica risulta così pari al prodotto tra la parte diffusiva e quella di salto, rispettando la relazione fornita alla 3.4.

A partire da φ , il prezzo dell'opzione call $C(S_0, K, T)$ è ottenuto mediante il ricorso ai noti integrali di Lewis-Heston. Si prenda in analisi la funzione `_Pj_heston_cf`, in cui viene calcolato il valore delle probabilità di esercizio dell'opzione P_1 e P_2 , già definite come

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iu \log K} \varphi(u - i; T)}{iu \varphi(-i; T)} \right) du, \quad P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-iu \log K} \varphi(u; T)}{iu} \right) du.$$

La funzione riceve come input il parametro j , un indice che determina quale delle due probabilità viene calcolata.

```
def _Pj_heston_cf(j, K, T, S0, r, q, kappa, theta, v0, xi, rho,
lambda_jump, muJ, sigmaJ, abs_tol=1e-8, rel_tol=1e-6, max_eval
=200):
    logK = np.log(K)
    i = 1j

    if j == 2:
        def integrand(u):
            u = float(u)
            if u == 0.0:
                return 0.0
            phi_u = _heston_charfun(u, T, S0, r, q, kappa, theta,
                                    v0, xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ)
            val = np.exp(-i*u*logK) * (phi_u / (i*u))
            return np.real(val)
        I, _ = quad(integrand, 0.0, np.inf, epsabs=abs_tol,
                    epsrel=rel_tol, limit=max_eval)
        return 0.5 + I/np.pi
    elif j == 1:
        phi_minus_i = S0 * np.exp((r - q) * T)
        def integrand(u):
```

Listing 7: Calcolo della probabilità neutrale al rischio P_2 .

Nel presente caso in cui $j = 2$, si definisce un integrando che valuta la funzione caratteristica $\varphi(u)$ per $u \in \mathbb{R}^+$, moltiplicata per il fattore $\frac{e^{-iu \log K}}{iu}$.

```
elif j == 1:
    phi_minus_i = S0 * np.exp((r - q) * T)
    def integrand(u):
```

```

u = float(u)
if u == 0.0:
    return 0.0
phi_shift = _heston_charfun(u - 1j, T, S0, r, q, kappa,
                             theta, v0, xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ)
val = np.exp(-i*u*logK) * (phi_shift / (i*u * phi_minus_i
))
return np.real(val)
I, _ = quad(integrand, 0.0, np.inf, epsabs=abs_tol, epsrel=
            rel_tol, limit=max_eval)
return 0.5 + I/np.pi

```

Listing 8: Calcolo della probabilità neutrale al rischio P_1 .

Con $j = 1$, si utilizza una variante della funzione caratteristica valutata in $u - i$, che corrisponde ad uno spostamento nel piano complesso necessario per ottenere P_1 . In questo caso, si introduce anche il termine $\varphi(-i)$, che nel modello di Bates ha forma chiusa e corrisponde al valore atteso del prezzo sotto la misura di rischio neutro (ovvero $S_0 e^{(r-q)T}$)³⁴.

Entrambe le integrazioni sono eseguite tramite la funzione `quad` di SciPy. Qualora j fosse diverso da 1 o 2, la funzione solleverebbe un `ValueError`, segnalando un uso non valido³⁵. Il wrapper `call_price_heston_cf` coordina le due valutazioni, mentre `heston_price_vectorized` realizza la versione vettoriale su una griglia di strike, controllando tolleranze assolute e relative tramite i parametri `abs_tol`, `rel_tol` e `max_eval` passati al processo di quadratura.

```

def heston_price_vectorized(S0, strikes, T, r, kappa, theta, v0,
                            xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ, q=0.0, option_type='call',
                            abs_tol=1e-8, rel_tol=1e-6, max_eval=200):
    strikes = np.asarray(strikes, float)
    out = np.empty_like(strikes, dtype=float)

    if isinstance(option_type, str):
        option_types = [option_type] * len(strikes)
    else:
        option_types = np.asarray(option_type)

```

³⁴È proprio a seguito di questa normalizzazione che la relazione per il calcolo della probabilità assume la forma descritta alla 3.12.

³⁵Procedure di debug come questa sono molto diffuse all'interno del programma, in modo da supportare una più rapida individuazione e correzione degli errori.

```

for j, (K, opt_type) in enumerate(zip(strikes, option_types)):
    :
        call_price = call_price_heston_cf(S0, float(K), T, r, q,
                                         kappa, theta, v0, xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ,
                                         abs_tol=abs_tol, rel_tol=rel_tol, max_eval=max_eval)
        if opt_type.lower() == 'call':
            out[j] = call_price
        elif opt_type.lower() == 'put':
            out[j] = call_price - S0*np.exp(-q*T) + K*np.exp(-r*T)
        )
    else:
        raise ValueError("option_type deve essere 'call' o 'put'")
return out

```

Listing 9: Vettorizzazione e controllo delle valutazioni.

Sulla base di quanto illustrato finora, è possibile comprendere come l'utilizzo della forma LHT nella costruzione di φ renda regolare l'integrando in (u, T) , riducendo in tal modo fenomeni di *branch switching*³⁶ e cancellazioni numeriche³⁷.

La funzione obiettivo `obj_heston` ricopre un ruolo di primaria importanza nella procedura di calibrazione; essa definisce un target di ottimizzazione per calibrare i parametri del modello utilizzando la trasformata di Fourier.

```

def obj_heston(p, S, strikes, market_prices, T, r, q=0.0,
               option_types=None, w=None, penalty=None, abs_tol=1e-8, rel_tol
               =1e-6, max_eval=200):
    kappa, theta, v0, xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ = map(
        float, p)

```

Listing 10: Definizione e input della funzione obiettivo.

I parametri oggetto di calibrazione, racchiusi nel vettore `p`, vengono dapprima convertiti in `float` e assegnati alle variabili che rappresentano le componenti fondamentali del modello, ossia mean reversion κ , livello medio di varianza θ , varianza iniziale v_0 , volatilità

³⁶Cambiamento del ramo della funzione quando il parametro complesso attraversa una discontinuità o un taglio di ramo.

³⁷Ciò risulta necessario, in quanto nei modelli come Heston-Bates, l'integrando può contenere termini oscillanti o esponenziali che si annullano parzialmente, rendendo difficile ottenere una stima precisa del prezzo dell'opzione.

della volatilità ξ , correlazione tra sottostante e varianza ρ , intensità dei salti λ_J , media e deviazione dei salti (μ_j, σ_J) ³⁸.

```
model = heston_price_vectorized(S, strikes, T, r, kappa, theta,
                                 v0, xi, rho, lambda_jump, muJ, sigmaJ, q=q, option_type=
                                 option_types, abs_tol=abs_tol, rel_tol=rel_tol, max_eval=
                                 max_eval)

market = np.asarray(market_prices, float)
if w is None:
    w = np.ones_like(market)
w = np.asarray(w, float)
w = w / (w.mean() + 1e-12)

mse = np.mean(w * (model - market)**2)

reg = 0.0
```

Listing 11: Calcolo dei prezzi teorici.

Viene quindi la funzione `obj_heston_jump_cf`, utilizzando i parametri del modello e controllando la precisione numerica tramite le tolleranze assolute e relative e il numero massimo di valutazioni nel processo di quadratura.

```
if isinstance(penalty, dict):
    reg += float(penalty.get('w_rho', 0.0))*rho**2
    reg += float(penalty.get('w_sigmaJ', 0.0))*sigmaJ**2
    reg += float(penalty.get('w_lambda', 0.0))*lambda_jump**2
    reg += float(penalty.get('w_xi', 0.0))*xi**2
return float(mse + reg)
```

Listing 12: Creazione del vettore dei prezzi di mercato.

I prezzi di mercato vengono convertiti in array NumPy e, se non vengono forniti pesi esplicativi, si procede ad una pesatura uniforme. I pesi vengono normalizzati rispetto alla loro media per evitare distorsioni numeriche.

In seguito, si calcola l'errore quadratico medio tra i prezzi teorici e quelli osservati, a cui si aggiunge un termine di penalizzazione che consente di regolarizzare la calibrazione introducendo pesi sui parametri più sensibili o instabili, quali `rho`, `sigmaJ`, `lambda_jump` e `xi`.

³⁸ Anche con riferimento alla funzione obiettivo, qualora non fosse specificata la tipologia di opzione, si imposta di default il pricing di una call.

Il valore finale restituito dalla funzione è la somma tra l'errore quadratico medio e il termine di penalizzazione, fornendo così una misura scalare da minimizzare durante il processo di calibrazione.

Ricorrendo ad un maggior formalismo, si denota che la funzione obiettivo riceve il vettore dei parametri

$$p = (\kappa, \theta, v_0, \xi, \rho, \lambda_J, \mu_J, \sigma_J),$$

genera i prezzi modello $\hat{C}(K_i; p)$ mediante `heston_price_vectorized`, e calcola

$$\mathcal{L}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\hat{C}(K_i; p) - C_i^{mkt} \right)^2 + \mathcal{R}(p)$$

dove C_i^{mkt} sono i prezzi osservati, n il è il numero si strike e \tilde{w}_i indica la versione normalizzata dei pesi positivi forniti in input. Il pricing è eseguito in forma vettoriale sugli strike, e si individua in una formulazione che, per quanto essenziale, si è mostrata fortemente efficace nel mitigare fenomeni di overfitting e preservare la trattabilità del nucleo affine.

La strategia numerica segue una pipeline a due stadi con meccanismo di **fallback**; nello specifico, il primo stadio adotta la **Differential Evolution** per un'esplorazione globale e non derivativa dell'ambiente di \mathcal{L} , con vincoli di scatola su ciascun parametro.

A tal proposito, viene definita la funzione `calibrate_heston_jump_cf_by_data`, che si serve del ricorso ad un `ObjectiveRecorder` per registrare l'ultima valutazione e facilitare la diagnostica, nonché una *callback* che produce log periodici dell'avanzamento³⁹

```
class ObjectiveRecorder:
    def __init__(self, func):
        self.func = func
        self.last_x = None
        self.last_f = None
    def __call__(self, x, *args, **kwargs):
        f = self.func(x, *args, **kwargs)
        self.last_x = None if x is None else np.array(x, copy=True)
        self.last_f = f
    return f
```

Listing 13: Funzione di registrazione dell'ultima valutazione.

³⁹Nei casi in cui la calibrazione può richiedere tempistiche maggiormente prolungate, può essere utile un'indicazione del progresso della stessa nel log.

```

it_de = {"k": 0}

def _cb_de(xk, conv):
    it_de["k"] += 1
    if dev and (dev_logger is not None) and (rec_coarse.
        last_f is not None) and (it_de["k"] % 3 == 0):
        dev_logger.write(f"[Bates-CF] DE step {it_de['k']}]: f
            (x) = {rec_coarse.last_f:.6g}")

    return False

de_opts = dict(maxiter=(40 if dev else 60), popsize=(12 if
    dev else 18), mutation=(0.6, 1.0), ecombination=0.9, polish
    =False, disp=False, seed=42)
de_res = differential_evolution(rec_coarse, bounds, args=
    args_coarse, callback=_cb_de, updating='deferred', workers=
    crn_map, **de_opts)
x_start = np.array(de_res.x, dtype=float)

```

Listing 14: Utilizzo di Differential Evolution nella calibrazione (Stadio 1).

Dopo che lo stadio DE fornisce un valido punto di partenza, viene eseguita una rifinitura locale tramite **L-BFGS-B** partendo da $p^{(0)}$, con gradienti approssimati iterativamente dall'algoritmo e nel rispetto dei vincoli di scatola definiti in precedenza⁴⁰.

```

it_lb = {"k": 0}

def _cb_lb(xk):
    it_lb["k"] += 1
    if dev and (dev_logger is not None) and (rec_FINE.last_f
        is not None) and (it_lb["k"] % 5 == 0):
        dev_logger.write(f"[Bates-CF] L-BFGS iter {it_lb['k']}
            ]]: f(x) = {rec_FINE.last_f:.6g}")

lb_opts = dict(maxiter=120, disp=False, maxls=60, ftol=1e-8,
    gtol=1e-5, eps=1e-8)
res_lb = minimize(rec_FINE, x0=x0, args=args, bounds=bounds,
    method='L-BFGS-B', options=lb_opts, callback=_cb_lb)

if res_lb.success and np.all(np.isfinite(res_lb.x)):
    return np.array(res_lb.x, float)

```

Listing 15: Rifinitura con L-BFGS-B (Stadio 2).

⁴⁰Vincoli concepiti con il principale intento di assicurare che ξ resti positiva e ρ non esca da un dominio ragionevolmente ammissibile.

Qualora la rifinitura non converga ad una soluzione numericamente stabile o resti intrappolata in un altopiano (diagnosticato da messaggi di arresto o mancanza di miglioramento di \mathcal{L}), si attiva un ripiego (**Powell**) senza l'uso di derivate da $p^{(0)}$.

```

if dev and dev_logger is not None:
    msg = getattr(res_lb, "message", "n/a")
    dev_logger.write(f"[Bates-CF] L-BFGS-B non riuscito ({msg})
                      ). Provo Powell...")

res_pw = minimize(rec_fine, x0=x0, args=args, bounds=bounds,
                  method='Powell', options={'maxiter': 200, 'disp': False})

def _val(x):
    return float(rec_fine(np.array(x, float), *args))
candidates = []
try: candidates.append((DE, x0, _val(x0)))
except: pass
if res_lb.success and np.all(np.isfinite(res_lb.x)):
    try: candidates.append((LBFGS, res_lb.x, _val(res_lb.x)))
    except: pass
if res_pw.success and np.all(np.isfinite(res_pw.x)):
    try: candidates.append((POWELL, res_pw.x, _val(res_pw.x)))
    except: pass

if not candidates:
    raise RuntimeError("Calibrazione Bates-CF: nessuna
                       soluzione valida.")

```

Listing 16: Fallback Powell.

La funzione di calibrazione seleziona, infine, fra i candidati, quello con il valore obiettivo più basso.

```

best = min(candidates, key=lambda t: t[2])[1]
if dev and dev_logger is not None:
    dev_logger.write(f"[Bates-CF] Selezionata soluzione
                      fallback con f(x)={_val(best):.6g}")
return np.array(best, float)

```

Listing 17: Scelta del candidato.

Gli aspetti numerici della valutazione per trasformata sono curati in maniera esplicita all'interno delle funzioni di prezzo.

Come precedentemente cennato, la regolarizzazione in $u = 0$ avviene separando la quota $\frac{1}{2}$ nelle definizioni di P_1 e P_2 e introducendo il fattore $\frac{1}{iu}$, sì da rendere l'integrando ben definito al limite. L'intervallo di integrazione è troncato a $[0, U_{max}]$, con U_{max} scelto in funzione dell'orizzonte T e dell'intensità (e dispersione) dei salti⁴¹.

Le tolleranze `abs_tol` e `rel_tol` sono pensate per regolare l'accuratezza della quadratura adattiva. L'utilizzo della Little Heston Trap nella costruzione di C e D ha portato ad un significativo miglioramento nella velocità di convergenza e nella riduzione della suscettibilità ad oscillazioni spurie.

La neutralità al rischio è monitorata imponendo internamente $\varphi(-i; T) = S_0 e^{(r-q)T}$ e il drift compensato nella parte diffusiva. Sono proprio tali verifiche, congiuntamente al controllo di non arbitraggio sui prezzi ricostruiti, a fornire una diagnostica di base dell'implementazione.

Nel flusso applicativo, i log prodotti da `ObjectiveRecorder` nelle fasi DE e L-BFGS-B documentano la traiettoria di \mathcal{L} e consentono di individuare tempestivamente eventuali criticità di tolleranza o di quadratura.

⁴¹All'aumentare di λ_J o σ_J , è opportuno estendere U_{max} al fine di catturare adeguatamente le code della distribuzione.

4 Formalizzazione di un approccio alternativo

Il modello di Heston, arricchito dalla componente di salto e per mezzo della procedura di calibrazione appena descritta, propone un metodo di prezzaggio sistematicamente superiore agli altri analizzati.

Esso risulta di valore non soltanto per la *mera* introduzione del concetto di volatilità stocastica, ma poiché è stato in grado di gettare le basi di un nuovo formalismo e di una linea di pensiero che ha plasmato la successiva ricerca sulla teoria delle opzioni. Ciononostante, come ogni prodotto frutto della ricerca, può essere migliorato, le sue assunzioni superate e i limiti valicati.

Nell’ultima sezione di questo documento si propone una nuova metodologia di pricing a volatilità stocastica a stato transitorio; un modello stocastico riconducibile alla famiglia Heston con termine di feedback retroattivo e Schrödinger bridge.

4.1 Riflessioni sull’implementazione del modello Heston-Bates

In sede di implementazione e test del modello di pricing proposto nel capitolo precedente, si sono manifestate diverse criticità strutturali e numeriche (già ampiamente discusse dalla letteratura negli ultimi decenni) aventi effetto limitativo dell’efficacia operativa dello stesso.

Sul fronte statistico-strutturale, l’integrazione tra parametri diffusivi (i.e. ξ , ρ , θ) e componenti di salto genera collinearità e problemi di identificabilità, specialmente quando, come nel caso in analisi, l’obiettivo di calibrazione è l’RMSE sui prezzi⁴². Inoltre, l’ipotesi di parametri costanti nel tempo e di salti i.i.d. fatica a sostenere una term-structure dello skew coerente tra scadenze e regimi, mentre il ricorso esclusivamente ai salti gaussiani e alla correlazione tende a sottostimare skew estremi e smile di brevissimo termine, dando vita all’esigenza, divenuta ormai prassi, di introdurre arricchimenti non gaussiani nei salti per governare code e asimmetrie.

Sul piano numerico, i metodi a trasformata (e.g. FFT, Carr-Madan e affini) mostrano sensibilità alla scelta di finestra, passo di griglia e damping, con aliasing e troncamenti che impattano sistematicamente le code della smile e gli strike lontani.

⁴²La scelta effettuata si presta ad accentuare valli piatte e molteplicità di minimi locali, portando ad una conseguente instabilità delle soluzioni e una marcata variabilità cross-expiry (Sahalia & Kimmel, 2007).

4.2 Proposta di un correttivo alla struttura tradizionale dei modelli Heston-type

È a seguito della valutazione di tali limitazioni che si intende proporre un nuovo modello di pricing della famiglia Heston che inserisce, accanto a salti asimmetrici nel sottostante (e, ove necessario, salti nella varianza), un **canale endogeno di feedback prezzo-varianza** concepito con l'intenzione di rendere la risposta di v_t immediata e **non lineare** agli shock e alleviando la pressione identificativa su ξ e ρ .

Sul piano operativo, lo schema QE di Andersen assicura una simulazione stabile ed efficiente del fattore di varianza con meccanismo di switching numerico controllato, rendendo la calibrazione Monte Carlo più robusta rispetto agli schemi naïve.

4.2.1 Quadro di riferimento

Riprendendo in parte quanto cennato in sede di introduzione della sezione, il modello SFV (Stochastic Feedback and Volatility) si presenta come un'estensione dei paradigmi affini di Heston e Bates proponendo l'utilizzo di salti DEJD (double-exponential) sul log-prezzo del sottostante in stile Kou, salti spettro positivi sul termine di volatilità v_t e introducendo un termine di feedback istantaneo, il quale fornisce un elemento di novità rispetto al tradizionale approccio fondato sull'esclusivo ricorso alla correlazione browniana.

L'obiettivo è catturare skew molto ripidi e wings estremi su scadenze brevi, nonché spikes di volatilità successivi event-driven, mantenendo al contempo stabilità numerica tramite una calibrazione regolarizzata (Schrödinger Bridge, Martingale Optimal Transport). Il riferimento di partenza rimane il paradigma affine; Heston ottiene la funzione caratteristica in chiuso per un modello SV diffuso, mentre Bates aggiunge salti sul prezzo restando in ambito affine, consentendo calcolo rapido via integrali di Fourier (Heston, 1993; Bates, 1996).

4.2.2 Specificazione probabilistica del modello

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato con le usuali, W_t^S e W_t^v due moti browniani con correlazione ρ ($\langle W^S, W^v \rangle_t = \rho, t$), e $\mu^S(dt, dy)$ e $\mu^v(dt, dz)$ misure di Poisson che descrivono rispettivamente i salti nel log-prezzo ($y \in \mathbb{R}$) e nella varianza ($z > 0$), con misure compensatrici $\nu^S(dy), dt$ e $\nu^v(dz), dt$.

Si denotino con $\tilde{\mu}^S(dt, dy) = \mu^S(dt, dy) - \nu^S(dy), dt$ (e analogamente $\tilde{\mu}^v$) le misure di Poisson compensate.

Il modello è definito da due equazioni differenziali stocastiche descriventi rispettivamente le dinamiche del prezzo del sottostante e della varianza;

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^S + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \tilde{\mu}^{(S)}(dt, dy), \quad (4.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^v + \gamma dX_t^c + \int_{\mathbb{R}_+} z \mu^v(dt, dz). \quad (4.2)$$

È interessante notare come i salti sul log-prezzo Y seguono una doppia-esponenziale asimmetrica (Kou, 2002), con densità

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y<0\}},$$

con $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 0$ e $p \in (0, 1)$.

La distribuzione Double-Exponential Jump Diffusion permette di offrire un controllo indipendente della coda destra ($y > 0$) e sinistra ($y < 0$) del processo di salto, garantendo allo stesso tempo una buona tracciabilità analitica per trasformate e payoff path-dependent (Kou & Wang, 2004). In particolare, la pesantezza delle code è parametrizzata da η_1 ed η_2 , e dunque code più pesanti possono essere ottenute attraverso la scelta di un valore piccolo di η_2 , senza alterare la coda destra, e viceversa.

Tutti i momenti di Y sono finiti, mentre la funzione generatrice $M_Y(u) = \mathbb{E}[e^{uY}]$ è finita per u in un intorno di 0 determinato dai tassi di decadimento⁴³; nello specifico, η_1 assicura che $M_Y(1)$ abbia valore finito, condizione necessaria per costruire la misura risk-neutral tramite tilt di Esscher, come sarà esposto nei prossimi punti della trattazione.

Per catturare i bruschi incrementi di volatilità c.d. *event-driven*, si include in dv_t una componente *compound* Poisson con salti positivi di ampiezza z . Si assume inoltre un'intensità costante λ e una distribuzione delle ampiezze con momenti finiti (un'esponenziale troncata o una lognormale positiva) in modo da evitare esplosioni della varianza.

I salti di v sono indipendenti da quelli di S e introducono discontinuità nella varianza analoghe a quelle proposte in contesti affini da Bates, pur non sussistendo nel caso qui proposto un indissolubile vincolo alla struttura affine classica.

Il termine γ, dX_t^c fornisce un leverage effect *istantaneo* e non lineare; ad ogni variazione continua del log-prezzo, la varianza subisce un aggiustamento immediato proporzionale a γ , con il risultato di introdurre un accoppiamento diretto non affine tra S e v , addizionale

⁴³Precisamente, $M_Y(u) < \infty$ per $u \in (-\eta_2, \eta_1)$.

rispetto alla correlazione ρ presente nei modelli affini standard.

Pertanto, un movimento improvviso (ma continuo) del prezzo influenza istantaneamente la varianza, permettendo di riprodurre empiricamente spikes di volatilità più intensi e asimmetrici di quanto ottenibile con la sola correlazione⁴⁴.

Assunzioni di ben positura. Per garantire che il sistema di cui le (4.1) e (4.2) abbia soluzioni uniche e positive, si assumono le seguenti condizioni (che non si differenziano in modo particolare dalle condizioni di ben-posedness tipiche per le SDE con salti): $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\xi > 0$ e $\gamma(t)$ un processo deterministico limitato da crescita al più lineare.

Si richiede inoltre che la distribuzione dei salti di Kou ammetta momenti esponenziali in un intorno dell'unità, e dunque, come sopra menzionato, $\exists \epsilon > 0 \mid M_Y(1 + \epsilon) < \infty \wedge M_Y(1 - \epsilon) < \infty$, e che i salti di v abbiano momenti finiti. È proprio in forza delle citate condizioni che è possibile garantire sia la positività delle soluzioni⁴⁵, sia la praticabilità dei cambi di misura martingala.

4.2.3 Costruzione della misura neutrale al rischio

Dato il numéraire $B_t = e^{\int_0^t r ds}$, si vuole trovare $\mathbb{Q} \sim P$ tale che il processo scontato $e^{-\int_0^t (r-q) ds} = S_t$ sia una martingala.

In base al primo teorema fondamentale dell'asset pricing, la condizione di *non arbitraggio* equivale all'esistenza di una misura martingala equivalente \mathbb{Q} (Delbaen & Schachermayer, 1994). Per effettuare il cambio di misura, si costruisce la densità di Radon-Nikodym $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}$ come l'esponente di Doléans contenente uno shift sui termini browniani e un tilt sulle misure di salto. Nello specifico, si può definire

$$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_s dW_s^S - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \log \eta_s(y) (\mu^S(ds, dy) - \nu^S(dy) ds) \right\}, \quad (4.3)$$

dove $\lambda_t t \geq 0$ è un processo prevedibile che regola lo shift del moto browniano W^S e $\eta_t(y) t \geq 0$ è un processo positivo che effettua un tilt⁴⁶ sul compensatore dei salti di S . L'intuizione alla base è che λ_t modifichi il drift diffuso del sottostante, mentre $\eta_t(y)$ intervenga sui salti.

Sotto condizioni sufficienti di integrabilità (criteri di Novikov/Kazamaki estesi ai salti,

⁴⁴Su come questa estensione rompa la struttura affine classica dei coefficienti e sulle relative implicazioni, si discuterà in seguito.

⁴⁵Infatti, i processi di Cox-Ingersoll-Ross non esplodono sotto Feller, e i salti solo positivi non violano la barriera dello 0.

⁴⁶Cambio di misura essenzialmente esponenziale.

ossia $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds)] < \infty$ e integrabilità esponenziale delle code di salto), Z_t è una vera martingala e quindi definisce una misura \mathbb{Q} valida (Cheridito, Filipović & Yor, 2005).

La scelta naturale per preservare la famiglia a doppia esponenziale dei salti di Kou è un tilt di Esscher costante, e dunque, ponendo $\eta_t(y) \equiv \exp \vartheta y$, con ϑ parametro da determinare, la distribuzione di Y sotto \mathbb{Q} rimane invariata.

Imporre la condizione di martingalità sul prezzo scontato equivale allora a richiedere che il log-generatore cumulante dei momenti dei salti soddisfi

$$\kappa^P(\vartheta + 1) - \kappa^P(\vartheta) = r - q, \quad (4.4)$$

in cui $\kappa^P(u) = \log \mathbb{E}[e^{uY}]$ indica il log-CGF di Y sotto P . Tale relazione determina il parametro ϑ dell'Esscher tilt e assicura che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^Y - 1] = 0$, eliminando il contributo medio dei salti al drift del prezzo scontato (Gerber & Shiu, 1994).

Dato che $\kappa^P(u)$ è esplicito e continuo in u , con $\eta_1 > 1$ si ha la garanzia che esista una soluzione in $\vartheta \in (-\eta_2, \eta_1 - 1)$ per la (4.4).

Per quanto concerne la parte diffusa, è necessario scegliere il processo di deriva λ_t in modo da eliminare anche il drift continuo residuo, pertanto, osservando che sotto P il drift istantaneo scontato è $(\mu - (r - q) - \lambda_S \mathbb{E}^P[e^Y - 1])$, si impone

$$\lambda_t = \frac{\mu_t^{S,c} - (r_t - q_t) + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) (\eta_t(y) - 1) \nu^S(dy)}{\sqrt{v_t}},$$

ossia $\lambda_t = \frac{(r-q)-\mu-\lambda_S \mathbb{E}^P[e^Y-1]}{\sqrt{v_t}}$ nel caso stazionario, in modo che il drift del prezzo scontato diventi nullo. Attraverso questa scelta si trasforma W_t^S in un nuovo browniano $W_t^{S,\mathbb{Q}}$ sotto \mathbb{Q} (Girsanov per la parte continua), tuttavia, un rilevante effetto collaterale è che, a causa del termine di feedback γdX_t^c in dv_t , lo shift λ_t introduce anche una modifica nel drift della varianza sotto \mathbb{Q} .

In particolare, emerge un termine additivo $\Delta\gamma(t, v_t)$ nel drift che sintetizza l'effetto del cambio di misura sulla componente di feedback.

Sotto la misura neutrale al rischio si assume, per semplicità, che l'intensità dei salti rimanga λ_v ⁴⁷. In tal caso, la dinamica risk-neutral del modello risulta

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r - q)dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(S),\mathbb{Q}} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \tilde{\mu}^{S,\mathbb{Q}}(dt, dy), \quad (4.5)$$

⁴⁷Si rammenti che i salti di varianza non influenzano direttamente la martingalità e possono essere lasciati invariati, purché si controlli la loro integrabilità.

$$dv_t = [\kappa(\theta - v_t) + \Delta\gamma(t, v_t)]dt + \xi\sqrt{v_t}dW_t^{v, \mathbb{Q}} + \gamma dX_t^c + \int_{\mathbb{R}_+} z\mu^{v, \mathbb{Q}}(dt, dz). \quad (4.6)$$

Qui $\nu^{S, \mathbb{Q}}(dy) = \eta$, $\nu^S(dy)$ è il nuovo compensatore per i salti di S (tiltato secondo (4.4)), mentre $\tilde{\mu}^{S, \mathbb{Q}}$ e $\mu^{v, \mathbb{Q}}$ sono le misure di salto sotto la misura di rischio neutro (compensata per S , non compensata per v).

Il termine $\Delta\gamma(t, v_t)$ rappresenta lo shift extra nel drift di v indotto dal cambio di misura (la sua espressione esplicita può essere ottenuta mediante applicazione della formula di Girsanov e dipende linearmente da γ e λ_t). Nei limiti speciali $\gamma \rightarrow 0$, $\lambda_S \rightarrow 0$, $\lambda_v \rightarrow 0$, il modello sotto \mathbb{Q} si riduce esattamente alla soluzione affine di Heston (senza salti né feedback), mentre per $\gamma \rightarrow 0$ e $\lambda_S > 0$ (salti nel prezzo ma niente feedback) si ottiene il classico modello di Bates affine (Heston con salti sul sottostante), entrambi casi noti trattabili in chiuso.

4.2.4 Appartenenza alla famiglia Affine Jump-Diffusion

Al livello base (ovvero ponendo $\gamma = 0$, e trascurando dunque il termine di feedback), il modello proposto rientra pienamente nella famiglia degli Affine Jump-Diffusion in conformità a quanto descritto da Duffie, Pan e Singleton (2000). In tal caso, il vettore di stato (X_t, v_t) , con $X_t = \log S_t$, segue una dinamica a coefficienti affini, dove il drift di v_t è $\kappa(\theta - v_t)$, la sua diffusività $\xi\sqrt{v_t}$ (varianza istantanea $\xi^2 v_t$, affine in v_t), e anche il drift del log-prezzo risulta affine in v_t (pari a $r - q - \frac{1}{2}v_t - \lambda_S^\mathbb{Q}\mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^Y - 1]$, il quale si compone di una costante incrementata di un termine proporzionale a v_t).

Le intensità di Poisson λ_S , λ_v sono costanti (affini come caso particolare di funzione costante) e le distribuzioni di salto non dipendono dallo stato. Inoltre, la matrice di covarianza del rumore browniano è costante e data (in forma correlata) da

$$\text{Cov} \begin{bmatrix} dW_t^{S, \mathbb{Q}} \\ dW_t^{v, \mathbb{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} dt,$$

per cui l'intensità istantanea di varianza di (dW^S, dW^v) risulta $\text{Var}(dX_t) = v_t, dt$, $\text{Var}(dv_t) = \xi^2 v_t, dt$ e $\text{Cov}(dX_t, dv_t) = \xi\rho, v_t, dt$, coerentemente alla definizione di processo affine a due dimensioni.

È in virtù di detta affinità, che il processo ammette una funzione caratteristica in forma esponenziale affine e l'utilizzo di tecniche di trasformata (Fourier o Laplace) standard per il pricing (Bakshi & Madan, 2000).

Nel caso completo di $\gamma \neq 0$, invece, la presenza del termine di feedback dX_t^c rompe la struttura affine, in quanto la deriva della varianza istantanea dipende anche dal processo

del log-prezzo in modo non lineare, e conseguentemente, la CF non è più risolvibile mediante il ricordo alle equazioni Riccati disaccoppiate, come illustrato nella sezione 2.6, ed in generale, non esiste una soluzione chiusa per la trasformata di X_t ⁴⁸.

4.2.5 Positività della varianza e condizione di Feller

Nonostante l'esistenza di un termine non affine, il processo della varianza rimane non negativo se i parametri rispettano una condizione di Feller *adeguata*. Nel dettaglio, poiché sotto la misura di rischio neutro i browniani $W^{S,\mathbb{Q}}$ e $W^{v,\mathbb{Q}}$ sono correlati con coefficiente ρ , è possibile trovare un singolo moto browniano \widetilde{W}_t tale che una combinazione lineare riproduca entrambi, ovvero

$$\xi dW_t^{(v),\mathbb{Q}} + \gamma dW_t^{(S),\mathbb{Q}} = \sigma_{\text{eff}} dW_t, \quad \sigma_{\text{eff}}^2 := \xi^2 + \gamma^2 + 2\rho\xi\gamma. \quad (4.7)$$

La parte diffusiva di dv_t può quindi essere vista come un processo di tipo CIR con parametro di volatilità σ_{eff} al posto di ξ . I risultati classici per i processi CIR garantiscono dunque che, se

$$2\kappa\theta \geq \sigma_{\text{eff}}^2, \quad (4.8)$$

allora la varianza resta quasi certamente non-negativa per ogni t (e se $2\kappa\theta > \sigma_{\text{eff}}^2$, lo zero non è raggiungibile partendo da $v_0 > 0$, assicurando positività stretta), analogamente a quanto avviene nel modello di Heston standard con condizione di Feller $2\kappa\theta \geq \xi^2$. Inoltre, essendo i salti in v spettro-positivi, non possono mai spingere la volatilità sotto zero.

4.2.6 Estensione non affine e implicazioni sulla calibrabilità

In assenza di formule chiuse, la calibrazione del modello può essere riformulata come un problema variazionale di matching distributivo. Un modus operandi certamente degno di interesse consiste nel vedere la calibrazione come un problema di Schrödinger bridge entropico o, in linguaggio affine al settore finanziario, di Martingale Optimal Transport in tempo continuo. L'idea chiave è di considerare il modello affine di partenza come dinamica di riferimento \mathbb{Q} , con le sue distribuzioni di transizione note, e di cercare tra tutte le misure \mathbb{Q}^* , quella che minimizza la distanza dalla misura di riferimento.

In termini matematici, si tratta di risolvere un problema di ottimizzazione sotto vincoli di misura. Quindi, data \mathbb{Q} come legge del processo sotto il modello affine non calibrato,

⁴⁸Sebbene si avrà modo di illustrare ampiamente il trade-off tra chiudibilità analitica e maggiore flessibilità nel fit di mercato.

lo scopo da preporsi è quello di trovare la misura calibrata \mathbb{Q}^* che soddisfi, ad esempio, i vincoli $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[H_i(X_T)] = P_i^{\text{mkt}}$ per una collezione di payoff H_i al tempo finale T , replicando esattamente i prezzi P_i^{mkt} osservati e minimizzando al contempo la divergenza entropica rispetto a \mathbb{Q} . Un esempio di caso ideale risulta certamente

$$\mathbb{Q}^* := \arg \min_{Q' \ll \mathbb{Q}} \left\{ \mathcal{H}(Q' | \mathbb{Q}) \mid \mathbb{E}^{Q'}[H_i(X_T)] = P_i^{\text{mkt}}, \forall i, \text{ e } Q' \text{ è una misura martingala} \right\},$$

dove $\mathcal{H}(\mathbb{Q}' | \mathbb{Q})$ denota l'entropia relativa (Kullback-Leibler) di \mathbb{Q}' rispetto a \mathbb{Q} . Il vincolo di martingala, discusso più avanti, assicura che \mathbb{Q}^* rispetti l'assenza di arbitraggio (in particolare, che il prezzo scontato dell'asset sottostante resti una martingala sotto \mathbb{Q}^*). Il problema qui proposto è essenzialmente un Schrödinger bridge vincolato; pertanto, tra tutte le traiettorie probabilistiche che partono dalla legge iniziale implicita in \mathbb{Q} e arrivano alle distribuzioni coerenti coi prezzi di mercato, troviamo quella con minima entropia relativa.

Il caso classico dello Schrödinger bridge considera solo vincoli sulle distribuzioni iniziale e finale, ma qui includiamo i vincoli di martingala (da cui la denominazione martingale Schrödinger bridge) e altri eventuali vincoli di prezzo intermedi, tipici del Martingale Optimal Transport⁴⁹. In letteratura recente, Henry-Labordère (2019) ha mostrato come seguire la costruzione dello Schrödinger bridge porti a una nuova classe di modelli di volatilità stocastica esattamente calibrati agli strumenti di mercato, interpretandoli proprio come versioni martingale dello Schrödinger bridge. Analogamente, Guo, Loeper & Wang (2022) hanno formulato la calibrazione di modelli locali-stocastici come un problema di trasporto ottimale per semimartingale, risolvendo un problema convesso vincolato dai prezzi europei senza approssimazione entropica, ma inquadrandolo comunque come un problema di matching distributivo sotto vincolo di martingala.

Questa riformulazione probabilistica presenta due vantaggi cruciali, in quanto permette di trasformare il problema di calibrazione (tipicamente non lineare) in un problema di minimizzazione convessa (in particolare minimizzazione di entropia), garantendo unicità e stabilità della soluzione calibrata \mathbb{Q}^* , ed inoltre, sfruttando il riferimento affine, la soluzione eredita in buona parte la trattabilità computazionale del modello di partenza, poiché ottenuta tramite una leggera deformazione (i.e., un *tilt*) di \mathbb{Q} , non richiedendo di conseguenza la ricostruzione di un modello ex-novo.

Pertanto, il modello calibrato avrà le stesse sorgenti di casualità di quello affine originale e differirà solo per la presenza di un termine di deriva aggiuntivo che rafforza l'accordo

⁴⁹Il MOT è un'estensione del classico optimal transport di Kantorovich al caso in cui le misure di margine iniziale e finale devono essere collegate da una misura con vincolo di Martingala (che preserva quindi l'ordine convesso).

con i prezzi di mercato, e proprio questo drift risulta legato alla densità ottima del tilt entropico e può essere calcolato mediante metodi variazionali.

4.2.7 Formulazione variazionale e densità tiltata

Per formalizzare il problema di Schrödinger bridge martingala, si definisca innanzitutto l'entropia relativa Kulback-Leibler) di una generica \mathbb{Q}' rispetto a \mathbb{Q} :

$$\mathcal{H}(\mathbb{Q}' | \mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'} \left[\ln \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}} \right] \quad (4.9)$$

nella quale $\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}}$ rappresenta la derivata di Radon-Nikodym di \mathbb{Q}' rispetto alla misura di riferimento.

\mathbb{Q} può essere visto come la legge del processo X_t sotto il modello SFV affine non calibrato, e \mathbb{Q}^* come la legge cercata calibrata; il problema variazionale consiste quindi nel minimizzare $\mathcal{H}(\mathbb{Q}^* | \mathbb{Q})$ soggetto ai vincoli di calibrazione (vincoli lineari in \mathbb{Q}^* , come attese di payoff) e ai vincoli di martingala. Introducendo moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli (in particolare, λ_i per ogni vincolo di prezzo H_i e un opportuno potenziale per il vincolo di martingala), si può scrivere la funzione Lagrangiana estesa:

$$\mathcal{L}(\mathbb{Q}'; \lambda, \alpha) = \mathcal{H}(\mathbb{Q}' | \mathbb{Q}) + \sum_i \lambda_i \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'} [H_i(X_T)] - P_i^{\text{mkt}} \right) + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'} \left[\alpha_k (S_{t_k}) \left(S_{t_{k+1}} - e^{(r-q)\Delta_k} S_{t_k} \right) \right], \quad (4.10)$$

in cui i termini aggiuntivi garantiranno $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}[X_T] = X_0$ (o analoghi, se il tasso è non nullo) e più in generale la proprietà di martingala. Minimizzando \mathcal{L} rispetto a \mathbb{Q}' (e massimizzando rispetto ai moltiplicatori) si ottengono le condizioni di ottimalità. In particolare, per ogni vincolo lineare si ottiene una condizione di primo ordine che implica che la densità ottima $\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}}$ è esponenziale nei payoff vincolati.

Nello specifico, imponendo vincoli solo sulla distribuzione finale $X_T \sim \nu_{\text{target}}$ e sul vincolo di martingala, la soluzione ha la forma classica delle soluzioni di Schrödinger:

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} \propto \exp \left\{ -\Phi(X_T) \right\}, \quad (4.11)$$

dove $\Phi(x)$ è un potenziale (funzione di penalità) tale che forzando questa forma, la legge marginale di X_T sotto \mathbb{Q}^* diventa proprio ν_{target} . Più in generale, per vincoli multipli, $\Phi(x)$ sarebbe una combinazione lineare dei payoff (ossia $\Phi(x) = \sum_i \lambda_i G_i(x)$ per opportuni G_i) più eventualmente un termine dipendente da x che aggiusta la condizione di martingala.

Un modo equivalente e più illuminante di rappresentare la soluzione è tramite un processo h_t tiltante (Doob h-transform). Definiamo la densità martingala:

$$h_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

che per $t = T$ soddisfa $h_T = \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T}$ e in $t = 0$ vale $h_0 = \mathbb{E}\mathbb{Q}[d\mathbb{Q}^*/d\mathbb{Q}] = 1$ (per conservazione della probabilità). Per costruzione h_t è un processo \mathbb{F} -martingala sotto \mathbb{Q} , positivo, spesso chiamato doob density o h-process. Allora la nuova misura \mathbb{Q}^* calibrata si può esprimere in forma tiltata rispetto a \mathbb{Q} tramite h , ossia:

$$d\mathbb{Q}^* \Big|_{\mathcal{F}_t} = h_t d\mathbb{Q} \Big| \mathcal{F}_t, \quad (4.12)$$

per ogni t (in particolare al tempo finale recuperiamo $d\mathbb{Q}^*|_{\mathcal{F}_T} = h_T d\mathbb{Q} \mid \mathcal{F}_T$). Questa espressione mostra che \mathbb{Q}^* è assolutamente continua rispetto a \mathbb{Q} (come richiesto) e individua esplicitamente la densità del cambiamento di misura fino al tempo t .

L'introduzione di h_t risulta molto utile perché permette di caratterizzare direttamente la dinamica sotto la misura calibrata \mathbb{Q}^* . In particolare, se sotto \mathbb{Q} il processo X_t soddisfa $dX_t = b(X_t), dt + \sigma(X_t), dW_t^{\mathbb{Q}}$ (dinamica di riferimento), allora sotto \mathbb{Q}^* valgono le formule di Girsanov

$$dW_t^{\mathbb{Q}^*} = dW_t^{\mathbb{Q}} - \theta_t dt, \quad (4.13)$$

con θ_t definito come il processo di market price of risk indotto dalla densità h_t . In effetti, differenziando h_t si trova che h_t soddisfa una SDE la cui parte di martingala è proporzionale a $h_t, \theta_t^\top dW_t^{\mathbb{Q}}$. Da questo, la drift correction sul processo X si determina come $\sigma(X_t)\theta_t$ (componentwise). Più precisamente, la dinamica di X_t sotto \mathbb{Q}^* risulta:

$$dX_t = b(X_t), dt + \sigma(X_t), dW_t^{\mathbb{Q}^*} + \underbrace{\sigma(X_t), \sigma^\top(X_t), \nabla_x \ln h_t(X_t), dt}_{\text{drift di feedback}}, \quad (4.14)$$

dove il termine finale rappresenta l'extra-drift indotto dal tilt h .

Quest'ultimo è proprio il termine di feedback non affine precedentemente introdotto ora analizzato con maggior formalismo, e che può essere rigorosamente identificato con $\gamma_t = \sigma(X_t), \sigma^\top(X_t), \nabla_x \ln h_t(X_t)$, che quindi dipende sia dal tempo sia dallo stato (e indirettamente dagli obiettivi di calibrazione impostati tramite h). È chiaro che questo drift aggiuntivo, derivato dalla densità entropica ottima, non possa risultare affine in X_t (tranne casi degeneri), confermando pertanto che \mathbb{Q}^* appartiene a una classe di modelli non affini.

Tuttavia, tale drift è costruito in modo molto strutturato, e garantisce che \mathbb{Q}^* rispetti tutti i vincoli di calibrazione impostati ed in particolare, agisce per forzare il log-prezzo sulle distribuzioni target e correggere la tendenza del processo affinché rimanga una martingala.

4.2.8 Vincolo di martingala e struttura dell' h -processo

Un aspetto cruciale nella costruzione sopra è il vincolo di martingala. In un contesto di pricing risk-neutral, questo vincolo assicura che il processo scontato del sottostante (o dell'indice considerato) rimanga una martingala sotto la nuova misura calibrata \mathbb{Q}^* .

Dal punto di vista dei vincoli di misura, ciò implica che le leggi marginali di X_t debbano rispettare la condizione di coerenza martingala, tipicamente espressa come un vincolo sul momento primo: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[X_T \mid X_0 = x] = x$ (in assenza di tasso, oppure $= xe^{rT}$ in presenza di tasso r costante).

Nel caso di calibrazione a più scadenze o a prodotti dipendenti dal tempo, occorre garantire l'assenza di arbitraggio non solo marginalmente, ma lungo l'intero term-structure di distribuzioni calibrate. In termini di MOT, questo equivale a richiedere che le misure margine calibrate (μ_0, μ_T, \dots) soddisfino le relazioni di ordine convesso necessarie e sufficienti affinché esista un processo martingala con quelle distribuzioni

Nella formulazione entropica, il vincolo di martingala entra naturalmente attraverso la scelta del tilt, infatti, se ci limitassimo a imporre vincoli sulle distribuzioni marginali finali senza però curarci della martingalità, potremmo trovare una misura Q^* che riproduce tali margini, ma che non è risk-neutral.

Alcuni lavori precedenti alla formalizzazione del vincolo di martingala incorsero in questo problema; ad esempio, riprendendo la precedente citazione, Henry-Labordère notò che approcci di calibrazione basati su ponti stocastici senza il vincolo di martingala producessero drift incoerenti (diversi dal tasso privo di rischio) e dunque modelli con arbitraggio.

Per evitare ciò, nel problema variazionale qui esposto si è imposta esplicitamente la condizione che \mathbb{Q}^* preservi la martingala. Operativamente, ciò corrisponde ad aggiungere alla Lagrangiana un termine di vincolo (o una penalità) che imponga $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}[X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T]$ (e analoghi su eventuali scadenze intermedie).

Nel contesto dell' h -processo, questa condizione si riflette nelle proprietà della funzione h_t : in particolare, h_t deve essere scelta in modo da non alterare il drift “risk-neutral” del sottostante. Nel caso semplice in cui calibrassimo solo la distribuzione finale, questo si tradurrebbe nel vincolo di normalizzazione su h_T , $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T h_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_0]$, il quale garantirebbe per \mathbb{Q}^* la condizione $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[X_T] = X_0$.

Più in generale, la struttura dell' h -processo calibrato deve quindi risultare tale che il Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}}$ abbia media condizionata 1 non solo al tempo finale ma lungo tutto il percorso, proprietà che risulta automaticamente soddisfatta se h_t è definito come $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[d\mathbb{Q}^*/d\mathbb{Q} | \mathcal{F}_t]$, sebbene si debba prestare attenzione a come i vincoli multipli vadano a determinare h_T .

Analizzando l'equazione del drift sotto \mathbb{Q}^* , si noti come il vincolo di martingala impone che $\sigma(X_t)\sigma^\top(X_t)\nabla_x \ln h_t(X_t)$ sia pari al **gradiente di un potenziale armonico**.

Pertanto, in altri termini, affinché X_t resti una martingala, la funzione $h(t, x)$ introdotta deve soddisfare una particolare equazione alle derivate parziali legata all'operatore generatore L di X sotto \mathbb{Q} , tipicamente una equazione di Poisson o di Hamilton-Jacobi-Bellman associata al problema duale di calibrazione.

Nella costruzione dello Schrödinger bridge, suddetta condizione si manifesta come parte del sistema di Schrödinger, e quindi accanto all'equazione di Kolmogorov forward per la densità, compare un'equazione backward per il potenziale h tale che il prodotto $\varphi(t, x)\psi(t, x)$ fornisce la densità ottima e φ, ψ soddisfano equazioni di tipo HJB accoppiate. Imporre il vincolo di martingala significa che tali equazioni includono termini di correzione per la deriva assenti nel caso standard. Ad esempio, Guyon (2022) mostra che, nel caso di calibrazione congiunta di SPX e VIX, l'extra-drift nella volatilità risulta path-dependent e può essere calcolato esplicitamente tramite la soluzione di equazioni di HJB duali, la cui derivata fornisce esattamente la differenza tra prezzi di mercato e di modello.

4.2.9 Procedura di calibrazione con regolarizzazione entropica

Con riferimento all'implementazione computazionale del modello in analisi, la calibrazione viene impostata come un problema variazionale che combina fitting ai prezzi/IV con un vincolo distribuzionale espresso tramite trasporto ottimale entropico (nello specifico, ci si serve di un algoritmo di Sinkhorn) tra la legge terminale simulata del sottostante e la risk-neutral density ricostruita dallo smile, a cui si addizionano i vincoli strutturali (condizioni di martingalità e Feller) e la regolarizzazione parametrica.

Si definiscano il vettore dei parametri Θ e l'insieme delle scadenze calibrate τ , in accordo ai quali la funzione obiettivo può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta) = & \sum_{T \in \tau} \text{RMSE}_{\text{mkt}}(\Theta) + \lambda_{\text{SK}} \sum_{T \in \tau} \mathcal{S}_\varepsilon(\pi_\Theta^{(T)}, \hat{\pi}^{(T)}) \\ & + \nu \sum_{T \in \tau} (\mathbb{E}_\Theta[S_T] - F_T)^2 + \xi (\sigma_{\text{eff}}^2 - 2\kappa\theta) + \eta \|\Theta - \Theta^{(0)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con $\sigma_{\text{eff}}^2 = \xi^2 + \gamma^2 + 2\rho\xi\gamma$ ⁵⁰ il termine S_ε è calcolato con iterazione di Sinkhorn su griglie 1D in $x = \log S$, con kernel $K = \exp(-C/\varepsilon)$ e costo $C_{ij} = (x_i - x_j)^2$; la convergenza esponenziale dello scaling entropico nel quadro EMOT (Entropic MOT) assicura stabilità della proiezione multi-marginale (Joseph, Loeper & Obloj, 2024).

Data una griglia $x^{(T)} = (x_k)_{k=1}^n$ e due istogrammi $p, q \in \Delta_n$ (rispettivamente, la legge empirica del log-prezzo simulato e la RND target), il costo empirico risulta pari a

$$S_\varepsilon(p, q; x); =; \min_{\Pi \in \mathbb{R}_+^{n \times n}} \left\{ \sum_{i,j} \Pi_{ij}, C_{ij} + \varepsilon \sum_{i,j} \Pi_{ij} (\log \Pi_{ij} - 1) \right\} \Pi \mathbf{1} = q, \Pi^\top \mathbf{1} = p, \quad C_{ij} = (x_i - x_j)^2, \quad (4.16)$$

la cui soluzione ha forma

$$\Pi^* = \text{diag}(u) K \text{diag}(v), K = \exp(-C/\varepsilon),$$

con (u, v) ottenuti per scaling alternato ($u \leftarrow p/(Kv), v \leftarrow q/(K^\top u)$). Il vincolo di martingala entra nella 4.15 come

$$\text{Mart}(\Theta) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\frac{\mathbb{E}_\Theta[S_T] - F_T}{F_T} \right)^2, \quad (4.17)$$

che forza $\mathbb{E}_\Theta \approx F_T$ a livello numerico, mentre la condizione di Feller penalizza le violazioni della positività del canale v_t .

Infine, la regolarizzazione Tikhonov stabilizza i parametri collineari (*in primis* γ, λ_S e λ_V).

Volendo trattare con maggior dettaglio tecnico l'implementazione computazionale della procedura di calibrazione qui descritta, si premette che essa segue, almeno in prima battuta, il medesimo modus operandi adottato per il modello di Heston tradizionale (alla cui descrizione si richiama la sezione precedente), in accordo al quale si impone una calibrazione globale (Differential Evolution), seguita da un polishing locale L-BFGS-B, con pesi vega e di liquidità nella loss sui prezzi e sulla volatilità implicita.

Per ogni scadenza, la procedura seleziona gli strike in banda ATM, calcola la IV di mercato, e costruisce i pesi

```
w_vega = 1.0 / (vega + 1e-8)
w_liq = np.sqrt(oi + vol + 1.0)
w_pre = normalize(w_vega * w_liq)
```

Listing 18: Calcolo dei pesi finali per MSE.

⁵⁰Si precisa che in tale contesto ξ si riferisce al peso di penalizzazione, e non alla vol-of-vol come nel capitolo precedente.

Questa ponderazione ($\text{vega} \times \text{liquidità}$) stabilizza il fitting penalizzando meno gli strike OTM a bassa sensibilità e rumorosi. L'attivazione della regolarizzazione entropica permetterebbe, per ciascun T , di ricostruire $\hat{\pi}^{(T)}$ sulla griglia unidimensionale in x .

```
x_grid, pi_hat = build_rnd_target_from_smile(slc, bins=
    sinkhorn_bins, space='logS')
slc['rnd_grid'] = x_grid
slc['rnd_target'] = pi_hat
```

Listing 19: Costruzione RND target.

In rapporto alla funzione obiettivo `obj_sfv`, si può notare come, per ogni scadenza, essa simuli S_T attraverso `simulator`, il wrapper della funzione di pricing `sfv_simulate_paths_vectorized`, e successivamente calcoli i prezzi vanilla

```
ST = simulator(theta, T=T, M=M_paths, dt=min(dt_min, T/256), crn=
    crn)
Pmod = pricer(ST, K, r=r, q=q, T=T)
loss_price += np.mean(w_pre * (Pmod - Pmkt)**2)
if use_iv and pricer_iv:
    IVmod = pricer_iv(Pmod, K, F_T, T)
    loss_iv += np.mean(w_pre * (IVmod - IVmkt)**2)
```

Listing 20: Calcolo dei prezzi per scadenza.

Successivamente, se la risk neutral density target è disponibile nello slice e la variabile `sinkhorn_scale` assume valori maggiori di 0, la funzione costruisce l'istogramma empirico sulla griglia `rnd_grid`, normalizza il target e chiama la funzione anonima `_sinkhorn_distance_1d`

```
if sinkhorn_scale > 0.0 and 'rnd_grid' in slc and 'rnd_target' in
    slc:
    x_grid = slc['rnd_grid']
    pi_tgt = slc['rnd_target'] / (slc['rnd_target'].sum() + 1e
        -16)
    x_samp = np.log(np.maximum(ST, 1e-300)) if sinkhorn_space ==
        'logS' else ST
    p_emp = _hist_from_samples(x_samp, x_grid, density=True)
    loss_sinkhorn += _sinkhorn_distance_1d(p_emp, pi_tgt, x_grid,
        eps=sinkhorn_eps, n_iter=500, tol=1e-9)
```

Listing 21: Costruzione della griglia unidimensionale.

È proprio `_sinkhorn_distance_1d` ad implementare lo scaling di Sinkhorn con il (già definito) kernel $K = \exp(-C/\varepsilon)$, $C_{ij} = (x_i - x_j)^2$, restituendo il costo entropico S_ε , o, in altri termini, realizzando l'ancora distribuzionale dello Schrödinger bridge⁵¹. Assume particolare rilevanza il rispetto della citata condizione di Feller (definita *soft*, per distinguerla dalla tradizionale forma adottata in rapporto al caso di Heston classico)

```
pars = param_extract(theta)
kappa, th, xi, gamma = pars['kappa'], pars['theta'], pars['xi'],
                      pars['gamma']
sigma_eff2 = xi*xi + gamma**2 + 2.0*rho*xi*gamma
feller_soft = max(0.0, sigma_eff2 - 2.0*kappa*th)
```

Listing 22: Condizione di Feller

Infine, tutti i contributi qui descritti, vengono combinati per mezzo della variabile `total`.

Per quanto concerne la calibrazione in senso stretto, la funzione `calibrate_sfv`, analogamente al caso precedente, costruisce un callable sull'obiettivo e lo ottimizza con l'uso di Differential Evolution, per attuare un'esplorazione globale su bound prefissati, ed in seguito rifinisce localmente attraverso L-BFGS-B. Anche in questo caso, è previsto il meccanismo di fallback basato su Powell.

4.2.10 Analisi dei risultati

In prossimità della conclusione di questo elaborato, si vuole fornire una dimostrazione *sul campo* di quelle che possono essere le capacità predittive del modello, in uno scenario nel quale è possibile dimostrare la sua maggiore precisione.

Nello specifico si è scelto di riportare qui l'esito del test effettuato in data 15 settembre 2025 sull'opzione call TSLA con scadenza fissata al 19 dello stesso mese (dunque, si noti, una scadenza particolarmente ravvicinata e un sottostante fortemente volatile, e dunque uno skew reattivo e code pronunciate).

Si precisa che, anche in questo caso viene adottato il meccanismo di filtraggio dei risultati di cui alla sezione 3.2, i cui aspetti fondanti sono già stati descritti in suddetta sezione, alla quale si rimanda.

⁵¹E, grazie ai risultati EMOT, fornisce stabilità e assicura la convergenza dello scaling.

SELECTED strikes — RMSE Heston: 0.2543 · SFV: 0.1938 · BS: 2.0187 · CRR: 2.0186 · MC_BS: 2.0174																
K	T	Market	Heston	SFV	BS	CRR	MC_BS	SQError_Heston	SQError_SFV	SQError_BS	SQError_CRR	SQError_MC_BS	IV	Intrinsic		
0	360.00	0.020	62.08	62.12	62.29	63.01	63.01	63.03	0.0018	0.0443	0.8675	0.8658	0.9152	0.718	62.030433	
1	362.50	0.020	59.62	59.65	59.80	60.60	60.60	60.63	0.0006	0.0310	0.9534	0.9516	1.0045	0.707	59.532540	
2	365.00	0.020	57.33	57.19	57.32	58.47	58.47	58.51	0.0183	0.0000	1.3195	1.3199	1.3986	0.730	57.034648	
3	367.50	0.020	55.15	54.74	54.86	56.54	56.54	56.58	0.1659	0.0857	1.9203	1.9215	2.0368	0.766	54.536755	
4	370.00	0.020	52.65	52.31	52.40	54.02	54.02	54.06	0.1153	0.0623	1.8765	1.8762	1.9878	0.736	52.038862	
5	372.50	0.020	49.90	49.90	49.96	51.07	51.07	51.11	0.0000	0.0037	1.3714	1.3707	1.4538	0.661	49.540969	
6	375.00	0.020	47.47	47.50	47.54	48.69	48.69	48.72	0.0008	0.0048	1.4691	1.4679	1.5567	0.646	47.043077	
7	377.50	0.020	45.15	45.14	45.16	46.47	46.47	46.50	0.0001	0.0000	1.7303	1.7302	1.8239	0.646	44.545184	
8	380.00	0.020	43.02	42.80	42.80	44.54	44.54	44.58	0.0495	0.0517	2.3074	2.3075	2.4033	0.668	42.047291	
9	382.50	0.020	40.60	40.50	40.48	42.13	42.13	42.16	0.0094	0.0151	2.3557	2.3518	2.4460	0.645	39.549398	
10	385.00	0.020	38.33	38.24	38.20	39.95	39.95	39.97	0.0064	0.0154	2.6293	2.6311	2.7177	0.639	37.051506	
11	387.50	0.020	36.38	36.03	35.98	38.21	38.21	38.23	0.1168	0.1577	3.3791	3.3811	3.4554	0.662	34.553613	
12	390.00	0.020	34.10	33.87	33.81	35.99	35.99	36.00	0.0512	0.0831	3.5648	3.5648	3.6222	0.647	32.055720	
13	392.50	0.020	32.22	31.77	31.70	34.30	34.30	34.31	0.2052	0.2719	4.3087	4.3090	4.3413	0.663	29.557827	
14	395.00	0.020	30.00	29.73	29.66	32.11	32.11	32.11	0.0712	0.1129	4.4589	4.4555	4.4702	0.646	27.059935	
15	397.50	0.020	28.20	27.76	27.69	30.47	30.47	30.46	0.1916	0.2592	5.1423	5.1457	5.1122	0.657	24.562042	
16	400.00	0.020	25.93	25.86	25.79	28.18	28.18	28.17	0.0037	0.0172	5.0811	5.0848	5.0263	0.631	22.064149	
17	402.50	0.020	23.88	24.04	23.98	26.17	26.17	26.15	0.0280	0.0104	5.2646	5.2581	5.1722	0.618	19.566256	
18	405.00	0.020	22.32	22.30	22.24	24.77	24.77	24.73	0.0006	0.0079	5.9609	5.9608	5.7918	0.633	17.068364	
19	410.00	0.020	18.98	19.07	19.01	21.55	21.55	21.50	0.0086	0.0015	6.6317	6.6286	6.3773	0.631	12.072578	
20	415.00	0.020	16.10	16.18	16.13	18.80	18.80	18.75	0.0060	0.0012	7.2956	7.2857	7.0022	0.638	7.076793	
21	420.00	0.020	13.65	13.63	13.59	16.44	16.44	16.38	0.0003	0.0036	7.7934	7.7828	7.4386	0.651	2.081007	

Figura 13: Test su TSLA Call 19/09/2025 (primi 21 strike).

Nel test in analisi emerge con chiarezza una gerarchia predittiva, in accordo alla quale il modello a volatilità stocastica con feedback ottiene l'RMSE medio più basso (≈ 0.1938), seguito da Heston (≈ 0.2543), mentre i modelli a volatilità costante (BS, CRR e MC) rimangono staccati di un ordine di grandezza (≈ 2.02), segnale inequivocabile dell'inabilità della volatilità piatta di riprodurre la pendenza dello smile e la curvatura nelle ali in prossimità di scadenze corte. Limitatamente a questi tre modelli, si denota lo sviluppo della citata convergenza, localizzata nello specifico su una crescita monotonica nel frattempo che ci si allontana dalla zona ATM.

Il confronto SFV vs Heston è più sottile e interessante. Qui la riduzione dell'RMSE di SFV rispetto a Heston è nell'ordine del 24%, ma soprattutto si osserva una struttura degli errori per strike coerente con le rispettive meccaniche. Specificamente, nelle righe centrali (near-ATM) i due modelli sono spesso comparabili, con scarti quadratici dell'ordine di $10^{-3} - 10^{-2}$, e piccoli vantaggi locali che talvolta premiano Heston (per esempio negli strike 392.5 e 395), sintomo che il solo meccanismo leverage-correlazione ($\rho < 0$) è talora sufficiente a catturare micro-asimmetrie del sorriso a strike ravvicinati.

Tuttavia, spostandosi verso zone ITM/OTM, le componenti di feedback e salto dello SFV, forniscono un adattamento sistematicamente migliore delle ali, come dimostrano gli errori quadratici del modello proposto, i quali rimangono contenuti e più stabili, mentre quelli di Heston mostrano una deriva graduale, tipica dei processi affini *lisci* quando devono

spiegare payoffs dominati da grandi deviazioni in orizzonti corti.

In rapporto ai livelli di prezzo, le colonne Market-Heston-SFV rivelano un bias moderato e omogeneo su diverse righe (errori assoluti radice $\approx 0.1 - 0.5$) e, cosa importante per la previsione OOS, assenza di overshoot sistematico per SFV nelle ali. Infatti, laddove BS/CRR/MC-BS sottoprezzano in massa (per via della IV piatta), SFV mantiene deviazioni quadratiche di ordine unitario minore e non accumula errore con la stessa velocità su K crescenti.

La colonna IV, elevata e leggermente decrescente da 0.72 a 0.65 (approssimativamente), conferma un contesto event-driven a volatilità realizzata attesa alta, in cui la forma dello smile è cruciale. Qui Heston beneficia della correlazione negativa per generare skew, ma SFV aggiunge gradi di libertà dinamici che migliorano la reattività locale dello smile e la curtosì risk-neutral a breve, traducendosi in un vantaggio predittivo medio consistente.

Riferimenti bibliografici

- [1] Andersen, L. (2008). *Simple and Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*. Journal of Computational Finance, Volume 11(3), pp. 1-42.
- [2] Bates, D.S. (1996). *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*. Review of Financial Studies, Volume 9(1), pp. 69-107.
- [3] Black, F., Scholes M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, Volume 81(3), pp. 637-654.
- [4] Boyle, P. P. (1977). *Options: A Monte Carlo Approach*. Journal of Financial Economics, Volume 4(3), pp. 323-338.
- [5] Breeden, D. T., Litzenberger, R. H. (1978). *Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices*. Journal of Business, 51(4), pp. 621-651.
- [6] Buraschi, A., Dumas, B. (2001). *The Forward Valuation of Compound Options*. The Journal of Derivatives, Volume 9(1), pp. 8-17.
- [7] Carr, P., Madan, D. B. (1999). *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*. Journal of Computational Finance, Volume 2(4), pp. 61-73.
- [8] Cheridito, P., Filipović, D., Yor, M. (2005). *Equivalent and Absolutely Continuous Measure Changes for Jump-Diffusion Processes*. Annals of Applied Probability, Volume 15(3), pp. 1713-1733.
- [9] Cox, J. C., Ross, S.A. (1976). *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*. Journal of Financial Economics, Volume 3(1-2), pp. 145-166.
- [10] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979) *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, Volume 7(3), pp. 229-263.
- [11] Delbaen, F., Schachermayer, W. (1994). *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Mathematische Annalen, Volume 300, pp. 463-520.
- [12] Duffie, D., Pan J., Singleton, K. (2000), *Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions*. Econometrica, Volume 68(6), pp. 1343-1376.
- [13] Fang, F., Oosterlee, C. W. (2009). *A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions*. SIAM Journal on Scientific Computing, Volume 31(2), pp. 826-848.

- [14] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1994). *Option Pricing by Esscher Transforms*. Transactions of the Society of Actuaries, Volume 46, pp. 99-191.
- [15] Geske, R. (1979). *The Valuation of Compound Options*. Journal of Financial Economics, Volume 7(1), pp. 63-81.
- [16] Glasserman, P. (2004) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (1st ed.). Springer, pp. 35-60.
- [17] Guo, I., Loeper, G., Wang, S. (2022). *Calibration of Local-Stochastic Volatility Models by Optimal Transport*. Mathematical Finance, Volume 32(1), pp. 46-77.
- [18] Harrison, J. M., Kreps, D.M. (1979). *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. Journal of Economic Theory, Volume 20(3), pp. 381-408.
- [19] Harrison, J. M., Pliska, S.R. (1981). *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*. Stochastic Processes and their Applications, Volume 11(3), pp. 215-260.
- [20] Henry-Labordère, P. (2019). *From (Martingale) Schrödinger Bridges to a New Class of Stochastic Volatility Models*. arXiv:1904.04554v1.
- [21] Hess, M. (2022). *Pricing an Option written on an Option*. SSRN.
- [22] Heston, S.L. (1993). *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. Review of Financial Studies, Volume 6(2), pp. 327-343.
- [23] Joseph, B., Loeper, G., Obloj, J. (2024). *The Measure-Preserving Martingale Sinkhorn Algorithm*. arXiv:2310.13797v3.
- [24] Kahl, C., Jäckel, P. (2005). *Not-so-complex logarithms in the Heston model*. Wilmott Magazine, 2005(9), pp. 94-103.
- [25] Lamoureux, C.G., Lastrapes, W.D. (1993). *Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities*. Review of Financial Studies, Volume 6(2), pp. 293-326.
- [26] Lewis, A. L. (2001). *A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and Other Exponential Lévy Processes*. SSRN.
- [27] Longstaff, F. A., Schwartz, E.S. (2001). *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*. Review of Financial Studies, Volume 14(1), pp. 113-147.

- [28] Lord, R., Kahl, C. (2010). *Complex logarithms in Heston-like models*. Mathematical Finance, Volume 20(4), pp. 671-694.
- [29] Malz, A. M. (2014). *A Simple and Reliable Way to Compute Option-Based Risk-Neutral Distributions*. Federal Reserve Bank of New York, Staff Report No. 677.
- [30] Mathews, S., Datar, V., Johnson, B. (2007). *A Practical Method for Valuing Real Options: The Boeing Approach*. Journal of Applied Corporate Finance, Volume 19(2), pp. 95-104.
- [31] Merton R.C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science, Volume 4(1), pp. 141-183.
- [32] Rubinstein, M., Reiner, E. (1991). *Breaking down the barriers*. Risk Magazine, Volume 4(8), pp. 28-35.
- [33] Sahalia, A., Kimmel, R. (2007). *Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models*. Journal of Financial Economics, Volume 83, pp. 413-452.
- [34] Schwartz, E. S. (1977). *The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach*. Journal of Financial Economics, Volume 4(1), pp. 79-93.
- [35] Wiener, N. (1923). *Differential-Space*. Journal of Mathematical Physics (ora confluito nelle Transactions of the American Mathematical Society), Volume 2(1), pp. 131-174.

INFORMAZIONI AGGIUNTIVE: Il codice completo utilizzato per l'analisi dei dati è disponibile presso la repository GitHub dedicata.
