



Corso di laurea in Economia e Finanza,
Banche e Intermediari Finanziari

Cattedra: Computational Tools For Finance

Asset Allocation Dinamica: integrazione del
segnale Momentum nel
Modello Black–Litterman

Prof. Valerio Marchisio
RELATORE

Prof. Ugo Pomante
CORELATORE

781621
CANDIDATO

Anno accademico 2024/2025

Sommario

Introduzione.....	5
1 Asset Allocation e Teoria Moderna del Portafoglio (MPT).....	8
1.1 Il modello media-varianza di Markowitz	8
1.1.1 Modello media-varianza	9
1.1.2 Il portafoglio di minima varianza e la frontiera efficiente	17
1.1.3 Selezione del portafoglio ottimale in base alle preferenze dell'investitore.....	19
1.2 Estensione della Teoria Moderna del Portafoglio attraverso il CAPM.....	21
1.2.1 Assunzioni del CAPM	22
1.2.2 Il CAPM	23
1.3 Limiti del modello di Markowitz.....	26
2 Il Modello Black-Litterman (B&L).....	30
2.1 Ipotesi del modello	32
2.2 Ottimizzazione inversa	33
2.3 Osservazioni degli investitori.....	37
2.4 Regola di Bayes e inferenza bayesiana	39
2.4.1 La Distribuzione a Priori (Prior Distribution)	40
2.4.2 La Distribuzione Condizionale (Likelihood).....	41
2.4.3 La Distribuzione a Posteriori (Posterior Distribution).....	44
2.4.4 L'Ottimizzazione Finale e la Determinazione dei Pesi del Portafoglio.....	46
2.5 Criticità e problematiche del modello.....	47
3 Costruzione di un Indicatore di Momentum Sintetico	48
3.1 Il Fattore Momentum	48
3.1.1 Fattore Momentum nei modelli razionali	49
3.1.2 Fattore Momentum nella finanza comportamentale	50
3.2 L'indicatore Momentum.....	52
3.2.1 Relative Strength Index (RSI).....	53
3.2.2 Money Flow Index (MFI)	55
3.2.3 Percent B (%B) di Bollinger.....	56
3.2.4 Ultimate Oscillator (UO)	58
3.2.5 Oscillatore Stocastico RSI (Stochastic RSI).....	60
3.3 La logica della selezione degli indicatori	60
4 Metodologia Empirica e Design del Backtest.....	62
4.1 Universo di Investimento, Dati e Periodo di Analisi.....	62
4.1.1 Universo di investimento	62
4.1.2 Dati e Periodo di analisi	63
4.2 I portafogli a confronto	68
4.3 Costruzione del Modello Black-Litterman informato dall'indicatore Momentum: Segnale, Views e Parametri.....	71
4.3.1 L'Indicatore Sintetico "Momentum(5)"	71
4.3.2 Il vettore "Q "	75
4.3.3 La Matrice di varianza-covarianza Σ	78
4.3.4 Il tasso risk free	81

4.3.5 La stima dell'avversione al rischio (δ)	83
4.3.6 Il parametro Tau (τ)	85
4.3.7 Calcolo dei Rendimenti di Equilibrio: la Prior (Π).....	86
4.3.8 La matrice link (P)	88
4.3.9 La Matrice dell'Incertezza (Ω).....	89
4.4 L'Ottimizzazione Finale: Calcolo dei Pesi e Vincoli di Portafoglio	91
4.5 La meccanica del Backtest	95
4.5.1 Il Framework Temporale	95
4.5.2 Il Processo di Ribilanciamento: dalla Stima all'Allocazione	96
4.5.3 Realismo Operativo e Valutazione.....	97
5 Analisi dei Risultati.....	102
5.1 Analisi delle Metriche di Performance Aggregate.....	102
5.2 Analisi dell'Equity Line.....	104
5.3 Analisi del Track Record Annuale e delle perdite (drawdown).....	109
5.4 Analisi dei costi di transazione	111
5.5 Conclusioni.....	112
SITOGRAFIA.....	114
Immagini:	117
APPENDICE (CODICE PYTHON)	118

Introduzione

Nell'attuale contesto dei mercati finanziari, caratterizzato da crescente complessità e rapidi cambiamenti di regime, il dibattito tra gestione attiva e passiva del portafoglio rimane più acceso che mai. Le strategie passive, come il Buy & Hold, offrono un'esposizione al mercato a basso costo, dimostrandosi spesso vulnerabili a shock improvvisi e incapaci di capitalizzare sulle anomalie di mercato. Al contrario, la gestione attiva tradizionale fatica a giustificare i suoi costi più elevati, con la maggior parte dei gestori che non riesce a sovraperformare costantemente i propri benchmark di riferimento.

Questa tesi si inserisce in tale dibattito con l'obiettivo di esplorare una terza via: un approccio di asset allocation dinamica che combina la disciplina di un modello quantitativo con la reattività di un segnale di mercato sistematico. Il presente lavoro sviluppa e testa un framework innovativo che integra uno degli effetti più robusti e persistenti documentati in letteratura finanziaria, il fattore Momentum, all'interno del sofisticato modello di Black-Litterman.

Il contributo principale di questa ricerca risiede nella costruzione di un indicatore di Momentum sintetico, il "Momentum(5)", che aggrega cinque diversi oscillatori tecnici per catturare una visione multidimensionale della forza di un trend. Questo indicatore non agisce come un semplice filtro, ma come un vero e proprio motore per la generazione di views quantitative, superando così una delle principali criticità del modello Black-Litterman: la sua dipendenza da previsioni soggettive e discrezionali. Le views, derivate empiricamente dalla relazione storica tra lo score dell'indicatore e i rendimenti futuri, vengono poi integrate con i rendimenti di equilibrio del mercato attraverso l'approccio bayesiano del modello. In questo modo, il modello viene trasformato in una strategia sistematica e replicabile, che fonda le sue decisioni su un segnale data-driven.

Dall'integrazione del segnale Momentum all'interno del Modello Black-Litterman vengono generati due varianti di portafogli attivi che risponderanno ai rispettivi profili di rischio degli investitori: un portafoglio "Neutrale" (chiamato BL Neutrale), che adotta il profilo di rischio del mercato ed è orientato a massimizzare l'efficienza e la protezione del capitale, ed un portafoglio "Aggressivo" (riportato come BL Aggressivo) che, in

coerenza con la natura trend-following del Momentum, riduce l'avversione al rischio per capitalizzare in modo più deciso sui segnali generati, con l'obiettivo di massimizzare l'alfa potenziale. Le performance realizzate da questi due portafogli saranno confrontate con un terzo portafoglio, il Buy and Hold (BH) composto da tutti i top 20 titoli dell'S&P 500 ponderati per la loro capitalizzazione, che manifesta una strategia di investimento passiva e che sarà il banchmark di riferimento in questa ricerca.

Attraverso un rigoroso backtest condotto su un universo dei 20 titoli più capitalizzati dell'S&P 500 dal 2012 al 2024, questa tesi si propone di dimostrare come un'allocazione dinamica, informata e disciplinata possa offrire un profilo di rischio-rendimento superiore a un approccio puramente passivo. Per raggiungere tale obiettivo, il lavoro è strutturato come di seguito.

Il primo capitolo introduce le fondamenta teoriche della gestione di portafoglio, partendo dal modello media-varianza di Markowitz e dalla sua estensione con il CAPM, evidenziandone le criticità operative che aprono la strada a soluzioni più evolute.

Nel secondo capitolo vengono superate le problematiche operative del modello di Markowitz attraverso l'introduzione del modello Black-Litterman, illustrando l'approccio innovativo di quest'ultimo che si basa sull'ottimizzazione inversa e sulla sua architettura bayesiana.

Il terzo capitolo presenta il principale elemento di innovazione di questa ricerca: la costruzione dell'indicatore sintetico di Momentum "Momentum(5)", ottenuto aggregando i cinque oscillatori tecnici: RSI, MFI, Ultimate Oscillator, Stochastic RSI e Bollinger %B. Questi indicatori sono stati scelti appositamente per catturare la visione completa del Momentum di mercato attraverso l'analisi delle sue quattro dimensioni fondamentali: prezzo, volume, volatilità e velocità.

In seguito, il quarto capitolo descrive in dettaglio la metodologia empirica e il design del backtest, che confronta le tre strategie (Buy & Hold, BL Neutrale e BL Aggressivo) e illustra la rigorosa procedura di stima di tutti i parametri del modello.

Infine, il quinto capitolo presenta e discute i risultati della simulazione. L'analisi empirica dimostra che, al netto dei costi, le strategie attive sono state in grado di generare un profilo di rischio-rendimento superiore al benchmark, mostrando una notevole capacità di proteggere il capitale durante le fasi di ribasso e di capitalizzare con forza sui successivi recuperi del mercato, offrendo così uno strumento robusto e replicabile per la gestione evoluta del portafoglio.

1 Asset Allocation e Teoria Moderna del Portafoglio (MPT)

In questo capitolo si tratterà la teoria moderna del portafoglio di Harry Markowitz con lo scopo di identificare le fondamenta su cui si basa l'attuale metodologia di creazione di portafogli e le sue derivazioni.

1.1 Il modello media-varianza di Markowitz

Prima dell'avvento della Teoria moderna del Portafoglio, la modalità di costruzione di questo si basava essenzialmente sulla ricerca di un buon titolo/asset finanziario per poi acquistarlo al miglior prezzo. L'idea del tempo è catturata bene dal libro di John Burr Williams del 1938 dal titolo "The Theory of Investment Value" in cui vengono elaborate le basi su cui si sviluppa il DDM (Dividend Discount Model - Modello di sconto dei dividendi), un modello quantitativo che cerca di calcolare il valore intrinseco di una azione attraverso l'attualizzazione dei futuri pagamenti di dividendi che l'azienda andrà ad effettuare¹. Il lavoro di Benjamin Graham e la sua opera "The Intelligent Investor" segnarono grandi passi avanti circa la modalità e le procedure con cui valutare i fondamentali di una azienda, ma sempre con l'intenzione principale di scommettere su buone azioni ad un basso costo. Il grande problema nel creare un portafoglio in questo modo è che non viene minimamente considerato il fattore forse più importante, ovvero il rischio. Solo nel 1952, con la pubblicazione di "Portfolio Selection" di Harry Markowitz e l'inizio della Teoria Moderna del Portafoglio, si introduce un concetto di valutazione del rischio all'interno della creazione di un portafoglio, individuando così la relazione diretta tra rischio- rendimento e l'importanza di cercare di minimizzare il primo e massimizzare il secondo per ottenere un portafoglio soppesato e ritagliato al profilo di rischio/rendimento dell'investitore.²

¹ Chen, J. (2024) *Dividend Discount Model (DDM) Formula, Variations, Examples, and Shortcomings*. Investopedia.

²Beattie, A. (2021) *Understanding the History of the Modern Portfolio*. Investopedia.

La Teoria moderna del Portafoglio (MPT) è un modello matematico con lo scopo di costruire un portafoglio di titoli azionari, diversificando gli investimenti tra molteplici società in modo da massimizzare il rendimento atteso per un dato livello di rischio. Elemento centrale che viene individuato dall'MPT è la diversificazione, strategia che consiste nel distribuire il proprio capitale investito su più asset diversi tra loro, con il fine di ridurre il rischio complessivo del portafoglio, evitando così “di mettere tutte le uova nello stesso paniere”. In linea di principio la maggior parte degli investimenti ad alto rendimento porta con sé alti rischi e mentre investimenti a basso rischio comportano bassi rendimenti; quindi, un mix ottimale tra le due tipologie di asset determina risultati migliori.³

Markowitz afferma che c'è la possibilità di creare un portafoglio ottimale minimizzando il rischio e massimizzando il rendimento. Questo approccio è definito metodo media-varianza e individua nelle componenti dei rendimenti attesi (media) e della volatilità (varianza) i determinanti per scegliere l'asset allocation.

1.1.1 Modello media-varianza

Questo modello possiede alcuni assunti volti a semplificare i comportamenti degli investitori e il movimento degli asset. Le ipotesi sono:

- Il mercato è efficiente, quindi:
 - Non vi sono asimmetrie informative.
 - Non vi sono frizioni quali tasse, costi di transazione costi di intermediazione ecc.
 - Gli operatori sono razionali.
 - Non vi è possibilità di compiere arbitraggio.
 - Gli agenti sono price-taker , vige un regime di concorrenza perfetta.
- I rendimenti degli asset finanziari seguono una distribuzione normale di media μ_i e varianza σ_i^2 inoltre sussiste la condizione di indipendenza e di identica distribuzione.

³ Scott, G. (2025) *Modern Portfolio Theory: What MPT Is and How Investors Use It*. Investopedia.

- La deviazione standard dei rendimenti è considerabile come una proxy per misurare il rischio.
- Gli investitori desiderano ottenere il maggior rendimento possibile a fronte del minor rischio possibile (avversione al rischio).

La creazione di un portafoglio prevede l'acquisto di molteplici azioni di società diverse, quindi diversificazione. Il capitale iniziale stanziato al fine dell'investimento sarà da suddividere in percentuale tra i diversi titoli andandone a determinare il peso sul totale.

Si definisca C_0 come il capitale che verrà investito, t l'orizzonte temporale di riferimento, $i = 1, 2, \dots, n$ numero di azioni che verranno allocate all'interno del portafoglio, R_i il loro rendimento, σ_i^2 la loro varianza e w_i i pesi all'interno del portafoglio all'inizio di t . La sommatoria di tutti i pesi darà come risultato 1, ovvero tutto il capitale verrà allocato.

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Le precedenti metriche finanziarie sono così determinate:

$$R_i = \frac{(P_{\{i,t+1\}} - P_{\{i,t\}})}{P_{\{i,t\}}} = \frac{P_{\{i,t+1\}}}{P_{\{i,t\}}} - 1$$

Il rendimento corrisponde al profitto o perdita ottenuta dall'asset, nell'istante della misurazione, espresso in percentuale.

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{\sum_{t=0}^T (R_{\{i,t\}} - E(R_i))^2}{T - 1} \right)$$

La varianza è la misura statistica che indica l'ampiezza della dispersione in un insieme di dati, misura infatti la distanza di ogni numero, nel nostro caso rendimento, dalla media di

questo. È uno dei metodi per esprimere la volatilità di uno strumento finanziario ovvero l'entità delle oscillazioni dei prezzi di un asset rispetto al prezzo medio⁴.

$$w_i = \frac{P_i}{\sum_{j=1}^n P_j} \text{ con } w_i (0 \leq w_i \leq 1)$$

e se $w_i = 0$ allora non vi è nessuna allocazione su questo titolo.

Può verificarsi anche il caso in cui i pesi siano negativi ovvero l'investitore ha effettuato su quel determinato titolo una vendita allo scoperto. Tale pratica prevede il “noleggio” del titolo entro un determinato periodo di tempo da un soggetto che già lo possiede e la vendita sul mercato dello stesso ricevendo una determinata somma $S_i(0)$. Ovviamente siccome il titolo è stato preso in prestito e deve essere restituito a scadenza, l'investitore riacquisterà l'asset al nuovo valore di mercato $S_i(t)$ per restituirlo al legittimo proprietario.

Se $S_i(t) < S_i(0)$, allora la vendita allo scoperto avrà generato un profitto altrimenti si subirà una perdita. Tale operazione, quindi, è ribassista ovvero vi sarà un guadagno solo se il prezzo del titolo diminuisce.

Le metriche appena definite considerano il singolo titolo; ora si andrà ad individuare quelli che sono il rendimento atteso, la varianza e la covarianza di portafoglio ricordando che nel contesto della creazione e gestione di un portafoglio non si deve né ci si può limitare ad osservare l'andamento del singolo asset, bensì lo si deve considerare in relazione a tutti gli altri, andando a determinarne la correlazione e il suo comportamento nell'insieme totale.

Il rendimento atteso è quella metrica che permette di stimare il guadagno che un investitore si aspetta di ottenere da un investimento.

Il rendimento atteso di ogni singolo asset corrisponde a $\mu_i = E(R_i)$, quindi il valore atteso del portafoglio sarà la combinazione lineare tra i pesi assegnati ad ogni azione e i

⁴ Hayes, A. (2025) *Volatility: Meaning in Finance and How It Works With Stocks*. Investopedia.

rendimenti attesi dei singoli titoli o anche più semplicemente la media ponderata delle singole attività che compongono il portafoglio⁵.

Dunque:

$$\mu_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

Scritto in forma matriciale come

$$\mu_p = \Omega \cdot \theta^T$$

dove Omega (Ω) è un vettore formato dai pesi dei titoli mentre Theta(θ) è un vettore trasposto contenete quelli che sono i rendimenti dei singoli asset.

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$\theta = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$$

Il calcolo del rischio di portafoglio (espresso dalla varianza) è più complesso, perché come precedentemente accennato, in un contesto di valutazione del rischio in un insieme di asset, non basta valutare la loro rischiosità singolarmente ma è necessario determinarne anche la correlazione quindi la loro capacità di muoversi all'unisono e quindi l'amplificare o l'attutire movimenti di alta volatilità e oscillazione di prezzo (tale andamento richiederà il calcolo della covarianza, che verrà riportato in seguito).

Per ottenere il calcolo della varianza di portafoglio è necessario definire quella che è la matrice della varianza-covarianza: è una matrice quadrata, la sua dimensionalità sarà $i \times i$, cioè avrà lo stesso numero di righe e colonne dove questo numero coinciderà esattamente con la quantità di titoli che saranno messi all'interno del portafoglio. Inoltre, è una matrice simmetrica quindi la sua diagonale principale presenta la varianza di ogni

⁵ Borsa Italiana. *GLOSSARIO FINANZIARIO-PORTAFOGLIO*. Borsa Italiana.

singola azione mentre le celle al di fuori di questa riportano tutte le covarianze possibili tra gli i asset.

Quindi si avrà:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1i} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \sigma_i^2 \end{pmatrix}$$

Dove $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \dots \sigma_i^2$ sono le varianze dei singoli titoli mentre $\sigma_{21}, \sigma_{31} \dots \sigma_{i1}$ corrispondono alle covarianze rispettivamente del secondo e primo titolo, del terzo e primo titolo e così via.

La varianza di portafoglio, dunque, sarà composta dalla combinazione lineare tra tutte le varianze e le covarianze, entrambe ponderate per i pesi w_i assegnati a ogni singolo titolo all'interno del portafoglio. Quindi questa viene scritta come:

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

che in forma matriciale compatta corrisponde a

$$\sigma_p^2 = \Omega \cdot \Sigma \cdot \theta^T$$

Come accennato sopra, la varianza di portafoglio rimanda alla covarianza che viene definita come:

$$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$$

Ricordiamo che nel caso in cui si consideri la covarianza tra la stessa variabile allora questa corrisponderà esattamente alla varianza della variabile. Quindi:

$$Cov(R_i, R_i) = \sigma_i^2 = Var(R_i)$$

Inoltre, una proprietà fondamentale della covarianza è:

$$Cov(A, B) = Cov(B, A)$$

Quindi $\sigma_{21} = \sigma_{12}$...e così via (matrice simmetrica)

In alternativa la covarianza può essere anche descritta attraverso il coefficiente di correlazione. Questo, infatti, permette una maggiore interpretabilità, poiché attraverso la sua normalizzazione all'interno del range tra -1 e +1 si è in grado fin da subito di percepire e conoscere la forza e il segno del legame tra gli asset a prescindere dalla loro volatilità assoluta. Questa è una condizione molto utile nella creazione del portafoglio: a “colpo d'occhio” senza effettuare calcoli difficoltosi e andando a ricercare asset con correlazioni negative, è possibile ottenere il massimo beneficio dalla diversificazione. La covarianza, quindi, può essere riscritta come:

$$Cov(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

con ρ_{ij} , il coefficiente di correlazione, che è definito come:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]}{\sqrt{Var(R_i) Var(R_j)}}$$

Il coefficiente di correlazione è una misura statistica che permettere di quantificare la forza della relazione lineare che sussiste tra due variabili. I valori assunti variano all'interno del range che va da -1 a +1.

In un potenziale portafoglio effettuato da solo due asset sussistono tre scenari principali:

- se c'è perfetta correlazione positiva quindi $\rho_{ij} = +1$ allora si avrà che i due asset si muovono all'unisono, quindi se il titolo X aumenta del 5% lo farà anche il titolo Y e se diminuisce Y del 10% lo farà anche X per lo stesso ammontare. E' possibile

andare a determinare il verificarsi di due risultati: se è permesso short selling, la varianza può essere portata a zero mentre se non è previsto allora la varianza avrà un valore positivo. In questo caso l'effetto diversificazione non avviene, non portando alla riduzione del rischio. Nella situazione in cui vi sia correlazione positiva ma non perfetta la diversificazione ha il suo effetto riducendo il rischio e facendo sì che il rischio di portafoglio sia minore del rischio medio dei titoli che lo compongono.

- Se invece sussiste una situazione di non correlazione ovvero $\rho_{ij} = 0$, questo indica che i due asset non presentano nessuna relazione predittiva e la varianza di portafoglio sarà positiva.
- Infine se si ha una correlazione perfettamente negativa $\rho_{ij} = -1$, il guadagno di un titolo è perfettamente compensato dalla perdita dell'altro, quindi la varianza di portafoglio, a prescindere della possibilità di effettuare short selling o meno, sarà uguale a zero. Da tale situazione si ottiene il massimo beneficio dalla diversificazione⁶.

Quindi la varianza di portafoglio è così espressa:

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

I due principali rischi a cui si fa fronte quando si investe in un asset finanziario sono il rischio sistemico e quello idiosincratco (o specifico).

Il rischio sistematico è il rischio associato all'intero del sistema macroeconomico, che colpisce perciò l'intero palmares di attività; un esempio possono essere le informazioni di carattere macroeconomico e le decisioni di politica monetaria e fiscali intraprese dalle banche centrali e dai governi.

Il rischio idiosincratco è il rischio legato specificatamente a quel determinato asset; nel caso delle azioni potrebbe essere la comunicazione al pubblico di una trimestrale, di una

⁶ Ross, S. (2022) *Correlation and Modern Portfolio Theory*. Investopedia.

notizia, quindi tutti quei fattori microeconomici che influenzano quel determinato titolo o quella tipologia di asset.

Il rischio specifico può essere mitigato o addirittura eliminato da un portafoglio attraverso una adeguata diversificazione, fulcro su cui si basa l'intero lavoro di Markowitz. Tale strategia di allocazione permette di minimizzare il rischio idiosincratico attraverso l'acquisto di asset non perfettamente positivamente correlati. Infatti è improbabile che una notizia che riguarda una specifica azienda influisca sulle altre aziende: per esempio il rilascio di una nuova tipologia di smartphone che va a competere con i noti iPhone sicuramente inficerà sulle attività di Apple e sui suoi rendimenti ma non dovrebbe causare nessuna influenza sull'andamento di prezzo di Pepsi.⁷

Immaginiamo di essere nel mondo reale e di voler determinare un portafoglio che presenta una ponderazione degli asset uguale, cioè ogni azione ha lo stesso peso all'interno del portafoglio, esprimiamo così con N titoli indipendenti e immaginiamo che $\sigma_{ij} \neq 0$ per ogni $i \neq j$.

Allora si può matematicamente spiegare il fenomeno della diversificazione e l'esistenza delle due tipologie di rischio prima definite, nel seguente modo:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{con } w_i = 1/N \text{ per ogni } i \text{ quindi}$$

Da cui:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}$$

che equivale a:

⁷ Ancheta, A.(2025) *Idiosyncratic Risk: Definition, Types, Examples, and Ways to Minimize*. Investopedia.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} + \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \sigma_{ij}$$

definendo la varianza media e la covarianza media tra i diversi asset:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2, \quad \overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^N \sigma_{ij}$$

Sostituendo e semplificando si ha:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \overline{\sigma_i^2} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{\sigma_{ij}}$$

Dove il primo termine corrisponde al rischio idiosincratico quindi eliminabile attraverso la diversificazione mentre il secondo termine corrisponde a quello sistematico.

1.1.2 Il portafoglio di minima varianza e la frontiera efficiente

Per la determinazione del portafoglio di minima varianza e massimo rendimento è necessario risolvere un problema di ottimizzazione vincolata. Il nostro obiettivo è determinare i pesi che minimizzino il rischio, e che permettono la costruzione di un portafoglio di n azioni $i_1, i_2, \dots, i_n$ che presentano i rispettivi rendimenti $R_1, R_2, \dots, R_n$ in modo che il rendimento medio prefissato sia uguale a $\mu > 0$.

La funzione obiettivo è

$$\min_w \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

e i rispettivi vincoli sono:

$$\sum_{i=1}^n x_i E[R_i] = \mu$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Come possiamo vedere questa modalità di risoluzione si concentra sulla ricerca del punto minimo della funzione di rischio, rappresentata dalla varianza; variando il vincolo del rendimento atteso con diversi valori si ricava l'intera frontiera efficiente, e ciascuna soluzione di tale problema determina i pesi esatti degli asset che formano quel determinato portafoglio.

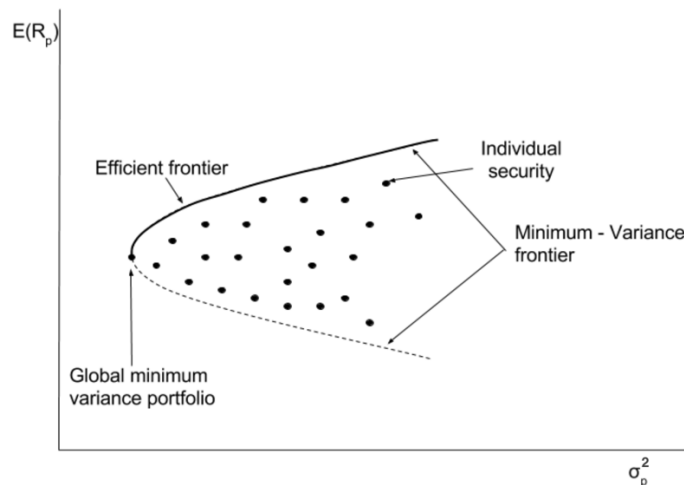


Figura 1 tratta da: IFT. Concept 65: Minimum-Variance and Efficient Frontiers. IFT

Quindi con la risoluzione di tale problema si vanno a determinare in maniera diretta i portafogli dominanti cioè quei portafogli che per un determinato rendimento hanno minor rischio oppure per un certo grado di rischio un maggior rendimento. Questi punti (portafogli) vanno a formare una curva concava chiamata frontiera efficiente. Tutti i portafogli al di sotto di tale frontiera sono definiti inefficienti o dominati, poiché esisterà sempre un portafoglio migliore che a parità di rischio darà maggiore rendimento o a parità di rendimento, minore rischio. Inoltre, è necessario andare a determinare il portafoglio di varianza minima globale, al di sotto del quale inizia il tratto inefficiente della frontiera.

Tale portafoglio di “ultima istanza” è determinato dalla risoluzione del medesimo problema di ottimizzazione vincolata, ma in questo caso mantenendo esclusivamente il secondo vincolo: la sommatoria di tutti i pesi deve essere pari a uno.⁸

1.1.3 Selezione del portafoglio ottimale in base alle preferenze dell’investitore

Dall’insieme dei portafogli dominanti è necessario trovare il portafoglio ottimo cioè quel portafoglio che di più va a soddisfare il profilo dell’investitore, specialmente riguardo la sua avversione al rischio.

Proprio per questa valutazione è necessario andare a definire l’atteggiamento verso il rischio dell’investitore attraverso l’utilizzo e la spiegazione delle curve di indifferenza.

A seconda del grado di avversione al rischio è possibile ottenere una serie di curve di indifferenza che rappresentano le preferenze degli investitori in funzioni del rendimento atteso e del rischio. Ogni curva di indifferenza costituisce un diverso livello di utilità (quantità di soddisfazione che un consumatore prova per l’utilizzo di un determinato bene o servizio) per l’investitore, unendo tutti i portafogli che assicurano allo stesso la medesima utilità. Quindi le curva di indifferenza rappresenta l’insieme di tutte le combinazioni di rischio e rendimento atteso che garantiscono all’investitore uno stesso livello di utilità o soddisfazione. In altre parole, un investitore è “indifferente” nel scegliere un qualunque punto sulla stessa curva, perché tutte offrono la medesima preferenza personale tra rischio e rendimento.

Lo scopo fondamentale dell’investitore è ovviamente andare a massimizzare la sua utilità a seconda della propria propensione al rischio. Quindi si immagini che la funzione di utilità di un investitore in un orizzonte temporale T sia $u = u(T)$ e che Π sia l’insieme dei portafogli efficienti disponibili (il set di opportunità). L’investitore vorrà massimizzare l’utilità attesa ottenibile nel suo orizzonte temporale:

$$\max_{\pi \in \Pi} E[u(A_{\pi})]$$

⁸ Cavacini, C.(2022) ‘Asset allocation: comparison between the Markowitz approach and the Black-Litterman method.’ Tesi magistrale, Politecnico di Torino. pp. 5-21.

Poiché i portafogli efficienti si ottengono con l'approccio media–varianza, essi dipendono unicamente dai rendimenti attesi μ e dalla varianza (o deviazione standard) σ . Per includere la funzione di utilità dell'investitore nel processo di selezione del portafoglio, è dunque necessario esprimerla come: $U = U(\mu, \sigma)$

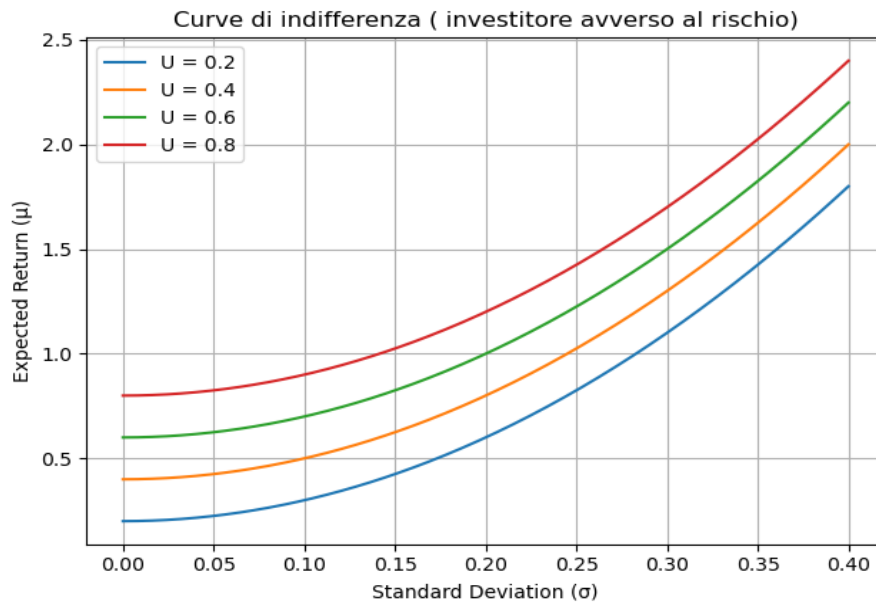


Figura 2: Immagine elaborata in autonomia tramite lo strumento Python. Curve di indifferenza.

Si analizza brevemente il caso in cui l'investitore è avverso al rischio, quindi quello più comune in letteratura e più simile al mondo reale. Come si può evincere dall'immagine, tali curve in questo caso, presentano una forma convessa; l'aumento dell'inclinazione della curva comporta un aumento all'avversione al rischio dell'investitore. Inoltre le curve più in alto presentano utilità maggiori rispetto a quelle più in basso. La funzione di utilità dell'investitore con tale percezione del rischio sarà uguale a:

$$U(\mu_p, \sigma_p) = \mu_p - \frac{\lambda}{2} \sigma_p^2$$

Dove $\lambda > 0$ e rappresenta il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore. Questo è positivo perché individua quanto l'investitore penalizzi la varianza, perciò il rischio, nella sua funzione di utilità. Inoltre la derivata seconda di U rispetto a σ_p^2 genera una curva

concava riflettendo la proprietà economica di avversione al rischio quindi la presenza di una utilità marginale decrescente rispetto al rischio.

Infine il portafoglio ottimo corrisponde esattamente al punto di tangenza tra la curva d'indifferenza più alta e la frontiera efficiente.⁹

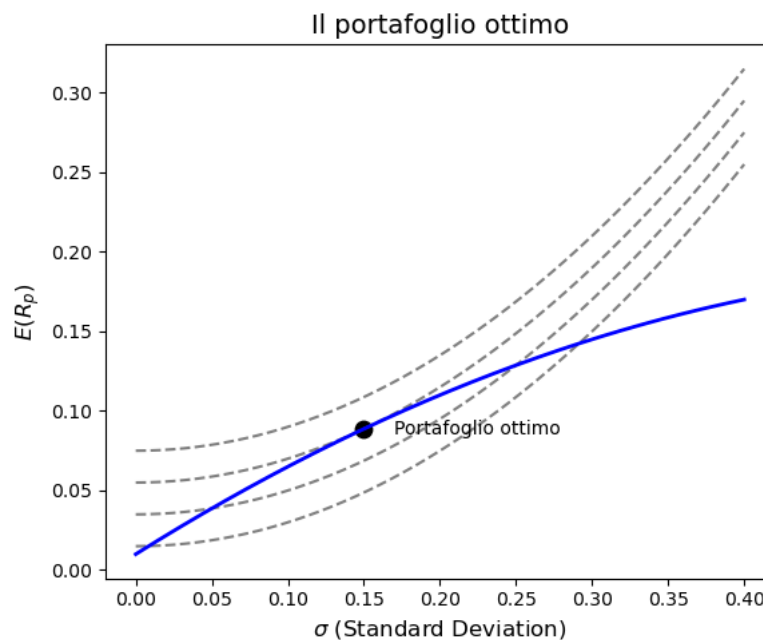


Figura 3: Immagine elaborata in autonomia tramite lo strumento Python. Il Portafoglio Ottimo.

1.2 Estensione della Teoria Moderna del Portafoglio attraverso il CAPM

Il CAPM (Capital Asset Pricing Model) viene elaborato nel 1964 da William Sharpe e ripreso in seguito da Lintner (1965) e Mossin (1966). Questo modello si basa sulla Teoria Moderna del Portafoglio di Markowitz ed è definibile come la sua “estensione in equilibrio di mercato”.

Il CAPM consente di determinare il prezzo di equilibrio, quindi il rendimento, di attività finanziarie rischiose. Principalmente la sua innovazione deriva dall'introduzione di un nuovo fattore di rischio chiamato beta (β) che definisce la relazione che intercorre tra il

⁹ Armento, A.(2022). *L'esame a test per Consulente finanziario abilitato all'offerta fuori sede. Manuale completo di preparazione*. 27^a ed. Torino. Alpha Test. cap. 19. pp. 471–477.

rendimento di un titolo e il rischio sistematico. Questa relazione è un interessantissimo passo avanti poiché permette di andare a creare portafogli finanziari in modo ancora più consapevole e personalizzato, stando attenti non solo a limitare il rischio idiosincratico ma anche a considerarne l'esposizione verso il rischio sistemico del mercato.

Semplificando il ragionamento, la domanda di ricerca di questo modello è quale dovrebbe essere il rendimento atteso o il prezzo in equilibrio, di un titolo rischioso.

La risposta più naturale è che il rendimento atteso dagli investitori, sempre in una situazione di equilibrio, sarà tanto maggiore quanto sarà maggiore il rischio dell'asset. Si vuole allora andare ad investigare riguardo al rischio e al suo prezzo, ovvero quanto rendimento aggiuntivo (premio per il rischio) è richiesto per ogni unità addizionale di questo.

1.2.1 Assunzioni del CAPM

Come già detto il modello si fonda su una situazione di equilibrio, in una condizione in cui la domanda e l'offerta sono uguali. Questo corrisponde a uno stato teorico in cui le forze economiche e finanziarie sono perfettamente bilanciate, una situazione cioè che non sussiste realmente nei mercati finanziari.

Il CAPM si basa sulle seguenti sui seguenti presupposti:

- Non sussistono costi di transazione o frizioni per l'acquisto o vendita degli asset.
- Le vendite allo scoperto sono consentite.
- Tutti gli investitori sono avversi al rischio.
- Il mercato è efficiente.
- Le aspettative degli investitori sono omeogene quindi tutti i soggetti presentano le stesse stime riguardo i rendimenti attesi, le varianze e le covarianze dei titoli.
- Si introduce una nuova tipologia di asset finanziario definita risk-free, nella quale si può investire senza correre in nessun rischio (questa nella realtà coincide con i bond tedeschi o i T-bond statunitensi).
- Vi è la possibilità di investire e indebitarsi senza limite al tasso di interesse privo di rischio.

- Gli investitori prendono decisioni considerando solo i rendimenti attesi e le deviazioni standard (rischio) dei loro portafogli.

Poichè sussiste l'ipotesi delle aspettative omogenee e tutti gli investitori possono indebitarsi o dare in prestito denaro allo stesso tasso di interesse, allora gli investitori deterranno il medesimo portafoglio rischioso, che in una condizione di equilibrio è esattamente il portafoglio di mercato (M). Questo è un portafoglio che giace sulla frontiera efficiente e che contiene tutti gli asset rischiosi disponibili sul mercato, ponderati alla loro capitalizzazione. Tutti gli investitori, dunque, seguendo la personale propensione al rischio come parametro decisivo nella asset allocation, andranno a investire in una combinazione formata dal portafoglio di mercato e dall'attività free-risk. Quindi la distinzione tra un investitore e un altro risiede nella modalità di allocazione delle proprie risorse finanziarie tra il portafoglio M e il Risk-free.

1.2.2 Il CAPM

L'introduzione dell'asset risk-free va a modificare la frontiera efficiente: da una curva convessa diventa una curva lineare che individua tutte le possibili combinazioni rischio-rendimento ottenute combinando l'attività priva di rischio e il portafoglio M. Tale frontiera lineare è detta Capital Market Line ed è definita dall'equazione:

$$E(R_p) = R_f + \left[\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right] \sigma_p$$

Dove $E(R_p)$ indica il rendimento atteso del portafoglio, R_f è il rendimento dell'attività priva di rischio e può essere definito anche come valore temporale del denaro, $\left[\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right]$ invece corrisponde al premio per il rischio o allo Sharpe ratio del portafoglio di mercato. In generale tale metrica finanziaria misura le performance dei portafogli ponderando il rendimento al rischio. Mette in evidenza se sussiste un extra rendimento per ogni unità di rischio e tanto sarà maggiore il valore di tale ratio tanto migliore sarà il portafoglio costruito. In questo caso funge da coefficiente angolare della nostra curva lineare

rappresentante la frontiera efficiente; quindi, la pendenza della stessa dipende da questo rapporto.

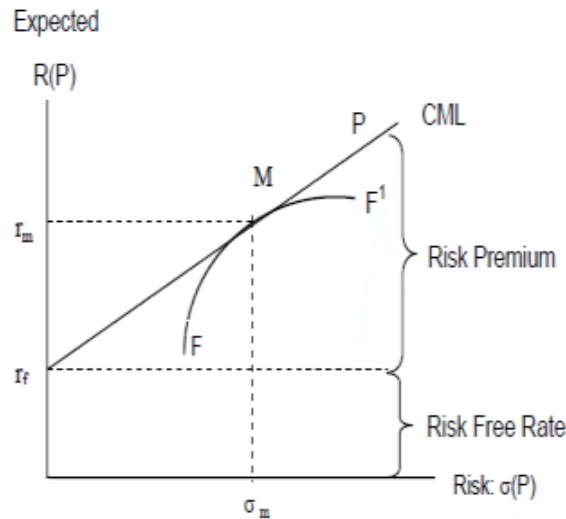


Figura 4 tratta da Wagdi, O. (2014), "Relationship between Risk and Common Stock Return in CML and CAPM", Scientific Journal of Economic and Commerce.

Come appurato nella sezione 1.1 attraverso una adeguata diversificazione del portafoglio è possibile annullare il rischio idiosincratico mantenendo solo quello sistematico, non diversificabile. Quest'ultimo rischio viene descritto nel modello del CAPM attraverso il beta, misura rilevante del rischio per un singolo titolo, che corrisponde alla sensibilità del prezzo di un asset al movimento del mercato.

Nel caso dell'attività i-esima:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Dove:

- R_i = rendimento del titolo i
- R_M = rendimento del portafoglio di mercato
- $\sigma_{iM} = \text{Cov}(R_i, R_M)$
- $\sigma_M^2 = \text{Var}(R_M)$

Quindi si può riscrivere il rendimento atteso dell'attività i-esima come:

$$E(R_p) = R_f + [E(R_M) - R_f] \cdot \beta_i$$

Quest'ultima equazione rappresenta la così detta SML (Security Market Line) ed esprime la relazione di equilibrio tra rendimento atteso e rischio di qualsiasi titolo o portafoglio. Tale retta funge da determinante per classificare quelle che sono attività valutate in maniera equa, sottovalutate o sopravvalutate. Infatti se un asset giace sulla retta allora è equamente valutato, se è sotto è sopravvalutato e se è sopra è sottovalutato. Infatti in quest'ultimo caso tale asset domina tutti i titoli a lui sottostanti poiché dimostra un maggiore rendimento a parità di rischio (beta).

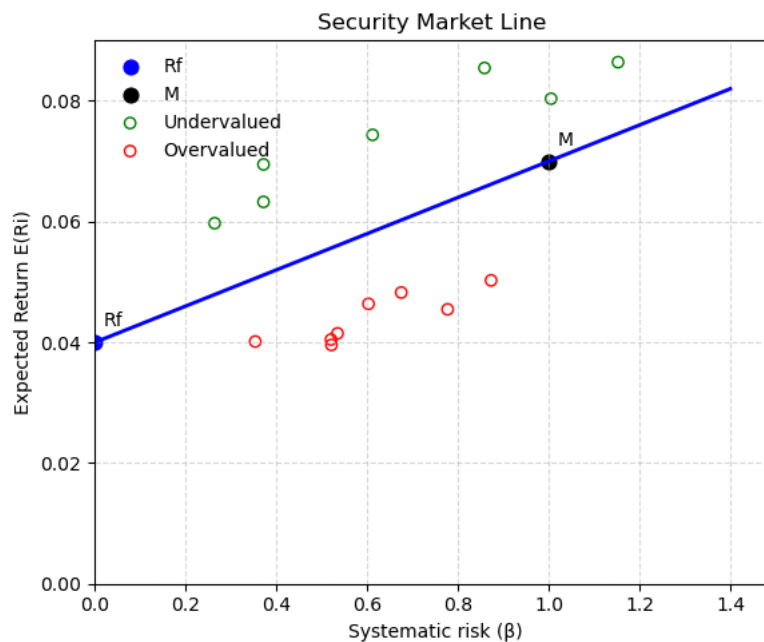


Figura 5: Immagine elaborata in autonomia tramite lo strumento Python. La Security Market Line.

L'equazione CAPM offre un'importante intuizione economica: conferma che è il rischio sistematico che determina i rendimenti attesi, poiché il rischio idiosincratico può essere eliminato dalla diversificazione. Pertanto, l'investitore è ricompensato per aver sopportato il rischio di mercato.

È possibile classificare le azioni in base al loro valore di beta:

- $\beta_i < 0$: azioni che presentano un andamento inverso con il mercato
- $0 < \beta_i < 1$: azioni difensive con rendimenti inferiori rispetto al mercato

- $\beta_i > 1$: azioni aggressive con rendimenti più elevati rispetto al mercato
- $\beta_i = 1$: azioni che ottengono gli stessi rendimenti del mercato

Riassumendo il CAPM, estensione naturale della Teoria Moderna del Portafoglio, è un modello che stabilisce in una situazione di equilibrio di mercato le relazioni di rischio-rendimento per i portafogli e per i singoli asset. Questo modello ha la capacità di aiutare gli investitori a gestire il rischio, permettendo di prezzare il rendimento atteso che si dovrebbe ottenere da un asset, ponderandolo per il rischio. La Capital Market Line è la linea che definisce il trade off rischio rendimento per i portafogli efficienti andando a individuare tutte le possibili combinazioni tra gli asset rischiosi (rappresentati dal portafoglio di mercato M) e l'attività senza rischio su cui gli investitori razionali, a seconda della loro avversione al rischio, andranno ad allocare i loro capitali. La Security Market Line invece permette di individuare il rendimento adeguato per ogni singolo asset o portafoglio determinando di fatto uno spartiacque tra asset giustamente prezzati, sopravvalutati o sottovalutati.¹⁰¹¹

Come vedremo in seguito, entrambi i modelli sopra presentati saranno indispensabili al fine della trattazione.

1.3 Limiti del modello di Markowitz

La teoria di Markowitz, nonostante la sua importanza rivoluzionaria nell'ambito dell'asset management, della creazione di portafogli e della gestione degli investimenti, porta con sé diversi limiti che si scontrano in modo evidente con la realtà dei mercati finanziari.

Il primo limite riguarda l'ipotesi del mercato efficiente, presupposto fondamentale del modello di Markowitz. La sua ipotesi è che il mercato incorpori istantaneamente tutte le informazioni pubbliche e private nei prezzi, ciò significa che gli investitori hanno a loro

¹⁰Cavacini, C.(2022) '*Asset allocation: comparison between the Markowitz approach and the Black-Litterman method.*' Tesi magistrale, Politecnico di Torino. pp. 22-25.

¹¹ Armento, A.(2022). *L'esame a test per Consulente finanziario abilitato all'offerta fuori sede. Manuale completo di preparazione.* 27^a ed. Torino. Alpha Test. cap. 19. pp. 471–477.

disposizione informazioni perfette e intraprendono decisioni razionali. L'emergere della finanza comportamentale ha rovesciato questa visione, dimostrando come molteplici componenti irrazionali influenzino il comportamento degli investitori. Questi possono essere individuati nei bias cognitivi ed emotivi, come l'effetto gregge, che nel caso dei mercati finanziari corrisponde all'acquisto di una azione solo perché è di tendenza comportando un aumento dei prezzi senza alcuna ragione; oppure come l'overconfidence bias, secondo il quale gli investitori sovrastimano le proprie capacità e le proprie conoscenze attribuendo al proprio talento performance e risultati che in realtà non derivano dalla loro bravura o capacità ma dal caso, facendogli così sovrastimare le loro abilità e la loro comprensione del mercato.

Altro limite del modello Markowitz riguarda i mercati reali che presentano molteplici imperfezioni strutturali che il modello ignora. L'avvento di cigni neri (eventi imprevisti negativi) come cambiamenti di politiche monetarie e di politiche fiscali improvvise, il verificarsi di eventi estremi come pandemie, guerre, attacchi terroristici o ancora flash-crash (brusco crollo delle borse) derivanti da aspettative sull'andamento dei cambi valutari o causati da ulteriori eventi esogeni, contraddice l'assunto di Markowitz secondo cui i rendimenti seguono una distribuzione normale. I mercati reali, infatti, sono caratterizzati da code grasse (fat tails), dove gli eventi estremi sono molto più frequenti di quanto il modello preveda.

Anche le asimmetrie informative che sussistono all'interno del mondo reale dovute a differenze nella diffusione delle informazioni, nonostante le regolamentazioni nazionali e internazionali che tendono a scongiurarle o almeno a mitigarle, aggravano i difetti del mercato. Tali situazioni portano a far discostare i prezzi dei titoli dalle previsioni effettuate tramite dati storici, contraddicendo i presupposti teorici individuati da Markowitz.

Tuttavia, il problema più critico a livello operativo del modello è legato agli errori di stima dei tre parametri principali su cui si basa il modello media-varianza e su cui si crea la frontiera efficiente: rendimenti attesi, varianza e covarianza. Infatti l'approccio teorico vuole che per il calcolo di tali parametri ci si basi sui dati storici, comportando notevoli limiti e approssimazioni. Se si seguisse la linea portata avanti da Markowitz si presupporrebbe che le future performance di mercato siano molto simili a quelle del passato, ma nella realtà non è possibile andare a prevedere il futuro dato la sua grande

incertezza, quindi fare affidamento sul passato può essere fuorviante in una condizione in cui il mercato è in continua evoluzione. La conseguenza pratica è che l'ottimizzatore media-varianza agisce come un "massimizzatore di errori": piccole variazioni o errori negli input dei rendimenti attesi producono grandi variazioni nei pesi del portafoglio ottimale. Il risultato sono portafogli instabili, spesso concentrati su un numero ristretto di asset e con allocazioni poco intuitive, che nessun gestore applicherebbe nella pratica.¹²

Un ulteriore debolezza riscontrabile nel modello di Markowitz è la mancanza di un meccanismo funzionale che incorpori le aspettative future degli investitori. Gli input della MPT (valore atteso, varianza e covarianza) sono parametri vengono stimati oggettivamente dal passato, non come variabili che riflettono l'analisi, l'intuito e le previsioni dell'investitore o del gestore. Tale mancanza di integrazione delle aspettative può diventare un limite importante soprattutto in un contesto reale; infatti, gli investitori dispongono di conoscenze e previsioni che non emergono solo dai dati passati come per esempio analisi settoriali, aspettative macroeconomiche o proiezioni finanziarie. Integrare le opinioni degli investitori potrebbe permettere di ridurre gli errori di stima e costruire portafogli più aderenti alle attuali condizioni di mercato. Se è vero che il modello non integra le aspettative sui rendimenti, esso tiene conto della soggettività dell'investitore in un'altra fase: la selezione del portafoglio finale. Attraverso la funzione di utilità e le relative curve di indifferenza, infatti, il modello permette di individuare sulla frontiera efficiente il portafoglio ottimale specifico per la propensione al rischio di un dato individuo. Questa è una personalizzazione applicata a valle, su una frontiera efficiente costruita con dati ritenuti oggettivi. La soggettività dell'investitore entra in gioco solo per scegliere il livello di rischio da assumere, ma non contribuisce a definire quali siano le opportunità di rendimento stesse. Manca totalmente un canale per esprimere una visione attiva e previsionale sul mercato, rendendo il portafoglio "ottimale" cieco di fronte a qualsiasi intuizione sul futuro.

In definitiva, il principale punto critico della teoria di Markowitz è la sua dipendenza da parametri stimati ex-ante e da ipotesi di mercato perfettamente razionali e omogenei, che non lasciano spazio alla reale soggettività delle aspettative sull'evoluzione futura dei

¹² Zhang, H. (2024). *Limitations and Critique of Modern Portfolio Theory: A Comprehensive Literature Review*. University of Manchester. EWA Publishing.

rendimenti e del mercato. Questa mancanza di un meccanismo che integri le opinioni personali degli investitori costituisce un limite importante, che rende necessario ricorrere a modelli come quello di Black–Litterman. Nel capitolo successivo vedremo infatti come Fischer Black e Robert Litterman propongano un approccio bayesiano che risolve il problema alla radice.

Invece di partire da stime storiche instabili, il modello parte da un punto di riferimento neutro e stabile (l'equilibrio di mercato) e permette all'investitore di combinare questo equilibrio con le proprie "views" soggettive, specificandone anche il grado di confidenza. Questo approccio produce portafogli più stabili, diversificati e realmente aderenti alle aspettative individuali, superando così una delle più importanti criticità del modello originale.¹³

¹³ Cavacini, C.(2022) '*Asset allocation: comparison between the Markowitz approach and the Black-Litterman method.*' Tesi magistrale, Politecnico di Torino. pp. 5-21.

2 Il Modello Black-Litterman (B&L)

In questo capitolo si analizzerà il modello centrale su cui si basa l'intera trattazione e attraverso cui si effettuerà l'asset allocation dinamica. Il modello Black-Litterman ha le sue radici nella teoria di costruzione di portafogli di Markowitz (media-varianza) e sul metodo di pricing ideato da Sharpe (il CAPM) andandone però a superare i principali limiti.

Il modello di asset allocation globale di Fischer Black e Robert Litterman è stato sviluppato nel 1990 per la neonata divisione di Asset Management della Goldman Sachs, rivoluzionando ulteriormente il settore della gestione patrimoniale e dell'asset management. Inizialmente il modello veniva utilizzato esclusivamente per le l'asset allocation in obbligazioni; solo nel 1991 venne esteso anche alle azioni. L'obiettivo assegnato ai due studiosi da Goldman Sachs era creare un approccio quantitativo e disciplinato alla realizzazione di portafogli obbligazionari, coerente con la visione personale del gestore di portafoglio. Il modello venne pubblicato sul Journal of Fixed Income nel settembre 1991 dove i due autori lo descrissero come: "Questo nuovo approccio di allocazione delle attività, consente agli investitori di creare portafogli che appaiono equilibrati e riflettono le loro opinioni senza ricorrere a vincoli arbitrari sulla composizione del portafoglio [...]".¹⁴

Quindi, il modello Black-Litterman ha lo scopo di migliorare l'allocazione generata dal metodo MPT incorporando le views sulle prospettive future di mercato.

Questo modello ha la capacità di superare diversi limiti individuati nel MPT di Markowitz; infatti, l'integrazione delle opinioni degli investitori e dei livelli di confidenza delle views stesse nel processo di ottimizzazione, porta con sé diversi vantaggi come la possibilità di creare portafogli più intuitivi e diversificati, una minore dipendenza e

¹⁴ Goldman Sachs. *Innovative Black-Litterman Global Asset Allocation Model Is Developed at Goldman Sachs.*

sensibilità derivante degli input calcolati ex-post e la innovativa capacità di integrare nelle decisioni di asset allocation le views degli investitori, che rappresentano le aspettative sui rendimenti futuri degli asset.

Il modello Black-Litterman si basa sulla teoria di costruzione di portafogli di Markowitz (media-varianza) e sul metodo di pricing ideato da Sharpe (CAPM) andandone però a superare i principali limiti.

La prima innovazione apportata da questo modello è insita proprio nella metodologia della stima dei rendimenti attesi degli asset dove, anziché cercare di stimarli ex-ante portando a tutte le problematiche già affrontate nel paragrafo precedente, Black e Litterman derivano i rendimenti direttamente dal mercato.

Nel loro modello, il portafoglio di mercato globale, ponderato per la capitalizzazione dei suoi componenti, rappresenta un punto di equilibrio efficiente, ovvero il portafoglio ottimale detenuto dall'investitore medio rappresentativo. Quindi attraverso un processo di ottimizzazione inversa (che sarà spiegato in seguito) verranno calcolati i rendimenti impliciti in eccesso degli asset, rispetto al tasso privo di rischio, che giustificano perfettamente il peso a loro assegnato. Questi rendimenti non sono una previsione ma rappresentano il consenso del mercato, perciò sono un punto di partenza neutrale ed oggettivo che riflette il consenso aggregato degli operatori. Essi indicano la stima più completa disponibile poiché incorporano l'intera gamma di informazioni e giudizi scontata nei prezzi, in quel preciso momento.

La seconda innovazione è l'integrazione delle views dell'investitore come motore decisionale che guida l'asset allocation attiva. Perciò il modello Black-Litterman presenta l'equilibrio di mercato e le aspettative soggettive degli investitori come principali fonti di informazioni sui futuri premi al rischio. Poiché entrambi questi fattori presentano un forte incertezza, vengono espressi in termini di distribuzioni di probabilità. Per unire in modo rigoroso queste due distribuzioni viene utilizzata l'inferenza bayesiana, dove:

- i rendimenti di equilibrio del mercato agiscono come la “credenza a priori” o prior, perciò il consenso di mercato prima di considerare le opinioni specifiche;
- le views dell'investitore costituiscono “la nuova evidenza” o Likelihood che verrà integrata ai rendimenti di equilibrio di mercato.

Da queste due distribuzioni viene calcolata la così detta “credenza a posteriori” o posterior, cioè la combinazione dei rendimenti di equilibrio con le nostre views, dando vita ad un nuovo dataset di rendimenti attesi che tiene conto di entrambe le fonti. Questo processo produce un input per l'ottimizzazione finale che è al contempo robusto, coerente e capace di riflettere sfumature di giudizio altrimenti difficili da quantificare.

Per riassumere, l'approccio Black-Litterman prevede i seguenti passaggi:

- Il calcolo dei rendimenti di equilibrio del mercato impliciti, attraverso la tecnica di ottimizzazione inversa.
- L'integrazione tra i rendimenti del mercato impliciti e le opinioni degli investitori, attraverso l'approccio bayesiano.
- Il calcolo dei pesi ottimali finali, utilizzando i rendimenti attesi in eccesso ottenuti al punto precedente come input al metodo di ottimizzazione della varianza media.

2.1 Ipotesi del modello

Le ipotesi che costituiscono il fondamento su cui si basa questo modello di asset allocation sono le seguenti:

- la non completa efficienza del mercato. Gli investitori elaborano le proprie opinioni proprio perché credono di poter identificare delle opportunità di rendimento in asset che il mercato non ha apprezzato correttamente, andando implicitamente a individuarne almeno una parziale inefficienza.
- Sussistono due fonti di informazioni per la stima dei rendimenti attesi: l'equilibrio di mercato, una stima oggettiva e neutrale derivata dal portafoglio di mercato, e le views dell'investitore, convinzioni soggettive di un analista o gestore.
- Utilizzo dell'inferenza Bayesiana per combinare le due fonti di informazioni. I rendimenti impliciti di equilibrio di mercato corrispondono alla prior (la conoscenza di base), che viene poi aggiornata con le "views" per ottenere la distribuzione della posterior (i rendimenti attesi finali).
- Per ogni opinione dell'investitore deve essere quantificato un grado di confidenza, esprimendo perciò il nostro grado di sicurezza sul fatto che quella determinata views si verifichi realmente. Tale aspetto ha una fondamentale importanza perché

determina quanto le opinioni soggettive andranno a modificare il punto di partenza oggettivo dei rendimenti impliciti di equilibrio del mercato.

- L'obiettivo ultimo dell'investitore è la massimizzazione del rendimento del portafoglio, tale eventuale sovraperformance verrà confrontata con un portafoglio benchmark di riferimento, che usualmente corrisponde al portafoglio di equilibrio del mercato.
- Ereditando dalla teoria di Markowitz, si assume che gli investitori siano razionali e avversi al rischio, e che cerchino di ottimizzare il rapporto rischio/rendimento del loro portafoglio.
- Nella sua versione standard, il modello assume che sia i rendimenti degli asset, sia l'incertezza associata alle "views" dell'investitore, seguano una distribuzione di probabilità normale (gaussiana). Questa è una delle ipotesi più forti e più criticate, poiché i rendimenti reali tendono ad avere "code grasse" (eventi estremi più frequenti).
- Per calcolare i rendimenti di equilibrio iniziali, il modello si basa implicitamente sulle assunzioni del Capital Asset Pricing Model (CAPM). Questo implica che l'equilibrio di mercato rappresenta un punto in cui tutti gli investitori hanno le stesse aspettative.

Queste ipotesi sono quindi cruciali per comprendere e poter sviluppare in modo corretto il modello di Black e Litterman.¹⁵

2.2 Ottimizzazione inversa

L'ottimizzazione inversa è una potente tecnica che permette di determinare i parametri di un problema di ottimizzazione dai dati osservati. L'utilizzo di questa tecnica da parte di Black-Litterman rappresenta un cambio di paradigma importante rispetto al tradizionale approccio di Markowitz. Infatti, invece, di partire dalle stime sui rendimenti futuri per creare un portafoglio, l'ottimizzazione inversa parte dal portafoglio di equilibrio di

¹⁵ Di Tondo, B.(2023). *La teoria di asset allocation: il modello Black-Litterman*. Tesi Laurea triennale, LUISS Guido Carli. pp. 37-38

mercato per dedurre quali siano i rendimenti attesi che giustificano i prezzi del portafoglio di mercato in quell'istante.

Come già individuato in precedenza, nonostante l'importanza innovativa, il modello di Markowitz porta con sé diversi limiti, tra cui l'errore di stima. Il modello MPT richiede come uno degli input fondamentali il calcolo dei rendimenti attesi degli asset; questo calcolo viene fatto sui dati storici passati e si ipotizza che tali valori corrisponderanno ai futuri rendimenti degli asset, risultando spesso inaffidabili. L'altra problematica deriva dal fatto che il modello MPT è davvero molto sensibile all'input dei rendimenti attesi, tanto che eventuali errori o variazioni nelle stime possono portare a risultati estremi, generando portafogli poco intuitivi o concentrati su un ristretto numero di asset.

Poiché gli investitori non sono in grado di prevedere con precisione i rendimenti attesi (quindi futuri) degli asset, Black e Litterman hanno individuato nei rendimenti in eccesso (rispetto al risk-free) di equilibrio del mercato come il riferimento dei rendimenti attesi. Una volta individuato l'obiettivo, Black e Litterman superano la criticità del calcolo dei rendimenti attesi riscontrabile nel modello MPT proprio attraverso l'ottimizzazione inversa, risolvendo il problema alla radice. Concettualmente, quindi, si è passati dalla domanda “dati questi rendimenti attesi, qual è il portafoglio ottimale?” a “siccome il portafoglio di mercato è considerato ottimale, quali sono i rendimenti attesi che ne giustificano l'allocazione?”. Quindi come indicato nel CAPM, si assume che in un contesto in cui il mercato è in equilibrio, ovvero che l'offerta sia uguale alla domanda, e dove tutti gli investitori presentano aspettative omogenee allora il portafoglio ottimale corrisponde esattamente a quello di mercato.

Il processo che verrà riportato in seguito può essere così brevemente riassunto:

- Il modello parte da una situazione di equilibrio dove il portafoglio di mercato globale, in cui ogni asset è ponderato secondo la sua capitalizzazione, è considerato il portafoglio perfetto che rappresenta la visione collettiva di tutti gli investitori
- Attraverso l'ottimizzazione inversa vengono estratti i rendimenti attesi, i quali rendono il portafoglio di mercato la scelta ottimale per un investitore medio.
- Tali rendimenti sono chiamati rendimenti in eccesso di equilibrio impliciti (Π).

La tecnica di ottimizzazione inversa si fonda sull'utilizzo della funzione di utilità quadratica. Questa funzione descrive il trade-off tra il rischio e il rendimento che l'investitore è disposto ad assumersi.

L'ottimizzazione che ne deriva è una ottimizzazione vincolata, il cui vincolo fondamentale, condiviso con la MPT di Markowitz, impone che la somma dei pesi degli asset in portafoglio sia uguale a uno ($\sum_{i=1}^n w_i = 1$ oppure in forma vettoriale $w^T \mathbf{1} = 1$). Dunque, la funzione da massimizzare sarà:

$$U = W^T \theta - \frac{\lambda}{2} W^T \Sigma$$

Dove:

- U è la funzione di utilità degli investitori
- W è il vettore dei pesi di tutti gli asset
- θ è il vettore dei rendimenti di equilibrio in eccesso di tutti gli asset
- λ è il parametro di avversione al rischio
- Σ è la matrice di varianza-covarianza degli asset

Il parametro λ ha una importanza notevole, infatti permette di individuare la tipologia di propensione al rischio di un investitore, quindi può avere le seguenti declinazioni:

- Un λ positivo indica un investitore avverso al rischio poiché andrà a sottrarre dalla componente di rendimento quella di rischio. In questo caso il parametro λ agirà come un fattore di penalità, quantificando quanto “costa” ogni punto di rischio aggiuntivo in termini di soddisfazione o utilità per l'investitore
- Se λ è negativo descrive un investitore amante del rischio. Per lui, la volatilità non è un male da evitare ma un bene da ricercare. Questo tipo di investitore potrebbe preferire un portafoglio più rischioso anche se offre un rendimento atteso inferiore rispetto a un'opzione più sicura.

- Infine, se λ è zero l'intera componente di rischio scompare dalla funzione determinando così un investitore indifferente al rischio. Tale tipologia di investitore prenderà le sue decisioni basandosi esclusivamente sulla massimizzazione del rendimento atteso, senza preoccuparsi della volatilità.

Ipotesi fondamentale del modello è che gli investitori siano razionali ed avversi al rischio, come già descritto nel capitolo 2.1.

Questa ipotesi fa sì che la funzione di utilità U sia concava, ammettendo un massimo globale, calcolabile attraverso la derivata di primo ordine della funzione rispetto ai pesi e ponendola uguale a zero. Si procede con la derivata corrisponde a:

$$\frac{dU}{dW} = \theta - \lambda \Sigma W = 0$$

Da questa equazione, nel modello di Markowitz, si andavano a determinare i pesi di portafoglio ottimali, ottenendo così:

$$W = (\lambda \Sigma)^{-1} \theta$$

Black e Litterman sostengono che il portafoglio di mercato sia, per definizione, l'allocazione ottima in equilibrio. Quindi i pesi del portafoglio non sono da scoprire e calcolare ma sono già "rilevati" dal mercato (W_{mkt}) e sono uguali alla capitalizzazione di mercato di ogni asset. Partendo da questo presupposto i due studiosi hanno invertito il problema cercando dunque di determinare i rendimenti di equilibrio in eccesso impliciti. Risolvendo così la derivata non per W ma per θ . A questo specifico vettore di rendimenti, che rappresenta il consenso del mercato, si assegna il simbolo Π :

$$\theta = \lambda \Sigma W_{\text{mkt}} \Rightarrow \Pi = \lambda \Sigma W_{\text{mkt}}$$

(Nota: è stato risolto per θ e chiamato la soluzione Π).

Il parametro di avversione al rischio λ , sostituendo i vettori con scalari e riordinando l'equazione, può essere scritto come:

$$\lambda = \frac{E(R) - R_F}{\sigma^2}$$

Dove:

- $E(R)$ è il rendimento totale del portafoglio di mercato
- R_F è il rendimento risk-free
- $E(R) - R_F$ rappresenta il rendimento in eccesso o premio per il rischio
- σ^2 è la varianza del portafoglio di mercato

Il parametro λ è calcolato attraverso dati storici, poiché infatti si assume che l'avversione al rischio si a una caratteristica comportamentale tendenzialmente stabile nel tempo. Pertanto, tutti gli input necessari per il calcolo del parametro di avversione al rischio sono noti.

Quindi, attraverso la tecnica di ottimizzazione inversa, si è giunti all'ottenimento del vettore dei rendimenti impliciti in eccesso di equilibrio. Tale vettore costituisce il punto di partenza per incorporare le opinioni degli investitori. Se un investitore non presenta alcuna views andrà ad acquistare il portafoglio di mercato, seguendo i pesi determinati dalla capitalizzazione degli asset in quell'istante. Quindi il concetto di equilibrio, nel modello di Black e Litterman, è una base di partenza oggettiva che fornisce all'investitore uno stato neutrale che verrà adattato dalle opinioni, dalle intuizioni e dai vincoli dell'investitore stesso.

2.3 Osservazioni degli investitori

Il modello si basa sul presupposto che il mercato abbia aspettative sui rendimenti basate sulle informazioni rese disponibili al pubblico, le quali vengono incorporate direttamente nei prezzi. Ma spesso gli investitori presentano opinioni specifiche e personali riguardo ai rendimenti attesi degli asset di un portafoglio (magari derivanti da informazioni private, analisi approfondite o considerazioni personali) che differiscono dal rendimento di equilibrio implicito di mercato, ritenendo così che il mercato sopravvaluti o sottovaluti

determinati asset finanziari. Tali osservazioni possono essere espresse in due modalità: o in modo assoluto o in modo relativo.

- Osservazioni assolute: esprime l'aspettativa dell'investitore sul rendimento di un singolo asset senza metterlo a confronto con gli altri. Per esempio: "Mi aspetto che l'azione X avrà un rendimento annuo del 10%"
- Osservazioni relative: esprime aspettative sulla performance di un asset rispetto ad un altro. Per esempio: "Credo che il titolo europeo A sovraperformerà il titolo statunitense B del 5% il prossimo anno"

Ovviamente può sussistere una opinione del tipo "Secondo me il NASDAQ 100 sovraperformerà l'S&P 500 del 4%" con questo si vuole dimostrare che le opinioni possono coinvolgere più asset contemporaneamente e che non necessariamente il numero di attività che vengono confrontate tra loro debba essere il medesimo.

Ogni opinione sui rendimenti attesi viene espressa con un certo grado di confidenza (o fiducia): l'investitore così va a specificare in che misura ritiene valide le sue opinioni.

Matematicamente, la fiducia viene espressa come l'incertezza delle views e viene quantificata dalla varianza (o dalla sua deviazione standard). Il livello di confidenza da un punto di vista matematico indica di quanto i rendimenti attesi stimati si discostano dai valori di equilibrio, per questo si esprime con la varianza (oppure con deviazione standard): maggiore è la fiducia o il livello di confidenza, minore sarà l'incertezza (quindi minore sarà la deviazione standard/varianza). Al contrario una minore fiducia comporta maggiore incertezza e maggiore deviazione standard/varianza¹⁶. Il livello di incertezza modula l'impatto che ciascuna view esercita sui rendimenti attesi finali e quindi sulla composizione del portafoglio. Una view con alta fiducia (bassa incertezza) riceverà un peso maggiore nel processo di combinazione bayesiana. Ciò si traduce alla determinazione di un portafoglio i cui pesi si discostano in modo più significativo da quelli dell'equilibrio di mercato, riflettendo così la forte convinzione del gestore o investitore sulla sua view.

¹⁶ Nunnari, R.(2020). *Modello Black Litterman e asset allocation*. Altrivista.

2.4 Regola di Bayes e inferenza bayesiana

Per comprendere pienamente la logica e l'efficacia del modello di Black-Litterman è fondamentale definire e spiegare il concetto di inferenza bayesiana.

L'inferenza bayesiana è caratterizzata da un approccio dinamico all'apprendimento, in cui teorema di Bayes viene utilizzato come strumento chiave per aggiornare la probabilità di un'ipotesi man mano che nuove informazioni diventano accessibili.¹⁷

Il cuore di questo metodo inferenziale risiede nell'interpretazione della probabilità, la quale viene definita come misura della credibilità o della sicurezza che un individuo può avere riguardo al verificarsi di un particolare evento. La statistica bayesiana ci fornisce un solido strumento matematico per integrare le convinzioni pregresse "prior" con le nuove opinioni o considerazioni, producendo così delle "nuove credenze a posteriori".

Come già detto, il fulcro sottostante a tale metodo inferenziale è il teorema di Bayes che, teorizzato dal matematico inglese Thomas Bayes, permette di combinare due diverse fonti di informazioni (una conoscenza pregressa e una nuova evidenza) attraverso il calcolo della probabilità condizionata. La formula è:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}$$

Dove:

- $P(A | B)$ è la probabilità condizionata di A dato B o posterior
- $P(B | A)$ è la probabilità condizionata di B dato A o distribuzione condizionale
- $P(A)$ corrisponde alla probabilità di A definita anche come prior o distribuzione a priori
- $P(B)$ corrisponde alla probabilità di B ovvero alla costante di normalizzazione

Nella derivazione della distribuzione a posteriori, nel caso del modello Black-Litterman, la costante di normalizzazione $P(B)$ viene omessa. Infatti tale termine è un valore scalare

¹⁷ IBM Corporation (2023). *SPSS Statistics: Bayesian statistics*, IBM Documentation

costante il quale, come funzione fondamentale, ha lo scopo di garantire che l'area sottostante alla distribuzione finale sia pari a uno. Nel nostro contesto di stima del valore atteso della distribuzione a posteriori può essere trascurato per semplicità analitica e computazionale. Inoltre, l'assunzione fondamentale condivisa dal modello Black-Litterman con il modello di Markowitz è che i rendimenti seguano una distribuzione normale. Di conseguenza, se la distribuzione a priori (dei rendimenti di equilibrio) e la verosimiglianza (delle *views*) sono normali, anche la distribuzione a posteriori risultante rispetterà l'assunzione di normalità.

Quindi il modello Black-Litterman integra l'informazione empirica proveniente dal mercato con quella soggettiva degli investitori, avvalendosi di un approccio bayesiano. Vengono combinati i rendimenti in eccesso impliciti del mercato (derivati tramite reverse optimization) con le opinioni (*views*) degli investitori, da cui sarà possibile derivare i rendimenti attesi finali (distribuzione a posteriori). L'approccio di Bayes consente di trattare le opinioni degli investitori come informazioni soggettive. Questo offre il vantaggio cruciale di aggiornare periodicamente i parametri stimati grazie all'aggiunta di nuovi dati osservati nel tempo, superando così la problematica del modello di Markowitz legata all'utilizzo esclusivo di dati storici per valutare le grandezze necessarie per costruire il portafoglio ottimale.

In sintesi, il teorema di Bayes ci offre un meccanismo matematicamente rigoroso per aggiornare razionalmente le nostre convinzioni (che siano soggettive o basate su dati preesistenti) alla luce di nuove informazioni o prove. Ciò si traduce in un approccio efficace per l'inferenza statistica e particolarmente valorizzato in campi come la finanza, per la sua capacità di integrare diverse fonti di dati e informazioni.

2.4.1 La Distribuzione a Priori (Prior Distribution)

La prior è rappresentata dalla distribuzione di probabilità dei veri rendimenti attesi in eccesso (θ). Essa riflette la visione neutrale prima dell'introduzione di qualsiasi *view* soggettiva. Matematicamente, si assume che la distribuzione di θ sia centrata attorno al vettore dei premi al rischio di equilibrio (Π) e segua una distribuzione normale multivariata:

$$\theta \sim \mathcal{N}(\Pi, \tau \Sigma)$$

Dove:

- Π è il vettore dei premi al rischio di equilibrio impliciti, calcolati tramite l'ottimizzazione inversa.
- Σ è la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti in eccesso degli asset.
- τ è un coefficiente scalare che esprime la confidenza nella stima del prior. Un valore basso di τ indica una maggiore fiducia nei rendimenti di equilibrio, mentre un valore più alto implica una maggiore incertezza.

Poiché τ non è un parametro neutro ma determina quanto peso viene dato alla prior (rendimenti di equilibrio di mercato) rispetto alle views, la sua scelta è cruciale. Se τ ha un valore troppo basso, anche eventuali views “forti” avranno effetto ridotto facendo sì che il portafoglio rimanga ancorato ai rendimenti impliciti di equilibrio di mercato; se invece τ è troppo grande, la prior perde peso e il modello può diventare esageratamente reattivo alle opinioni soggettive, generando allocazioni principalmente concentrate sui titoli preferiti dall’investitore. Quindi si deve scegliere un τ che sia in grado di mantenere la formula di Black-Litterman in equilibrio tra le due fonti di informazioni, i rendimenti in eccesso di equilibrio del mercato e le views dell’investitore.

In letteratura vengono impiegate diverse strategie per determinare un valore appropriato da assegnare a τ . Nella formulazione originale del modello Black-Litterman e negli sviluppi successivi di He e Litterman, si assegnano tipicamente valori contenuti, dell’ordine di 0,025–0,05; ciò implica l’assegnazione di una relativa fiducia ai rendimenti di equilibrio di mercato, lasciando alle views il compito di correggere moderatamente tale prior. Invece, altri autori utilizzano $\tau = 1$ e in questo caso il prior viene impiegato con la sua “precisione naturale” (Σ^{-1}), né attenuata né amplificata, e il bilanciamento con le views dipende interamente dalla struttura e dalla confidenza di queste ultime.

2.4.2 La Distribuzione Condizionale (Likelihood)

La distribuzione condizionale, o funzione di verosimiglianza (*likelihood*), formalizza le *views* dell'investitore rappresentando la "nuova evidenza" da integrare nel modello. Uno

dei principali vantaggi del modello Black-Litterman è la possibilità per l'investitore di esprimere opinioni solo su un sottoinsieme limitato di asset.

Se un investitore formula k views su un universo di n asset, queste vengono espresse matematicamente nel modo seguente:

$$P \cdot \theta = Q + \varepsilon$$

Tale equazione è la traduzione matematica dell'affermazione: “La performance attesa di un portafoglio costruito secondo la mia opinione ($P \cdot E(R)$) è uguale alla previsione numerica (Q), aggiustata al termine di errore (ε) ammettendo un certo margine di incertezza” in cui il primo termine rappresenta il risultato teorico della opinione dell'investitore.

Dove:

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & \cdots & P_{k,n} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

- P è la matrice di identificazione (*link matrix*) di dimensione $k \times n$. Ogni riga identifica una view determinata dall'investitore mentre le colonne rappresentano tutti gli asset considerati.

I valori o pesi dati a P usualmente sono tre -1, 0 e +1 e tali valori vengono assegnati nel seguente modo: nel caso di una view relativa si assegna +1 all'asset che ci si aspetti sovraperformi (la parte long della “scommessa”); si darà il valore di zero ai titoli che non sono stati presi in considerazione da quella view; si darà il valore di -1 all'asset che sottoperformerà e complessivamente la somma delle righe deve esser sempre 0. Nel caso invece di una visione assoluta, si assegnerà il valore di +1 all'asset che ho preso in considerazione.

- θ è il vettore ($n \times 1$) dei rendimenti in eccesso (sconosciuti) degli asset.

- Q è il vettore ($k \times I$) che quantifica il rendimento atteso per ciascuna delle k views.
- ε è un vettore di termini di errore ($k \times I$), che rappresenta l'incertezza associata a ciascuna *view*. Si assume che gli errori seguano una distribuzione normale con media zero e una matrice di covarianza Ω .

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

La matrice Ω è una componente molto rilevante per il modello Black-Litterman poiché quantifica l'incertezza dell'investitore, infatti questa corrisponde alla matrice varianza-covarianza delle views. I due studiosi determinano matematicamente tale matrice come:

$$\Omega = \tau (P \Sigma P^T)$$

Dove:

- P è la matrice di identificazione (o link matrix) e P^T è la medesima matrice trasposta
- Σ è la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti in eccesso degli asset.
- τ è un parametro di fiducia scalare scelto dal gestore. Nel paper del Modello Black-Litterman è stato assegnato a tale scalare il valore di 0,025 ma altri ricercatori, che hanno ripreso tale modello, hanno assegnato a questo parametro il valore di uno.

La matrice di varianza-covarianza Σ viene calcolata in base ai dati storici dei rendimenti in eccesso del mercato rispetto al risk-free. Tale matrice viene parimenti usata anche nel modello di Markowitz e rappresenta il modello di rischio del mercato, catturando la volatilità di ogni asset e la correlazione tra di essi. Questa componente è la variabile più ancorata al passato poiché si assume che la struttura del rischio e della correlazione tra gli asset sia relativamente stabile nel tempo.

Se si vuole andare a determinare la fiducia dell'investitore sulle proprie views è sufficiente andare ad invertire la matrice Ω , ovvero Ω^{-1} . Se l'investitore è sicuro della propria opinione assegnerà alla view una varianza bassa, il suo inverso darà un numero

elevato, comportando un peso elevato della view nel modello Black-Litterman. Al contrario se l'investitore è insicuro della propria visione, assegnerà a questa una alta varianza che si tradurrà in un peso basso, limitandone l'impatto sul risultato finale di allocazione.

Riunendo questi elementi, si può definire formalmente la likelihood $P(Q|\theta)$. Essa è una distribuzione Normale Multivariata con media $P\theta$ e matrice di varianza-covarianza Ω :

$$P(Q | \theta) \sim \mathcal{N}(P\theta, \Omega)$$

2.4.3 La Distribuzione a Posteriori (Posterior Distribution)

La distribuzione a posteriori $P(\theta | Q)$ è il risultato finale del processo di inferenza bayesiana e corrisponde al nuovo vettore di stime dei rendimenti attesi, fondendo insieme le due fonti di informazioni fin ora trattate: la distribuzione a priori, ovvero i rendimenti di equilibrio di mercato e la verosimiglianza (o likelihood), cioè le opinioni soggettive degli investitori.

Poiché le distribuzioni appena riportate sono delle Normali allora, per la proprietà di coniugio della distribuzione Normale, anche la distribuzione a posteriori sarà una Normale Multivariata.

$$\theta | Q \sim \mathcal{N}(\mu_{BL}, M)$$

Dove μ_{BL} è la media a posteriori e M è la matrice di varianza-covarianza a posteriori.

La media della distribuzione a posteriori, μ_{BL} , è il nuovo vettore di rendimenti attesi e costituisce l'output principale del modello Black-Litterman. In sintesi, si va a calcolare il vettore dei rendimenti attesi attraverso l'incorporazione delle due fonti di informazioni. La cui formula centrale è:

$$\mu_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1}Q]$$

Questa equazione rappresenta una media ponderata tra i rendimenti in eccesso di equilibrio del mercato o *prior* (Π) e i rendimenti impliciti nelle *views* (Q). I pesi della

ponderazione sono determinati dalle cosiddette matrici di precisione, ovvero l'inverso delle rispettive matrici di covarianza ($(\tau\Sigma)^{-1}$ e Ω^{-1}). È giusto ricordare che l'osservazione a cui è associata una minore incertezza e quindi una maggiore fiducia riceve un peso maggiore nella stima finale. Il secondo termine della formula $[(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q]$ corrisponde alla somma delle due fonti di informazioni entrambe pesate per la rispettiva “fiducia” ed è il termine più rilevante; mentre il primo termine $[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}$ ha una duplice natura in quanto corrisponde alla varianza a posteriori ed agisce come “normalizzatore”: la parte interna è la somma dei pesi che invertita “normalizza” il secondo termine ottenendo la media finale.

Come appena accennato la matrice varianza-covarianza (M) della distribuzione posterior, che rappresenta l'incertezza dei rendimenti attesi sintetizzati dalla media ponderata delle due fonti di informazioni, viene espressa come:

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}$$

L'intuizione di questa formula è che la precisione totale a posteriori (cioè esattamente l'inverso della varianza M) è semplicemente la somma della precisione del prior ($(\tau\Sigma)^{-1}$) e della precisione della likelihood ($P^T \Omega^{-1} P$). Poiché la precisione finale (M^{-1}) è la somma delle due, quindi maggiore di entrambe, la sua controparte, l'incertezza finale (M) è inferiore all'incertezza di partenza. In sintesi, aggiungere nuove informazioni (le views) al sistema riduce sempre l'incertezza complessiva (M) della stima finale dei rendimenti.

È fondamentale notare che M rappresenta l'incertezza nella stima della media a posteriori, non la varianza totale dei rendimenti da utilizzare nell'ottimizzazione finale. Per ottenere la matrice di varianza-covarianza finale (Σ_{BL}), che incorpora sia l'incertezza originale del mercato sia quella aggiunta dal processo di stima, si somma la covarianza originale di mercato a M:

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + M$$

Questi due output, μ_{BL} e Σ_{BL} , sono gli input finali che verranno utilizzati nel processo di ottimizzazione media-varianza per calcolare i pesi ottimali del portafoglio.

2.4.4 L'Ottimizzazione Finale e la Determinazione dei Pesi del Portafoglio

In seguito alla generazione degli output chiave del modello Black-Litterman, che corrispondono al nuovo vettore dei rendimenti attesi a posteriori (μ_{BL}) e alla matrice di varianza-covarianza finale (Σ_{BL}), il processo culmina con la determinazione dei pesi ottimali del portafoglio. Questa ultima fase, che impiega il processo di ottimizzazione media-varianza della MPT di Markowitz, viene però alimentata da input più robusti e aggiornati.

L'obiettivo di questa fase è individuare la combinazione ottimale dei pesi degli asset (w) in modo che l'utilità dell'investitore sia massimizzata, ovvero che si realizzi il miglior trade-off tra massimizzazione del rendimento e minimizzazione della varianza o rischio.

La funzione che verrà massimizzata sarà la seguente funzione di utilità quadratica, a cui sono stati immessi gli output del modello Black-Litterman:

$$\max_w U(w) = w^T \mu_{BL} - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma_{BL} w \quad \text{con } \lambda > 0$$

Dove:

- $w^T \mu_{BL}$ è il rendimento atteso del portafoglio finale
- $w^T \Sigma_{BL} w$ è la varianza del portafoglio finale
- λ è il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, nel nostro caso si impone $\lambda > 0$ affinché rifletta la propensione di avversione al rischio dell'investitore penalizzando così il rischio.

La funzione può essere soggetta a diversi vincoli definiti a seconda degli output che si vogliono ottenere. Uno dei vincoli essenziali è quello definito “di budget” che assicura che tutto il capitale venga allocato quindi che la somma dei pesi sia uguale a 1 (come già illustrato nel capitolo dedicato a Markowitz):

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

La soluzione di questo problema di massimizzazione vincolata è il vettore di pesi ottimali w^* , che corrisponde all'asset allocation finale determinata attraverso il modello Black-Litterman. In definitiva si va così a definire un portafoglio che è la sintesi rigorosa tra l'equilibrio economico del mercato e le views del gestore, risolvendo al contempo il problema delle allocazioni estreme tipiche del modello MPT e traducendo le convinzioni soggettive in deviazioni disciplinate.

2.5 Criticità e problematiche del modello

Il modello Black-Litterman presenta diverse sfide implementative e limiti teorici. La sua complessità, dovuta ad interazioni tra componenti statistiche e soggettive, rende l'implementazione non banale. Pur essendo un punto di forza l'integrazione delle views, questa introduce anche un rischio: opinioni non adeguatamente calibrate possono distorcere l'allocazione, generando portafogli troppo concentrati o non coerenti con il profilo di rischio desiderato. Il modello richiede scelte soggettive nella specificazione delle views, nella determinazione della confidenza (Ω) e nel peso relativo dato al prior di mercato (tramite τ), ed è sensibile a input rumorosi come la stima della matrice di covarianza. Inoltre si basa sull'equilibrio di mercato implicito e su ipotesi semplificative (es. normalità, formazione delle aspettative) che nella pratica possono essere violate. Tuttavia, queste debolezze non ne annullano il valore: al contrario, il framework offre una struttura esplicita per integrare in modo disciplinato informazioni di mercato con opinioni soggettive, permettendo di costruire portafogli più consapevoli, combinando stabilità e flessibilità.¹⁸

¹⁸ Cabrera J., Collin V.(2024).*Black-Litterman Model*. FinancialEdge.

3 Costruzione di un Indicatore di Momentum Sintetico

Si procederà ora a spiegare cos'è il fattore Momentum, la sua derivazione, la sua applicazione a livello di analisi tecnica dei mercati finanziari e trading, introducendo i vari indicatori tecnici che lo descrivono e che saranno utilizzati al fine della costruzione di un indicatore Momentum sintetico.

3.1 Il Fattore Momentum

Il fattore Momentum è uno dei “fatti stilizzati” (osservazioni empiriche considerate verità alle quali la teoria economica si deve adeguare) più robusti e persistenti osservati sui mercati finanziari. Tale fattore descrive un comportamento empirico che si estrapola dai mercati finanziari: i titoli che hanno sovraperformato nel recente passato tendono a continuare a farlo nel breve-medio periodo, mentre gli asset perdenti mostrano ulteriore debolezza. Questo effetto è stato documentato e visualizzato in molte asset class e contesti geografici diversi, ammettendone così la rilevanza e rendendolo un oggetto di studio centrale sia nella finanza comportamentale sia nei modelli razionali estesi.

Il fattore Momentum è stato individuato e definito per la prima volta da Jegadeesh e Titman (1993) nella loro ricerca: “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency”. I due studiosi mostrano nel loro lavoro che comprando i titoli cosiddetti “winners” (azioni con alti rendimenti nei mesi precedenti) e vendendo i “losers” (titoli con bassi rendimenti passati) si riescono a generare significativi rendimenti anomali positivi su orizzonte di 3-12 mesi.

Tale fattore rappresenta una violazione della efficienza debole del mercato impostata da Eugene Fama, il quale assegna ai prezzi dei titoli la capacità di rispecchiare solo le informazioni contenute nei prezzi passati, definendo che le variazioni passate dei prezzi non sono utili a prevedere movimenti futuri. Il fattore Momentum contrasta apertamente e direttamente tale proprietà riconosciuta ai mercati finanziari tanto che, Jegadeesh e Titman, nella loro ricerca individuano come una delle spiegazione dell'effetto Momentum proprio l'autocovarianza positiva dei residui: quando un titolo azionario riceve una nuova informazione rilevante (come per esempio l'annuncio degli utili, un cambiamento del management ecc) il prezzo dell'azione non si adegua del tutto e

immediatamente alla nuova news, bensì parte del movimento si verificherà nelle settimane successive.

La spiegazione teorica del fattore Momentum è ancora in fase di dibattito ed elaborazione. In letteratura la spiegazione di tale anomalia si articola su due approcci principali: i modelli razionali che attribuiscono alle frizioni di mercato, ai flussi di capitale dinamici e agli intermediari istituzionali la capacità di generare slancio nei prezzi anche senza irrazionalità pura; la finanza comportamentale che individua alcuni bias cognitivi, come l'overconfidence, il conservatism bias e l'attribution bias, gli inneschi e il promotori dell'effetto Momentum sui prezzi; queste due linee di pensiero non sono necessariamente mutualmente esclusive, potendo coesistere nella spiegazione di tale fattore.

3.1.1 Fattore Momentum nei modelli razionali

Modelli razionali - Vayanos e Woolley nel loro paper "An Institutional Theory Of Momentum And Reversal" hanno dato un importante contributo nel cercare di spiegare il fattore Momentum razionalmente, attraverso lo studio delle dinamiche strutturali della "delegazione del capitale" fatta dagli investitori e delle "inerzie nei flussi" protratta dei gestori dei fondi, andando così a determinare una spiegazione alternativa alle supposizioni sviluppate dalla finanza comportamentale. Sui mercati finanziari la maggior parte del capitale non è gestito direttamente dal singolo investitore, ma è affidato a intermediari, fondi o gestori che prendono decisioni per conto terzi. Ovviamente la capacità di gestione e scelta degli asset, la capacità di generare sovraperformance rispetto al benchmark di riferimento e la reputazione sono componenti decisive su cui gli investitori stanno molto attenti. Gli investitori istituzionali, quindi, affronteranno un rischio commerciale, che è funzione delle loro performance e della loro reputazione, che si concretizza con flussi in entrata o in uscita dai fondi da loro gestiti. Ne consegue che i gestori, in caso di movimenti di prezzo iniziali su un determinato titolo dovuti all'incorporazione di nuove informazioni, andranno ad aggiustare i propri portafogli con ritardo e gradualità (inerzia dei flussi) proprio per attenuare il rischio commerciale e assecondare le aspettative degli investitori che li hanno delegati.

Il meccanismo funziona così: un'oscillazione iniziale del prezzo crea un primo segnale di performance inducendo gli investitori a investire sui fondi che sono percepiti come più performanti e che sono stati in grado di catturare quella oscillazione iniziale, ma siccome l'aggiustamento dei portafogli è graduale tali nuovi flussi amplificano il movimento

iniziale dando slancio ai prezzi e costituendo così l'effetto Momentum. In altre parole, l'informazione si propaga nei prezzi non in modo istantaneo e uniforme, ma attraverso una catena dinamica: la "delegazione del capitale" genera un canale attraverso cui i segnali di prezzo causano flussi ritardati e l'inerzia di questi flussi fa sì che venga mantenuto lo slancio dei prezzi attorno alle medesime azioni vincenti. Questo meccanismo genera autocorrelazione temporanea nei rendimenti pur mantenendo gli agenti razionali: anche se i gestori agiscono coerentemente con incentivi e vincoli (massimizzazione dell'utilità soggetta a rischio commerciale e reputazionale), la struttura del sistema induce ritardi nell'incorporazione dell'informazione comportando la continuazione di trend già innescati precedentemente.¹⁹

3.1.2 Fattore Momentum nella finanza comportamentale

La linea interpretativa alternativa alla spiegazione dell'anomalia del Momentum proviene dalla finanza comportamentale, trovando una solida giustificazione nei meccanismi cognitivi che producono sotto-reazioni iniziali e l'amplificazione dei trend. Gli studiosi attribuiscono ad alcuni bias cognitivi e ad alcune euristiche comportamentali le cause scatenanti del fattore Momentum.

Daniel, Hirshleifer e Subrahmanyam (1998) riconduce il Momentum a due meccanismi psicologici: l'overconfidence, cioè la tendenza degli investitori a sovrastimare le proprie capacità e quindi la precisione con cui sono in grado di anticipare i trend futuri, e il self-attribution bias, ovvero la tendenza ad attribuire i successi delle proprie performance alle proprie abilità e gli insuccessi a fattori esterni. Nel contesto dei mercati, un investitore overconfident che riceve un segnale positivo (derivante per esempio da studi da lui condotti o da informazioni private ecc.) tenderà a dare a questo segnale un peso eccessivo, spingendo il prezzo del titolo al di sopra del suo valore fondamentale (sovra-reazione iniziale). Tale effetto verrà amplificato dal self-attribution bias, infatti, quando notizie successive confermeranno la previsione iniziale dell'investitore, la sua fiducia nelle proprie capacità aumenterà in modo irrazionale, promuovendo un'ulteriore spinta dei prezzi nella stessa direzione, e generando così il fattore Momentum. La correzione di questa sovra-reazione avverrà solo nel lungo periodo, quando nuove informazioni sveleranno l'errore di valutazione iniziale, portando a un'inversione dei rendimenti.

¹⁹ Vayanos, D., Woolley, P.(2008). *An Institutional Theory of Momentum and Reversal*. National Bureau of Economic Research.

Una visione alternativa sostiene che l'effetto Momentum sia causato non da una sovra-reazione, ma da una sotto-reazione iniziale alle notizie. Il modello di Barberis, Shleifer e Vishny (1998) individua nei seguenti due bias la spiegazione di questo fenomeno; il conservatism bias descrive la tendenza degli individui ad aggiornare le proprie convinzioni troppo lentamente di fronte a nuove evidenze o notizie che vengono rilasciate; quindi a causa del conservatorismo, il prezzo di un'azione reagisce solo parzialmente a una notizia positiva, incorporando l'informazione in modo graduale. Questo lento adeguamento genera rendimenti positivi persistenti e, quindi, Momentum. L'euristica della rappresentatività interviene in un secondo momento, dopo una lunga serie di notizie positive gli investitori iniziano a credere erroneamente che tale sequenza sia "rappresentativa" di una tendenza stabile e duratura, portandoli a sovrastimare il potenziale di crescita e a spingere i prezzi troppo in alto. Anche il modello di Hong e Stein (1999) si basa sulla sotto-reazione, ma senza ricorrere a specifici bias cognitivi. Essi ipotizzano due tipi di agenti razionali ma con informazioni diverse: i "news watchers", che agiscono sulla base di informazioni private e i "momentum traders", che basano le loro strategie unicamente sui prezzi passati. L'assunzione cruciale è che le informazioni fondamentali si diffondano lentamente nel mercato (slow dissemination of information). Inizialmente saranno solo i "news watchers" a reagire, causando una sotto-reazione del prezzo e solo in un secondo momento, i così detti "momentum traders" osservando il trend iniziale, interverranno e spingeranno il prezzo verso successiva sovra-reazione, che verrà corretta solo nel lungo termine.

Un'ulteriore spiegazione, proposta da Grinblatt e Han (2002), si fonda sull'effetto disposizione, ovvero la tendenza documentata da Shefrin e Statman (1985) per cui gli investitori sono predisposti a vendere troppo presto i titoli in guadagno (winners) e a trattenere troppo a lungo quelli in perdita (losers). Quando un titolo riceve notizie positive e il suo prezzo sale, gli investitori con effetto disposizione iniziano a vendere per "realizzare" il profitto e questa pressione di vendita prematura frena l'ascesa del prezzo, causando una sotto-reazione rispetto al suo nuovo valore fondamentale. Al contrario, di fronte a notizie negative, gli stessi investitori si rifiutano di vendere i titoli in perdita, sperando in un recupero, questa assenza di pressione di vendita attenua la discesa del prezzo, causando anche in questo caso una sotto-reazione. L'effetto Momentum emergerà solo quando gli investitori più razionali identificheranno questo divario tra prezzo di

mercato e valore fondamentale, iniziando così a comprare i winners (che sono ancora a buon mercato) e a vendere allo scoperto i losers (che sono ancora sopravvalutati), e la loro azione graduale stabilirà il trend di prezzo osservabile come Momentum.²⁰

In sintesi, la robustezza e la pervasività del fattore Momentum, ampiamente documentate in letteratura, lo rendono più di una semplice anomalia teorica: esso costituisce una solida base empirica per lo sviluppo di strategie sistematiche di investimento e di trading. È proprio questa caratteristica che permette di creare un ponte con il framework di Black-Litterman e di superarne uno dei limiti più discussi: la dipendenza da views soggettive e discrezionali. In questa prospettiva, il fattore Momentum può essere parificato a un indicatore del sentiment di mercato, capace di sostituire le singole e discrezionali opinioni individuali con una view più robusta, aggregata e quantitativa, dedotta direttamente dal comportamento collettivo del mercato.

3.2 L'indicatore Momentum

Il Fattore Momentum, come descritto nel capitolo precedente, è il principio teorico che documenta la persistenza dei rendimenti passati. Per tradurre questa osservazione accademica in una strategia di investimento operativa, gli analisti e i trader si avvalgono di una serie di indicatori cioè strumenti quantitativi che aggregano informazioni storiche di prezzo e volume per estrarre segnali di forza, inversione o continuità di trend del "Fattore Momentum" su un determinato asset.

Dunque, se il "Fattore Momentum" è il fenomeno, gli "indicatori" sono gli strumenti utilizzati per misurarlo trasformando i dati grezzi di prezzo e volume in segnali standardizzati che possono essere interpretati per generare decisioni di trading. Nello specifico gli indicatori tecnici di Momentum sono strumenti quantitativi che vanno oltre la semplice analisi direzionale dei prezzi, la loro funzione primaria è quella di misurare le caratteristiche intrinseche di un trend, quali la sua forza (o intensità), la sua velocità di variazione e la sua persistenza nel tempo. Un movimento di prezzo, infatti, può essere lento e incerto oppure rapido e sostenuto da una forte convinzione degli operatori.

²⁰ Dhankar, R. e Maheshwari, S.(2016). *Behavioural Finance: A New Paradigm to Explain Momentum Effect*. University of Delhi.

Questa capacità di quantificare l'impeto di un movimento di prezzo li rende strumenti particolarmente efficaci per interpretare il sentiment prevalente sul mercato. Un trend rialzista rapido e supportato da volumi crescenti, ad esempio, è espressione di un forte sentiment rialzista collettivo. In questa prospettiva, l'informazione aggregata estratta da questi strumenti può essere parificata a una proxy quantitativa e stabile del sentiment di mercato, capace di sostituire le opinioni singole e discrezionali con un segnale più oggettivo e basato sul comportamento aggregato degli investitori.²¹

Infatti l'idea di fondo sviluppata da George C. Lane, padre dell'oscillatore stocastico (indicatore Momentum molto usato), è che il Momentum precede il prezzo. Nello specifico, si osserva che in un forte trend rialzista, i prezzi di chiusura di un asset tendono a raggrupparsi vicino al massimo del range di trading di quel periodo mentre un forte trend ribassista, i prezzi di chiusura tendono a raggrupparsi vicino al minimo del range di trading.

Gli oscillatori stocastici, sottogruppo degli indicatori, sono degli strumenti matematici progettati per quantificare il trend di mercato e presentano la caratteristica di produrre valori che “oscillano” entro un determinato intervallo prefissato (tipicamente tra 0-100). Un valore alto indica che il prezzo sta chiudendo ripetutamente vicino ai massimi recenti, confermando un forte Momentum rialzista mentre un valore basso (ad esempio < 20) segnala chiusure ripetute vicino ai minimi recenti, confermando un forte Momentum ribassista.

Nei paragrafi seguenti, verranno analizzati in dettaglio i principali indicatori tecnici selezionati per questo studio, scelti per la loro capacità di catturare diverse sfumature del Momentum di mercato.

3.2.1 Relative Strength Index (RSI)

L'RSI è un oscillatore sviluppato da Welles Wilder che misura la velocità e l'entità delle recenti variazioni di prezzo di un titolo per individuarne le condizioni di ipercomprato e ipervenduto, inoltre tale oscillatore permette di individuare i titoli che sono pronti ad

²¹ IG.Momentum trading strategies: a beginner's guide. ig.com

un'inversione di trend o a un pullback correttivo del prezzo. Il valore dell'RSI varia tra 0 e 100; tradizionalmente un valore dell'indicatore pari o superiore a 70 indica una condizione di ipercomprato mentre un valore pari o inferiore di 30 indica una condizione di ipervenduto, ma tali livelli possono essere adattati.

L'RSI o indice di forza relativa confronta la forza di un titolo nei giorni in cui i prezzi salgono con la forza del titolo stesso nei giorni in cui i prezzi scendono in un determinato periodo, usualmente fatto corrispondere a 14 giorni, utilizzando una finestra temporale mobile. In pratica tale indice rappresenta una forma normalizzata del rapporto tra guadagni medi e le perdite medie, così quando l'RSI incrocia certe soglie genera segnali di acquisto o vendita.

Per il calcolo dell'RSI è necessario dapprima calcolare il guadagno e la perdita media che il titolo ha conseguito in un certo periodo di tempo che, come già detto, la prassi lo fa corrispondere a 14 giorni.²²

$$\text{AvgGain}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t \max(P_i - P_{i-1}, 0)$$

e

$$\text{AvgLoss}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t \max(P_{i-1} - P_i, 0)$$

dove N sono i periodi. In seguito, viene definito il Relative Strength come:

$$\text{RS}_t = \frac{\text{AvgGain}_t}{\text{AvgLoss}_t}$$

per poi definire l'RSI:

²² Ferdnando, J. (2024). *Relative Strength Index (RSI) Indicator Explained With Formula*. Investopedia.

$$RSI_t = 100 - \frac{100}{1 + RS_t}$$

3.2.2 Money Flow Index (MFI)

Il Money Flow Index (MFI) è un oscillatore di Momentum che misura la pressione di acquisto e di vendita su un'attività finanziaria, combinando i prezzi e i volumi di scambio. Tale indicatore, sviluppato da Gene Quong e Avrum Soudack, è spesso descritto come un "RSI ponderato per i volumi", poiché la sua struttura di calcolo e interpretazione è simile a quella del Relative Strength Index, ma con la fondamentale aggiunta dei volumi come fattore di ponderazione.

La logica sottostante è che il volume rappresenta la convinzione, la partecipazione e l'intensità che accompagnano un movimento di prezzo, un rialzo accompagnato da volumi crescenti è molto più “credibile” di un rialzo con volumi bassi. L'MFI cerca, quindi, di quantificare il "flusso monetario" (money flow) in entrata o in uscita da un titolo in un determinato periodo di tempo (di solito 14 giorni), fornendo un segnale più robusto rispetto agli indicatori basati esclusivamente sui prezzi. Anche l'MFI, come l'RSI, assume un range di valori che va da 0 a 100 e come l'RSI presenta due livelli soglia: un valore maggiore o uguale ad 80 comporta che il mercato si possa trovare in una condizione di ipercomprato, se invece viene superato il valore di 20 è un possibile segnale di ipervenduto.

Il calcolo dell'MFI si articola nei seguenti passaggi:

1. Calcolo del Prezzo Tipico (Typical Price): per ogni periodo, si calcola un prezzo medio che rappresenta l'attività di trading della giornata, cercando di limitare eventuali influenze dovute a spike momentanee.

$$TP_t = \frac{H_t + L_t + C_t}{3}$$

Dove H_t , L_t e C_t sono rispettivamente il prezzo massimo, minimo e di chiusura del periodo t .

2. Calcolo del Flusso Monetario Grezzo (Raw Money Flow): il Prezzo Tipico viene moltiplicato per il volume del periodo per quantificare il valore monetario delle transazioni.

$$RMF_t = TP_t \times V_t$$

Dove V_t è il volume del periodo t .

3. Identificazione dei Flussi Positivi e Negativi: si confronta il Prezzo Tipico di oggi con quello di ieri.
 - Se il Prezzo Tipico odierno è maggiore di quello di ieri, il Flusso Monetario del giorno è considerato Positivo.
 - Se il Prezzo Tipico odierno è minore, il Flusso Monetario è considerato Negativo.
4. Calcolo del Rapporto dei Flussi Monetari (Money Flow Ratio): si sommano tutti i Flussi Monetari Positivi e tutti i Flussi Monetari Negativi avvenuti negli ultimi n periodi (es. 14). Si calcola poi il loro rapporto.

$$\text{Money Flow Ratio} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Flussi Monetari positivi}}{\sum_{i=1}^n \text{Flussi Monetari negativi}}$$

5. Calcolo Finale dell'MFI: il rapporto viene normalizzato in un oscillatore che varia tra 0 e 100, utilizzando una formula analoga a quella dell'RSI.²³

$$MFI = 100 - \frac{100}{1 + \text{Money Flow Ratio}}$$

3.2.3 Percent B (%B) di Bollinger

L'indicatore Percent B (%B) è uno oscillatore di Momentum che deriva direttamente delle Bande di Bollinger che sono uno strumento di analisi tecnica sviluppato da John Bollinger per misurare la volatilità e definire i livelli di prezzo relativi. Le bande sono composte da tre linee tracciate su un grafico dei prezzi: una banda centrale, che è una media mobile

²³ Gratton, P.(2025). *Money Flow Index (MFI): Definition and Uses*. Investopedia

semplice (tipicamente a 20 periodi), e due bande esterne, una superiore e una inferiore, posizionate a un numero k di deviazioni standard (solitamente $k=2$) sopra e sotto la banda centrale.

La distanza tra le bande si allarga e si restringe in funzione della volatilità del mercato, creando un canale dinamico. La logica sottostante è che i prezzi tendono a rimanere all'interno di questo canale, rendendo le bande stesse dei livelli di supporto e resistenza dinamici e le chiusure al di fuori di esse eventi statisticamente significativi. Per quantificare la posizione esatta del prezzo all'interno di questo canale dinamico, si utilizza l'indicatore %B che di fatto indica dove il prezzo si trova rispetto alle Bande di Bollinger.²⁴

L'indicatore %B normalizza la posizione del prezzo di chiusura rispetto alle bande, esprimendola come un valore che ne indica la posizione relativa. Per il calcolo di questo indicatore è necessario dapprima determinarsi le Bande di Bollinger, articolandosi nei seguenti passaggi:

1. Calcolo della banda centrale (o Middle Band): essa corrisponde alla media mobile semplice su N periodi (convenzionalmente su 20), che funge da riferimento per il trend di medio termine.

$$SMA_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t C_i$$

dove C_i sta per prezzo di chiusura.

2. Calcolo delle Bande Esterne (Upper e Lower Bands): sono due linee posizionate a k deviazioni standard (convenzionalmente $k=2$) sopra e sotto la banda centrale.

$$Upper_t = SMA_t + k \sigma_t, \quad Lower_t = SMA_t - k \sigma_t,$$

dove di solito $k = 2$

²⁴ Thompson, C.(2024).*Bollinger Bands: What They Are, and What They Tell Investors*.Investopedia

3. Calcolo %B dove L'indicatore %B esprime la posizione dell'ultimo prezzo di chiusura C_t come una percentuale relativa all'ampiezza del canale. La formula è:

$$\%B_t = 100 \frac{C_t - \text{Lower}_t}{\text{Upper}_t - \text{Lower}_t}$$

Il risultato è un valore che viene interpretato come segue:

- Un valore di 1 (o 100%) indica che il prezzo ha chiuso sulla banda superiore.
- Un valore di 0.5 (o 50%) indica che il prezzo ha chiuso sulla media mobile centrale.
- Un valore di 0 indica che il prezzo ha chiuso sulla banda inferiore.

Valori superiori a 1 (o 100) segnalano una chiusura al di sopra della banda superiore, indicando una forza eccezionale del trend rialzista (potenziale breakout). Valori inferiori a 0 indicano una chiusura al di sotto della banda inferiore, segnalando un forte Momentum ribassista. In questo modo, %B non solo identifica condizioni di ipercomprato/ipervenduto relative alla volatilità, ma aiuta anche a quantificare la forza di un movimento di prezzo.

Quindi, l'utilità del %B risiede nella sua capacità di normalizzare il prezzo rispetto alla sua stessa volatilità. Mentre un forte rialzo del prezzo può sembrare significativo, %B permette di valutare se tale movimento è statisticamente estremo rispetto al comportamento recente dell'asset. Ciò lo rende un efficace strumento per identificare condizioni di ipercomprato/ipervenduto dinamiche e per confermare la forza dei trend.²⁵

3.2.4 Ultimate Oscillator (UO)

L'Ultimate Oscillator, creato da Larry Williams nel 1976, è un indicatore di Momentum progettato per ridurre i falsi segnali tipici degli oscillatori basati su un singolo orizzonte

²⁵ Fahoum, A.(2019). *Use The Power of Bollinger Bands As An Oscillator with %B*. Market Vidhya.

temporale. Per raggiungere questo obiettivo, l'UO integra e pondera tre diversi orizzonti temporali: di breve (solitamente 7), di medio (14) e di lungo (28 periodi) periodo in un singolo valore normalizzato tra 0 e 100.²⁶

Il suo calcolo si basa sui concetti di "Buying Pressure" (pressione d'acquisto) e "True Range" (l'ampiezza reale del movimento di prezzo). Per ogni periodo, si definiscono:

1. Buying Pressure che misura la “spinta all’acquisto” in un dato periodo.

$$BP_t = C_t - \min(L_t, C_{t-1})$$

dove L_t corrisponde al prezzo minimo registrato nel corso del periodo e C_t il prezzo di chiusura del periodo t .

2. True Range che misura la gamma effettiva di movimento di prezzo in un dato periodo, tenendo conto di eventuali gap di apertura.

$$TR_t = \max(H_t, C_{t-1}) - \min(L_t, C_{t-1})$$

dove H_t è il prezzo massimo registrato nel corso del periodo t .

Successivamente, si sommano i valori di BP e TR su ciascuno dei tre orizzonti temporali (7, 14 e 28 periodi). L'oscillatore finale è una media ponderata dei rapporti tra BP e TR su queste tre finestre, con un peso maggiore assegnato all'orizzonte di breve termine:

$$UO_t = 100 \times \frac{4 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^7 BP_i}{\sum_{i=1}^7 TR_i} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{14} BP_i}{\sum_{i=1}^{14} TR_i} \right) + 1 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{28} BP_i}{\sum_{i=1}^{28} TR_i} \right)}{4 + 2 + 1}$$

Il risultato è un oscillatore compreso tra 0 e 100 che riflette uno slancio più smussato e affidabile. I segnali più importanti sono generati dalle divergenze rialziste e ribassiste tra l'UO e l'andamento dei prezzi, specialmente quando queste si formano dopo che l'oscillatore ha raggiunto livelli di ipervenduto (sotto 30) o ipercomprato (sopra 70).

²⁶ Fidelity. *Ultimate Oscillator (UO)*. Fidelity Investments.

3.2.5 Oscillatore Stocastico RSI (Stochastic RSI)

L'Oscillatore Stocastico RSI è un indicatore di "secondo livello" che misura il "Momentum del Momentum", sviluppato per aumentare la sensibilità e la reattività del tradizionale RSI; applica la logica dell'oscillatore Stocastico non ai dati di prezzo, ma alla serie storica dei valori dell'RSI stesso. L'obiettivo è misurare non solo la forza del prezzo (come fa l'RSI), ma anche la velocità con cui l'RSI si muove all'interno del proprio range storico, catturando in anticipo accelerazioni o decelerazioni di Momentum.

Il processo prevede dapprima il calcolo dell'RSI su N periodi (solitamente 14), utilizzando una finestra temporale mobile, e in seguito di ottiene la seguente formula:

$$StochRSI_t = 100 \times \frac{RSI_t - \min_{i=t-N+1}^t RSI_i}{\max_{i=t-N+1}^t RSI_i - \min_{i=t-N+1}^t RSI_i}$$

dove $\min_{i=t-N+1}^t RSI_i$ è il valore minimo che l'RSI ha assunto nei N periodi che vanno da $t - N + 1$ fino a t mentre $\max_{i=t-N+1}^t RSI_i$ è il valore massimo che l'RSI ha raggiunto negli stessi N periodi.

Il risultato è un oscillatore che si muove in una scala normalizzata tra 0 e 100. Valori superiori a 80 indicano che l'RSI sta viaggiando vicino al suo massimo recente, segnalando un Momentum rialzista estremamente forte. Al contrario, valori inferiori a 20 indicano che l'RSI è prossimo al suo minimo, segnalando un marcato Momentum ribassista.

La sua elevata reattività, derivante dalla sua natura di indicatore di "secondo ordine", permette di generare segnali più tempestivi rispetto all'RSI tradizionale. Esso fornisce quindi una misura diretta della velocità del trend.

3.3 La logica della selezione degli indicatori

In conclusione, la selezione dei cinque indicatori tecnici presentati in questo capitolo non è casuale, ma risponde a una precisa logica metodologica: quella di catturare una visione

completa del Momentum di mercato attraverso l'analisi delle sue quattro dimensioni fondamentali: prezzo, volume, volatilità e velocità.

Ogni indicatore fornisce un contributo unico. Strumenti come l'RSI e l'Ultimate Oscillator si concentrano sulla forza intrinseca del prezzo. L'MFI arricchisce questa analisi incorporando i volumi di scambio, fornendo una misura della convinzione che sostiene il trend. Il %B di Bollinger contestualizza il movimento del prezzo rispetto alla sua volatilità storica, normalizzando la forza del segnale. Infine, lo Stocastico RSI agisce come un indicatore di "secondo ordine", misurando direttamente la velocità con cui il Momentum stesso sta accelerando o decelerando.

Attraverso l'aggregazione di questi segnali complementari, l'indicatore sintetico che verrà costruito nel paragrafo successivo mira a essere una proxy del sentiment di mercato più robusta e completa, riducendo i falsi segnali e fornendo una base quantitativa solida per la generazione delle views nel modello Black-Litterman.

4 Metodologia Empirica e Design del Backtest

In questo capitolo verrà descritta in dettaglio l'architettura e la struttura del backtesting quantitativo sviluppato per questa ricerca, rispondendo alla domanda: "Com'è stato costruito e condotto l'esperimento?". Si analizzerà il design sperimentale, la gestione dei dati, la costruzione del segnale Momentum e le scelte metodologiche che garantiscono la robustezza, la coerenza teorica dell'analisi e il conseguimento dell'obiettivo della tesi.

Lo scopo di questo studio è sviluppare e testare un framework di backtesting per confrontare la performance di tre diverse strategie di portafoglio, applicate ad un universo di titoli azionari ad alta capitalizzazione (le Top 20 S&P 500) nel periodo che va dal 2012-2024.

La ricerca si propone di valutare l'efficacia di un modello di asset allocation dinamico e attivo, basato sul modello Black-Litterman, rispetto a un benchmark passivo ponderato per la capitalizzazione. La strategia attiva è informata da un segnale sintetico, costruito aggregando cinque oscillatori tecnici di Momentum, che viene utilizzato come proxy quantitativa del sentiment di mercato, con l'ipotesi che possa contenere informazione predittiva sui rendimenti futuri.

Inoltre, lo studio analizza l'impatto di diversi profili di rischio dell'investitore, implementando due varianti della strategia Black-Litterman: una "neutrale", con un'avversione al rischio allineata a quella del mercato, e una "aggressiva", con un'avversione al rischio significativamente inferiore.

Tutte le strategie simulate operano con un vincolo long-only, escludendo quindi le vendite allo scoperto.

4.1 Universo di Investimento, Dati e Periodo di Analisi

4.1.1 Universo di investimento

Per prima cosa è necessario andare a definire in modo preciso il contesto operativo in cui le strategie di investimento saranno implementate e simulate.

Per garantire che le strategie operino su un set di asset liquidi, rappresentativi e di rilevanza istituzionale, l'universo di investimento è stato definito nei 20 titoli con la

maggior capitalizzazione di mercato appartenenti all'S&P 500. Questa scelta è motivata dal ruolo che l'S&P 500 ricopre come benchmark di riferimento per eccellenza nel mercato azionario globale. L'indice, che aggrega le 500 maggiori società statunitensi per capitalizzazione, quotate al NYSE e al Nasdaq, agisce come la più significativa proxy del mercato; di conseguenza, i prodotti derivati costruiti su di esso (futures, opzioni, ETF, ecc.) sono tra i più liquidi e scambiati al mondo, confermandone la centralità.

La ponderazione basata sulla capitalizzazione favorisce intrinsecamente le società più grandi, comportando una notevole concentrazione del peso dell'indice. Il peso assunto dai primi 20 titoli è particolarmente rilevante: essi rappresentano collettivamente tra il 40% e il 50% della capitalizzazione totale dell'indice, mentre le restanti 480 società compongono il rimanente 50%. Concentrarsi su questo paniere ristretto significa, pertanto, analizzare i principali motori del mercato azionario globale.

Inoltre, questi titoli presentano la massima liquidità e i maggiori volumi di scambio. Operare in un universo con tali caratteristiche permette di minimizzare l'impatto delle frizioni di mercato (come i costi di transazione), rendendo la simulazione di questi costi e del backtest più realistica ed affidabile. Infine, la vasta disponibilità di dati e l'elevata efficienza informativa di queste società creano il contesto ideale per verificare l'efficacia di un segnale di sentiment come il Momentum.

4.1.2 Dati e Periodo di analisi

Un principio fondamentale per garantire la validità di una simulazione storica è la rigorosa prevenzione del lookahead bias (o bias di preveggenza). Questo errore metodologico si verifica quando il modello, per prendere una decisione in un dato momento, utilizza informazioni che nel mondo reale non sarebbero state ancora disponibili. La sua presenza invalida i risultati del backtest, portando a stime di performance irrealisticamente positive.²⁷

²⁷ CFI Team.*Look-Ahead Bias*.CFI.

Per evitare questo errore nella selezione dei titoli, il framework implementa un meccanismo di aggiornamento dell'universo basato esclusivamente su dati passati. Nello specifico, la lista dei 20 titoli idonei per un dato anno di investimento (es. 2012) viene determinata utilizzando la classifica delle capitalizzazioni di mercato registrate alla fine dell'anno precedente (2011).

Questo approccio garantisce che ogni decisione di selezione del portafoglio si basi unicamente su informazioni che sarebbero state realmente a disposizione dell'investitore in quel momento, assicurando l'integrità e il realismo della simulazione.

La robustezza di un backtest dipende criticamente dalla qualità e dalla corretta gestione dei dati storici. Per questo studio, sono stati acquisiti i dati giornalieri di prezzo (Apertura, Massimo, Minimo, Chiusura) e di volume per l'intero universo di investimento (tutti i 35 titoli che dal 2008 al 2024 sono entrati almeno un anno nelle top 20 aziende del S&P 500) e per il proxy di mercato.

È importante sottolineare una scelta metodologica chiave riguardante l'utilizzo dei dati di capitalizzazione di mercato. Sebbene le capitalizzazioni fluttuino giornalmente, per questo studio si è scelto di effettuare una assunzione semplificativa, utilizzando un singolo snapshot annuale, una decisione resa necessaria dalla natura stessa del dataset disponibile, in cui tali valori sono osservati una sola volta all'anno. I dati utilizzati derivano dalla ricostruzione della classifica delle top 20 società dell'S&P 500 e della loro capitalizzazione di mercato fatta dal sito internet "Finhaker.cz"²⁸.

Come già detto in precedenza, per garantire coerenza temporale ed evitare lookahead bias, la costruzione dei pesi di mercato prevede che nell'anno di investimento y vengano utilizzate esclusivamente le capitalizzazioni registrate alla fine dell'anno $y-1$. Questi pesi definiscono la composizione target del benchmark Buy & Hold, che viene ricostituito al primo giorno di trading di ogni anno. La stessa ipotesi è applicata alla stima dei prior di mercato nel modello Black-Litterman, i cui rendimenti di equilibrio (π) derivano da un portafoglio di mercato mantenuto costante per l'intero anno di riferimento.

²⁸ FINHACKER.cz. *Top 20 S&P 500 Companies by Market Cap (1989–2025)*. FINHACKER.cz.

Questa assunzione, oltre che necessaria, è motivata da diverse ragioni. In primo luogo, l'utilizzo di uno snapshot annuale è una pratica standard e robusta basata su dati facilmente reperibili. In secondo luogo, garantisce la stabilità del benchmark di equilibrio per il modello Black-Litterman, evitando che i prior vengano distorti dalla volatilità di breve termine delle capitalizzazioni. Infine, assicura la coerenza con la strategia Buy & Hold, rendendo il confronto tra l'approccio attivo e quello passivo più diretto ed equo.

Si introduce quindi la semplificazione che il benchmark "cap-weighted" sia piecewise-static su base annua. Sebbene questo possa generare un lieve tracking error rispetto a un indice reale ricostituito più di frequente, offre il vantaggio decisivo di robustezza e replicabilità dell'esperimento.

I dati sono stati scaricati da Yahoo Finanza, sito molto conosciuto tra gli investitori e una risorsa importante nel settore finanziario che offre dati sui mercati finanziari e strumenti per la ricerca di investimenti, tramite la libreria Python yfinance. Poiché l'universo dei Top 20 titoli è dinamico e si aggiorna annualmente, il download iniziale ha incluso tutti i titoli unici che sono apparsi in questa lista durante l'intero periodo di analisi. Questo ha comportato l'acquisizione delle serie storiche per 35 ticker unici, a cui si aggiunge l'ETF SPY, utilizzato come proxy del mercato per la stima del parametro δ .

Per aumentare la robustezza del backtest è stato introdotto un anno di “buffer cronologico” precedente all'orizzonte di training. In concreto, le serie di Apertura, Massimo, Minimo, Chiusura e i volumi di tutti i titoli che compongono l'universo (più SPY come proxy di mercato) vengono scaricati partire dal 1° gennaio 2008. Questo segmento non entra nel calcolo delle performance ma viene usato esclusivamente per inizializzare correttamente tutte le grandezze dipendenti da finestre mobili, evitando così valori mancanti e instabilità numeriche proprio nei primi periodi utili. L'uso di dati aggiustati per dividendi e split contribuisce inoltre a mitigare discontinuità spurie all'avvio del training.

Il Periodo di Training che copre il triennio 2009 – 2011 è l'intervallo di tempo che costituisce il set di dati su cui vengono costruiti e calibrati i modelli statistici prima dell'avvio della vera simulazione. Il periodo di training fornisce la base statistica iniziale per le componenti del modello. In particolare:

- la matrice di covarianza Σ è stimata su una finestra mobile di 3 anni coerentemente con la frequenza operativa;
- l'avversione al rischio di mercato δ è stimata con una finestra “expanding” che utilizza tutta la storia del proxy fino al tempo t ;
- la mappa Q , che lega il punteggio di Momentum al rendimento futuro, è costruita, analogamente alla matrice di covarianza, su una finestra mobile di 3 anni.

Infine, il periodo reale in cui viene applicato e valutato il backtest va dal 2012 – 2024. Tale periodo di tempo rappresenta l'intervallo "out-of-sample" in cui la performance delle strategie viene simulata e misurata, utilizzando i modelli addestrati sul periodo precedente. In questa fase:

- i due portafogli Black-Litterman vengono ribilanciati al termine di ogni mese di borsa (ultimo giorno di trading, coerente con l'impostazione $\text{Horizon}='M'$);
- il portafoglio Buy & Hold viene ribilanciato una volta l'anno, al primo giorno di contrattazione dell'anno.

Nel complesso, questa architettura temporale consente di presentarsi al primo period-end del 2012 con indicatori già stabilizzati, una stima di δ meno prociclica e una mappa Q più informativa, senza contaminare la valutazione delle performance; il buffer resta fuori dal perimetro di misurazione, ma migliora in modo sostanziale la qualità degli input del modello.

Per fornire un esempio concreto della composizione dell'universo investibile, la seguente Tabella riporta i 20 titoli con la maggiore capitalizzazione di mercato, ordinati per rango, utilizzati sia nella fase di training che per la fase di backtest (2012-2024).

Rank	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
1	XOM	XOM	XOM	AAPL	AAPL	AAPL	AAPL	AAPL
2	MSFT	AAPL	AAPL	XOM	XOM	XOM	GOOGL	GOOGL
3	WMT	MSFT	MSFT	GOOGL	GOOGL	MSFT	MSFT	MSFT
4	GOOGL	BRK.B	CVX	WMT	MSFT	BRK.B	BRK.B	BRK.B
5	AAPL	WMT	GOOGL	MSFT	BRK.B	GOOGL	XOM	XOM
6	JNJ	GOOGL	IBM	BRK.B	JNJ	JNJ	AMZN	AMZN
7	PG	CVX	WMT	CVX	WMT	WFC	META	META
8	JPM	PG	BRK.B	IBM	CVX	WMT	JNJ	JNJ
9	IBM	IBM	PG	JNJ	WFC	PG	WFC	JPM
10	CVX	JNJ	JNJ	PG	PG	JPM	JPM	WFC
11	BRK.B	JPM	KO	WFC	JPM	META	PG	PG
12	WFC	WFC	PFE	PFE	IBM	CVX	WMT	BAC
13	PFE	ORCL	WFC	JPM	PFE	ORCL	PFE	CVX
14	CSCO	KO	PM	KO	AMZN	VZ	VZ	VZ
15	KO	C	T	ORCL	KO	BAC	V	WMT
16	BAC	BAC	ORCL	T	GE	PFE	KO	T
17	T	PFE	JPM	PM	ORCL	KO	GE	PFE
18	ORCL	T	INTC	GE	BAC	INTC	BAC	V
19	INTC	GE	GE	BAC	C	C	DIS	KO
20	MRK	INTC	VZ	VZ	VZ	V	CVX	GE
Rank	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
1	AAPL	MSFT	AAPL	AAPL	AAPL	AAPL	AAPL	AAPL
2	GOOGL	AAPL	MSFT	MSFT	MSFT	MSFT	MSFT	NVDA
3	MSFT	AMZN	GOOGL	AMZN	GOOGL	GOOGL	GOOGL	MSFT
4	AMZN	GOOGL	AMZN	GOOGL	AMZN	AMZN	AMZN	GOOGL
5	META	BRK.B	META	META	TSLA	BRK.B	NVDA	AMZN
6	BRK.B	META	BRK.B	TSLA	META	UNH	META	META
7	JNJ	JNJ	JPM	BRK.B	NVDA	JNJ	TSLA	TSLA
8	JPM	JPM	V	V	BRK.B	XOM	BRK.B	AVGO
9	XOM	V	JNJ	JNJ	UNH	V	LLY	BRK.B
10	BAC	XOM	WMT	WMT	JPM	JPM	V	LLY
11	WFC	WMT	BAC	JPM	V	TSLA	AVGO	WMT
12	WMT	UNH	PG	MA	JNJ	WMT	JPM	JPM
13	V	BAC	MA	PG	HD	NVDA	UNH	V
14	CVX	PFE	XOM	UNH	WMT	PG	WMT	MA
15	PG	VZ	UNH	DIS	PG	LLY	MA	XOM
16	HD	PG	DIS	NVDA	BAC	CVX	XOM	ORCL
17	INTC	INTC	INTC	HD	MA	MA	JNJ	UNH
18	VZ	WFC	VZ	PYPL	PFE	HD	PG	COST
19	UNH	CVX	HD	BAC	DIS	META	HD	PG
20	PFE	KO	KO	VZ	AVGO	PFE	COST	HD

Tabella 1: Immagine elaborata in autonomia. L'Universo investibile

4.2 I portafogli a confronto

Per valutare in modo rigoroso l'efficacia del modello di asset allocation attiva proposto, si è reso necessario definire un design sperimentale basato sul confronto di tre strategie di portafoglio distinte, ciascuna con un ruolo metodologico preciso. Questo approccio a tre portafogli permette non solo di confrontare la strategia attiva con un benchmark passivo, ma anche di isolare e analizzare l'impatto cruciale della propensione al rischio dell'investitore sulle decisioni di allocazione e sulla performance finale.

I tre portafogli implementati e testati nel periodo di backtest (2012-2024) sono i seguenti:

- 1) Portafoglio Buy & Hold (BH)
- 2) Portafoglio Black-Litterman (BL)
- 3) Portafoglio Black-Litterman Aggressivo (BLA)

Il Portafoglio Buy & Hold (BH) agisce come il benchmark di riferimento e come proxy di mercato, rappresentando inoltre una strategia di investimento passiva. La costruzione di questo portafoglio è basata sul cap-weighted, ovvero i pesi di ciascuno dei 20 titoli del portafoglio vengono determinati dalla loro capitalizzazione di mercato rispetto alla somma totale delle capitalizzazioni di tutti e 20 i titoli.

Questa metodologia riflette la struttura della maggior parte degli indici azionari e simula una strategia di investimento non-interventista. Il portafoglio viene ribilanciato una sola volta all'anno, al primo giorno di contrattazione utile, per adeguarsi alla nuova composizione dell'universo dei Top 20 titoli. Il suo scopo è fornire una base oggettiva e realistica contro cui misurare l'eventuale alfa, o valore aggiunto, generato dalle strategie attive.

Il Portafoglio Black-Litterman Neutrale (BL) rappresenta l'implementazione fondamentale e perfettamente coerente con la teoria sviluppata da Black-Litterman; vi è quindi la combinazione attraverso l'inferenza bayesiana di due fonti informative diverse: i rendimenti di equilibrio del mercato (prior), derivati tramite ottimizzazione inversa, e le previsioni quantitative (views) generate dal segnale di Momentum sintetico. La fase finale di ottimizzazione dei pesi viene eseguita massimizzando la funzione di utilità quadratica

dell'investitore, in cui il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore (δ_{user}) è impostato per essere uguale a quello stimato dal mercato (δ_{market}). Questo approccio segue il comportamento di un investitore "razionale" classico che, pur avendo delle proprie views, presenta un profilo di rischio in linea con quello medio del mercato, bilanciando in modo standard il trade-off tra l'inseguire le proprie convinzioni e il controllo della volatilità.

Al contrario il Portafoglio Black-Litterman Aggressivo (BLA) implementa una strategia che è stata progettata specificamente per testare l'impatto di una minore avversione al rischio sulla performance e sulla composizione del portafoglio. È fondamentale sottolineare che questo portafoglio parte dallo stesso identico set di informazioni e previsioni del portafoglio neutrale (BL) possedendo la stessa prior e le stesse views. La differenziazione avviene esclusivamente nell'ottimizzazione finale, dove l'avversione al rischio dell'investitore è significativamente inferiore e viene definita come ($\delta_{user} = \delta_{market} \cdot k$) dove k è un coefficiente che ha lo scopo di diminuire il fattore della avversione al rischio dell'investitore (in questa trattazione k è impostato a 0,20).

Tale approccio ha l'obiettivo di modellare e di intercettare anche le decisioni di investimento di investitore più propenso al rischio, che quindi possiede una maggiore fiducia nelle proprie previsioni ed è disposto a deviare in modo più deciso dal benchmark per sfruttare le opportunità identificate dal segnale di Momentum.

Questa impostazione viene applicata poiché teoricamente più coerente con la natura stessa del segnale di Momentum. La letteratura finanziaria, infatti, ha evidenziato come le strategie di Momentum presentino un profilo di rendimento convesso, simile all'acquisto di un'opzione call. Questo significa che la strategia tende a generare i suoi migliori risultati durante i periodi di tendenze forti e persistenti, dove il guadagno potenziale è amplificato, mentre soffre durante le inversioni improvvise, dove la penalità pagata è la potenziale sottoperformance. Questa natura intrinsecamente "a leva" e "risk-on" del segnale Momentum richiede, per essere sfruttata appieno, un profilo di rischio coerente. Un investitore con un'elevata avversione al rischio sarebbe costantemente frenato dall'ottimizzatore, che cercherebbe di ridurre la volatilità, annullando di fatto la natura speculativa del segnale. Un δ basso, al contrario, permette al portafoglio di "pagare

il premio” e di posizionarsi in modo deciso per catturare i guadagni amplificati offerti dai trend, lasciando “correre i profitti”, in piena coerenza con la filosofia della strategia.

All’interno del nostro framework, la variante BL Aggressiva riduce l’avversione al rischio solo in fase di ottimizzazione. In questo modo:

- enfatizza il trade-off rischio–rendimento: riducendo δ nella massimizzazione dell’utilità, l’ottimizzatore penalizza meno la varianza rispetto al rendimento atteso; quindi, l’investitore accetta consapevolmente più rischio (volatilità) in cambio di un rendimento atteso più elevato;
- accetta un turnover maggiore rispetto al “classico” BL;
- risulta quindi più allineata alla natura pro-ciclica e “trend-following” del segnale.

Questa scelta ha un rovescio della medaglia ben noto in letteratura: le strategie Momentum possono soffrire durante rapidi reversal dopo fasi di stress (“Momentum crashes”). Per questo, nel confronto BL con la strategia BL aggressiva, è cruciale valutare congiuntamente rendimento, volatilità, drawdown (che rappresenta la perdita massima maturata in un periodo di tempo t rispetto al valore più alto raggiunto dallo strumento nello stesso periodo) e costi di transazione, così da misurare se l’extra-rendimento del profilo più aggressivo compensa l’aumento di rischio operativo e finanziario.

L’obiettivo di questo design è, quindi, quello di confrontare la differenza di performance tra la strategia Black-Litterman informata dal segnale Momentum con la strategia Buy and Hold e al contempo di cercare di isolare l’effetto della sola propensione al rischio. Confrontando la strategia BL con BH si misura l’efficacia del modello e del segnale. Confrontando invece il portafoglio BLA con BL si quantifica come una maggiore aggressività, a parità di informazioni, influenzi i rendimenti, il rischio, il turnover e i costi di transazione.

4.3 Costruzione del Modello Black-Litterman informato dall'indicatore Momentum: Segnale, Views e Parametri

4.3.1 L'Indicatore Sintetico "Momentum(5)"

Uno degli obiettivi principali di questa ricerca è sperimentare e validare un approccio innovativo alla costruzione del modello Black-Litterman, volto a superarne una delle criticità più note: la dipendenza da views soggettive e discrezionali. L'approccio originale, sebbene teoricamente robusto, affida all'investitore il compito di formulare previsioni quantitative, un processo spesso difficile da standardizzare e replicare in modo sistematico.

Da qui nasce l'esigenza di sviluppare un metodo più quantitativo e oggettivo per la generazione delle views. L'ispirazione per questo approccio deriva da noti indicatori sintetici utilizzati nel settore finanziario, come il Goldman Sachs Bull/Bear Risk Indicator. Questo indicatore aggrega diverse metriche di mercato (valutazioni, Momentum, dati macroeconomici, etc.) in un singolo punteggio per agire come una proxy del sentiment e della propensione al rischio degli investitori: l'idea è che nessun fattore singolarmente sia perfetto, ma una loro combinazione logica e appropriata ne riduca rumore e bias specifici.

Nel caso precedentemente citato di Goldman Sachs, le componenti (valutazioni finanziarie, gdp, bilanci privati, inflazione core, disoccupazione, ecc.), vengono normalizzate via percentile rank, una tecnica che valuta ogni dato in relazione alla sua distribuzione storica, e successivamente ne viene fatta la media aritmetica semplice; valori elevati dello score hanno storicamente anticipato fasi di turbolenza²⁹.

Analogamente, questo studio costruisce un indicatore sintetico proprietario, il "Momentum(5)", che aggrega cinque oscillatori tecnici di Momentum in un'unica metrica normalizzata (0-100). Questo indicatore non viene utilizzato per formulare previsioni continue, ma agisce come un generatore di segnali: quando il suo valore supera soglie assolute predefinite, che indicano condizioni estreme di ipercomprato o ipervenduto, si attiva una view quantitativa. L'attesa di rendimento per tale view viene derivata in modo

²⁹ Renevier, S. (2024). *Goldman's Bear Market Indicator Is Urging You To Be Cautious*. Finimize.

empirico dalla relazione storica tra il punteggio dell'indicatore e la performance passata che il titolo ha avuto per quel dato score dell'indicatore.

Pertanto, l'indicatore "Momentum(5)" non agisce come una semplice metrica descrittiva, ma come un vero e proprio generatore di segnali di trading: attraverso regole di attivazione basate sul superamento di soglie assolute, esso traduce l'analisi del mercato in una precisa istruzione operativa (una view quantitativa) che guida attivamente le decisioni di asset allocation del modello.

Quindi per la generazione di views quantitative stabili e per ridurre la dipendenza da un singolo segnale tecnico, viene costruito un indicatore composito di Momentum, formato dai cinque oscillatori ampiamente utilizzati in analisi tecnica, e precedentemente esposti nel capitolo 3, che ricordiamo essere: RSI (14), MFI (14), Ultimate Oscillator (7–14–28), Stochastic RSI (14) e Bollinger %B (20, 2σ).

Prima di procedere all'aggregazione dei cinque oscillatori, i loro valori grezzi vengono sottoposti a una procedura di normalizzazione nota come clipping (o troncamento). Questa operazione assicura che ogni valore si trovi forzatamente all'interno di un intervallo prefissato, in questo caso $[0, 100]$. Matematicamente, per ogni valore s di un oscillatore, il valore “clippato” è calcolato come:

$$s_{\text{clipped}} = \min\{\max(s, 0), 100\}$$

ovvero come:

$$s_{\text{clipped}} = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ s, & 0 < s < 100 \\ 100, & s > 100 \end{cases}$$

Di conseguenza, qualsiasi valore originariamente inferiore a 0 viene impostato a 0, e qualsiasi valore superiore a 100 viene impostato a 100.

L'implementazione di questa procedura ha un duplice scopo metodologico:

1. Garantire la robustezza evitando che eventuali outlier o errori di calcolo estremi in un singolo oscillatore (ad esempio, a causa di dati anomali) possano distorcere in modo sproporzionato la media finale dell'indicatore sintetico.
2. Assicurare la coerenza di scala normalizzando tutti i segnali allo stesso identico intervallo [0, 100] prima della loro aggregazione garantendo, così, che ciascun componente contribuisca in modo equo al punteggio finale.

Dunque ognuno degli oscillatori è riportato su una scala comune [0, 100] e lo score complessivo è la media equiponderata dei cinque valori:

$$\text{Momentum}(5)_t = \frac{(\text{RSI}_t + \text{MFI}_t + \text{UO}_t + \text{StochRSI}_t + \%B_t)}{5}, \text{ con } \text{Momentum}(5)_t \in [0,100].$$

Gli oscillatori sono calcolati su base giornaliera (*OHLCV adjusted*), ma la decisione di portafoglio è presa solo all'ultimo giorno di trading del periodo (mensile). In pratica, lo score giornaliero viene campionato a fine periodo per evitare incoerenze di scala tra segnale e ribilanciamento.

Per ridurre il numero di operazioni a bassa probabilità e concentrare l'attività di portafoglio esclusivamente sui segnali di forte convinzione, la strategia non agisce in modo continuo, infatti la riallocazione dei portafogli nelle due strategie di Black-Litterman avviene mensilmente, ma implementa un sistema di attivazione a tre zone basato sul valore dell'indicatore "Momentum(5)". Le decisioni di ribilanciamento attivo vengono prese solo quando il punteggio dell'indicatore entra in uno dei due regimi estremi.

1. Zona di Acquisto ($\text{Momentum} \geq 75$): Contesto Bullish

Quando il punteggio di un titolo entra o si trova nella zona di ipercomprato (≥ 75), il sistema lo interpreta come un segnale forte di persistente tendenza rialzista. Viene quindi generata una view quantitativa, il cui valore è l'attesa di rendimento derivata dal vettore Q (che verrà spiegato nel successivo capitolo) per quel livello di Momentum. Il modello Black-Litterman integra questa previsione positiva e l'ottimizzatore di portafoglio calcola

i nuovi pesi per sovrappesare il titolo rispetto alla sua ponderazione nel benchmark di mercato.

2. Zona Neutrale ($25 < \text{Momentum} < 75$): Contesto Neutrale / Nessun Segnale

Se il punteggio si trova nell'area intermedia, il segnale viene considerato non sufficientemente forte per giustificare un'azione. In questo caso, nessuna view viene generata. Per evitare ribilanciamenti e costi non necessari, il portafoglio non viene riportato alla sua composizione di benchmark. Al contrario, viene applicata una logica di "carry-forward": la strategia mantiene le posizioni attive del periodo precedente, aspettando il successivo segnale forte.

3. Zona di Vendita/Sottopeso ($\text{Momentum} \leq 25$): Contesto Bearish

Quando il punteggio di un titolo scende nella zona di ipervenduto (≤ 25), il sistema lo interpreta come un segnale di debolezza o di un trend ribassista consolidato. Viene generata una view quantitativa corrispondente, che tipicamente riflette un'aspettativa di rendimento bassa o negativa. Dato il vincolo long-only del portafoglio, non è possibile effettuare vendite allo scoperto. L'ottimizzatore, quindi, agisce per minimizzare l'esposizione al titolo, calcolando un sottopeso significativo rispetto al benchmark, che può arrivare fino ad un azzeramento completo della posizione.

La scelta delle soglie di attivazione per le views a 75 (per i segnali rialzisti) e 25 (per i segnali ribassisti) non è casuale, ma si fonda sui principi consolidati dell'analisi tecnica. Infatti, per i diversi oscillatori chiave utilizzati nella costruzione dell'indicatore "Momentum(5)", questi valori sono universalmente riconosciuti in letteratura come i livelli standard di ipercomprato (≥ 70) e ipervenduto (≤ 25).

In particolare, per componenti fondamentali come il Relative Strength Index (RSI) e l'Ultimate Oscillator (UO), 70 e 30 rappresentano le soglie convenzionali. Anche altri indicatori nel paniere, come il Money Flow Index (MFI) e lo Stochastic RSI, pur utilizzando soglie leggermente diverse (tipicamente 80/20), operano sulla stessa logica di identificazione di condizioni estreme.

Pertanto, l'adozione delle soglie 75/25 per l'indicatore aggregato agisce come un filtro robusto, assicurando che una deviazione attiva dal portafoglio di mercato avvenga solo quando emerge un chiaro consenso tra le diverse dimensioni del Momentum, segnalando una condizione statisticamente significativa.

Questo approccio a soglie garantisce che la strategia sia disciplinata, riduca il turnover in assenza di segnali chiari e concentri il capitale solo sulle opportunità supportate da una forte evidenza statistica.

Quindi l'indicatore composito di Momentum sintetizzato, ha la capacità di catturare la persistenza dei trend (carattere trend-following) riducendo la dipendenza dal "rumore" di un solo segnale. Questa costruzione è coerente con l'evidenza empirica che riconosce al Momentum una natura pro-ciclica/convessa (beneficia dei movimenti direzionali persistenti e soffre nelle inversioni rapide) e, per essere sfruttata, richiede decisioni coerenti di rischio all'atto dell'ottimizzazione del portafoglio (si veda il confronto tra BL e BL "aggressivo" sviluppato nel §4.2).

4.3.2 Il vettore "Q "

Per superare la natura intrinsecamente soggettiva delle views nel modello Black-Litterman tradizionale, in questo studio è stato implementato un modello empirico non parametrico. L'obiettivo, dunque, è tradurre il segnale grezzo dell'indicatore sintetico "Momentum(5)" in previsioni di rendimento quantitative, basate esclusivamente su evidenze storiche e prive di discrezionalità da parte dell'investitore.

La premessa teorica è che esista una relazione statisticamente osservabile tra lo score fornito dall'indicatore Momentum di un titolo a fine periodo e la sua performance nel periodo immediatamente successivo.

La metodologia di stima è di tipo walk-forward con finestra crescente (expanding window). Ad ogni data di ribilanciamento t (corrispondente all'ultimo giorno di trading del mese), il sistema utilizza tutta la storia disponibile fino a quel momento per costruire la mappa delle previsioni, evitando rigorosamente il lookahead bias. Per ogni titolo, vengono create coppie di dati $(score_t, r_{t+1})$, dove lo score è il punteggio Momentum

misurato alla fine del mese precedente e r è il rendimento totale realizzato nel mese successivo.

Gli score vengono quindi discretizzati al valore intero più vicino (da 0 a 100) e, per ciascun livello, si calcola la media condizionata dei rendimenti futuri storicamente osservati.

Per media condizionata dei rendimenti futuri si intende la media dei rendimenti del periodo $t + 1$

calcolata solo sulle osservazioni storiche in cui, alla fine del periodo t , lo score Momentum era pari a s . In simboli stimiamo:

$$Q(s) = E[r_{t+1} \mid \text{score}_t = s]$$

Il risultato è un dizionario statistico, la mappa Q , che associa ogni possibile punteggio dell'indicatore sintetico Momentum ad un'aspettativa di rendimento periodico. Qualora per un dato livello di score le osservazioni storiche siano scarse, si applica una tecnica di smoothing che calcola la media dei rendimenti dei livelli vicini (± 5), aumentando la robustezza della stima.

Per illustrare il processo, si consideri un ribilanciamento al 30 giugno 2016. Per costruire la mappa Q , il modello utilizza tutti i dati mensili dall'inizio della simulazione fino al 31 maggio 2016. Se, ad esempio, per il titolo AAPL lo score misurato il 30 giugno 2016 è 76, la strategia attiva una view rialzista. Il valore di questa view sarà il rendimento medio storico calcolato per lo score "76" utilizzando tutti i dati fino a maggio 2016. Questo valore viene quindi inserito nel modello Black-Litterman per calcolare i nuovi pesi ottimali.

Quindi, supponendo di essere al 30/06/2016 (t è dunque pari a giugno 2016) e l'indicatore sintetico Momentum genera uno score di 76, la mappa Q verrà costruita nel seguente modo:

Fine mese	Score Momentum	Rendimento sucessivo mese
31/03/2016	76	+ 1,5%
30/04/2016	68	- 0,8%
31/05/2016	76	+ 2,3%

Come si può vedere, l'indicatore Momentum ha già generato in passato due valori pari a 76 e i rendimenti del mese successivo a quello score sono stati rispettivamente +1.5% (ad aprile) e +2.3% (giugno).

Quindi il rendimento assegnato a quel determinato score (76) a giugno 2016 sarà, dunque, così calcolato:

$$Q(76) = \frac{1.5\% + 2.3\%}{2} = 1.9\%.$$

Questo valore di +1.9% viene quindi inserito come view nel modello Black-Litterman per calcolare i pesi ottimali.

Questo metodo viene esteso su tutto l'orizzonte temporale del backtest in un processo di tipo walk-forward: ad ogni periodo di ribilanciamento, la mappa Q viene ricalcolata utilizzando tutta la storia disponibile fino a quel momento, garantendo che le previsioni si adattino progressivamente all'evoluzione del mercato e che ogni decisione di portafoglio sia rigorosamente out-of-sample.

Come già detto, le views non vengono generate in modo continuo, ma si attivano solo in presenza di segnali forti ($\text{score} \geq 75$ per views rialziste o $\text{score} \leq 25$ per views ribassiste). Se al successivo ribilanciamento, il 31 luglio 2016, lo score di AAPL fosse 65 (in zona neutrale), nessuna view verrebbe generata. In questo caso, per evitare turnover e costi inutili, la strategia applica una logica di "carry-forward", mantenendo i pesi del portafoglio BL invariati rispetto a giugno.

La scelta di utilizzare una finestra crescente (expanding window) per la costruzione della mappa Q, è una decisione metodologica deliberata e motivata da due fattori principali.

In primo luogo, l'obiettivo è la ricerca della robustezza statistica. Utilizzando l'intera storia disponibile, la stima della media condizionata dei rendimenti futuri ($Q(s)$) si basa su un campione di osservazioni progressivamente più ampio. Questo rende le previsioni meno soggette al "rumore" di breve periodo e più stabili nel tempo. Tale robustezza è particolarmente cruciale in un universo di investimento ristretto come quello dei Top 20 titoli, dove il numero di osservazioni storiche per un dato livello di Momentum potrebbe essere limitato. Una finestra crescente mitiga il rischio di stime inaffidabili basate su pochi dati.

In secondo luogo, come vedremo nei prossimi capitoli, questo approccio è coerente con la stima del parametro δ , anch'esso calcolato su una finestra crescente. Si assume implicitamente che, mentre il rischio (Σ) è più sensibile ai regimi di mercato recenti (e quindi beneficia di una finestra mobile), la relazione tra il segnale di Momentum e il rendimento atteso, così come l'avversione al rischio di mercato, siano fenomeni più strutturali e stabili nel lungo periodo.

Si riconosce, tuttavia, la possibile criticità di questo approccio: una minore adattabilità. Una finestra crescente è intrinsecamente più lenta a reagire a eventuali cambiamenti strutturali nella relazione tra Momentum e rendimenti. Ciononostante, per gli scopi di questo studio, la stabilità e la robustezza statistica sono state considerate prioritarie rispetto alla reattività di breve termine, al fine di costruire un modello decisionale basato su fondamenta statistiche il più ampie possibile.

4.3.3 La Matrice di varianza-covarianza Σ

Un pilastro fondamentale di qualsiasi modello di asset allocation, dal classico Markowitz al più sofisticato Black-Litterman, è la matrice di varianza-covarianza (Σ). Questa componente non solo quantifica la volatilità di ogni singolo asset ma, cosa ancora più importante, cattura la complessa rete di interdipendenze e correlazioni che ne governa i movimenti reciproci. La matrice di varianza-covarianza (Σ) è un input fondamentale sia per il modello Black-Litterman (per il calcolo dei prior) sia per l'ottimizzazione finale del

portafoglio. Una stima imprecisa o instabile di questo parametro può portare a dei risultati estremi e inaffidabili negli investimenti o nella creazione di portafogli.

Tuttavia, la sua stima a partire da dati storici è notoriamente problematica. La semplice covarianza campionaria, infatti, tende a essere instabile e a trattare ogni osservazione passata con lo stesso identico peso. Il rendimento di ieri (molto recente) non ha maggiore influenza sulla varianza rispetto al rendimento del mese scorso, un'ipotesi poco realistica in mercati finanziari che evolvono per regimi.

Per superare questi limiti e dotare il modello di una percezione del rischio più dinamica e allineata alle condizioni correnti, in questo studio si è scelto di implementare un approccio di stima della varianza che si basa sulla Media Mobile Ponderata Esponenzialmente (EWMA). Invece di considerare il passato come un blocco unico di informazioni pesate tutte allo stesso modo, il metodo EWMA introduce una gerarchia temporale, assegnando un'importanza via via decrescente alle osservazioni man mano che diventano più remote. L'assunto di fondo è che le dinamiche di mercato più recenti contengano informazioni più rappresentative nell'anticipare il rischio nel prossimo futuro.

Il processo di calcolo, ad ogni data di ribilanciamento, inizia con un accorgimento metodologico che ne garantisce la coerenza temporale. Infatti, poiché l'intera strategia opera su un orizzonte mensile, anche la stima del rischio deve essere espressa sullo stesso orizzonte temporale. Pertanto, i rendimenti non vengono calcolati su base giornaliera, ma sui prezzi di chiusura dell'ultimo giorno di trading di ogni mese. Questo passaggio assicura che la matrice Σ rifletta la volatilità e le correlazioni sulla stessa scala temporale delle decisioni di investimento del modello³⁰.

Il cuore del metodo EWMA è il parametro di “livellamento” o “decay rate” λ , che determina la velocità con cui il peso delle osservazioni passate decade. Per calibrare la reattività di questo meccanismo, si è scelto di non operare direttamente sul parametro

³⁰ Harper, D.(2024).*Exploring the Exponentially Weighted Moving Average*.Investopedia.

lambda, ma sul suo equivalente più intuitivo: l'half-life. In questa ricerca è stato impostato a 6, il che significa che un'osservazione di sei mesi fa ha esattamente la metà del peso di un'osservazione odierna. La conversione da half-life (H) a lambda (λ) segue la formula:

$$\lambda = e^{\frac{\ln(0.5)}{H}}$$

Con $H = 6$, si ottiene un $\lambda \approx 0.8909$, un valore che garantisce una buona reattività del modello alle condizioni di mercato recenti.

Si tratta di una decisione deliberata verso una maggiore reattività, che porta il modello a "dimenticare" più in fretta le informazioni datate per concentrarsi sulle dinamiche di mercato più attuali. Tale scelta è inoltre coerente con l'orizzonte operativo mensile della strategia e riflette l'idea che la struttura del rischio sia dinamica e influenzata prevalentemente dalle condizioni di mercato più recenti. In questo modo, la matrice di covarianza si adatta rapidamente ai cambiamenti di regime, mantenendo al tempo stesso una sufficiente robustezza statistica grazie alla finestra mobile di tre anni.

La matrice di covarianza viene costruita iterativamente per ogni periodo t all'interno della finestra di training mobile di 3 anni e viene aggiornata secondo la formula ricorsiva:

$$\Sigma_t = \lambda \cdot \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \cdot (X_t X_t^T)$$

Dove:

- X_t è il vettore colonna dei rendimenti periodici degli N asset al tempo t .
- $X_t X_t^T$ rappresenta il contributo informativo del rendimento osservato al tempo t . Si tratta di una matrice costruita a partire dal prodotto esterno del vettore dei rendimenti, i cui elementi diagonali aggiornano le varianze e quelli fuori diagonale aggiornano le covarianze tra gli asset.
- Σ_{t-1} rappresenta la matrice di varianza-covarianza stimata al passo temporale precedente, essa incorpora tutta l'informazione accumulata fino a quel momento e funge da punto di partenza per l'aggiornamento della stima corrente.

Questo processo, implementato nel codice tramite ciclo, assicura che il contributo di ogni osservazione passata sia pesato esponenzialmente in base alla sua "distanza" dal presente.

Questa logica di ponderazione esponenziale, tuttavia, non agisce sull'intera storia dei dati, ma è inserita in un contesto temporale ancora più mirato che , come già detto, è una finestra mobile (rolling) di 3 anni. Tale architettura a due livelli è cruciale: la finestra mobile seleziona solo i dati degli ultimi 36 mesi come rilevanti, scartando il passato più lontano e al suo interno il meccanismo EWMA applica un'ulteriore ponderazione che enfatizza i mesi più recenti di questo triennio.

Un ulteriore aspetto cruciale riguarda la gestione dell'universo dinamico degli asset. La matrice di varianza-covarianza Σ viene infatti stimata esclusivamente sugli asset correnti, ossia i titoli che compongono l'universo investibile nell'anno di riferimento. Questo implica che, quando l'universo viene aggiornato (ad esempio a inizio anno, con la nuova selezione dei top 20 titoli per capitalizzazione), anche la dimensione e la composizione della matrice Σ si adattano di conseguenza. In questo modo, la stima del rischio resta sempre coerente con il set effettivamente disponibile per l'investimento.

In definitiva, la stima della matrice Σ adottata in questo studio è il risultato di un trade-off consapevole: si sacrifica parte della robustezza statistica che deriverebbe da una finestra storica più lunga in cambio di una maggiore adattabilità. Il risultato è un input di rischio più dinamico, capace di reagire più in fretta ai cambiamenti di regime delle correlazioni e della volatilità, fornendo così una base più realistica e prudente per il modello Black-Litterman e per l'ottimizzazione finale del portafoglio.

4.3.4 Il tasso risk free

Nel mondo della finanza, ogni rendimento ottenuto da un investimento rischioso viene valutato in relazione a un punto di riferimento fondamentale: il tasso di interesse privo di rischio (risk-free rate). Questo tasso rappresenta il rendimento teorico di un investimento che presenta certezza assoluta, ovvero con rischio nullo. Nella pratica, viene spesso associato al rendimento dei titoli di Stato a breve termine emessi da Governi considerati

potenzialmente privi del rischio di insolvenza, come gli Stati Uniti d’America o la Germania.

La sua importanza è cruciale perché agisce come costo opportunità del capitale e fonte di paragone per il rischio. Qualsiasi rendimento superiore al tasso risk-free è considerato un premio per il rischio (excess return), ovvero il compenso che un investitore richiede per aver sopportato l'incertezza legata a un investimento.

All'interno del modello Black-Litterman, il tasso risk-free non è un parametro secondario, ma un ingranaggio essenziale che assicura la coerenza di tutti i calcoli. L'intero modello, infatti, non lavora sui rendimenti totali, ma sui premi per il rischio e il tasso risk-free è lo strumento che permette di effettuare questa fondamentale trasformazione.

Il tasso risk-free, nel framework di questa ricerca, viene impiegato per il calcolo del parametro dell'avversione al rischio δ , calcolato come il rapporto tra il premio per il rischio del mercato e la sua varianza. Il numeratore di questa frazione prevede la sottrazione del tasso risk-free dal rendimento medio del mercato ($E[R_m] - r_f$), isolando così il puro compenso per il rischio.

Nella realtà la proxy di mercato più simile a tale strumento, nel contesto statunitense sono i T-bill o obbligazioni emesse a breve termine dagli Stati Uniti d’America, avendo quindi scadenze inferiori all’anno.

Nella ricerca si è deciso di fissare il valore del risk-free costante al 2% annuo, che corrisponde alla media dei rendimenti che i T-bill riconoscevano durante il periodo considerato (2012-2024). Inoltre, tale scelta implementata nel backtest privilegia semplicità e stabilità degli input.

Per garantire la precisione metodologica, il codice non utilizza un tasso risk-free annuale in modo diretto, ma lo converte nel suo equivalente periodico (mensile). Questo assicura che, ad ogni ribilanciamento, il premio per il rischio venga calcolato rispetto a una base di costo/opportunità temporalmente allineata all'orizzonte della strategia. La formula utilizzata è la seguente:

$$r_f = (1 + R_{f,ann})^{1/P} - 1 \quad \text{con } P = 12 \text{ per la frequenza mensile}$$

dove:

- $R_{f,ann}$ è il tasso risk-free annuale
- P è il numero di periodi in un anno

In sintesi, il tasso risk-free agisce come il "livello zero" del rendimento nel modello. È la base da cui vengono misurati tutti i premi per il rischio, garantendo che l'intero framework Black-Litterman operi in modo coerente sul concetto di excess return, che è il vero motore delle decisioni di asset allocation.

4.3.5 La stima dell'avversione al rischio (δ)

Un elemento centrale del modello Black-Litterman è il parametro di avversione al rischio, indicato con δ . Questo parametro misura quanto rendimento aggiuntivo l'investitore richiede per ogni unità di rischio assunta ed è quindi fondamentale sia nella definizione dei rendimenti impliciti di equilibrio sia nella fase di ottimizzazione del portafoglio, per determinare l'allocazione finale dei pesi ai vari asset.

Nel presente studio, come già descritto nel capitolo 3, il δ viene stimato seguendo l'approccio proposto da He e Litterman (1999), che lo ricava dal rapporto tra il premio per il rischio del mercato e la sua varianza. In altre parole, δ cresce quando il rendimento atteso del mercato rispetto al risk-free è elevato e diminuisce quando la volatilità del mercato è alta. Ovvero:

$$\delta = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2}$$

dove:

- $E(R_m)$ è il rendimento atteso del portafoglio di mercato
- R_f è il tasso risk-free
- σ_m^2 è la varianza dei rendimenti di mercato

La proxy di mercato più utilizzata sui mercati finanziari è l'indice S&P 500, per questa ragione in questa ricerca è stata presa come rappresentazione del portafoglio di mercato l'ETF SPY, che ne replica perfettamente l'andamento. Per coerenza con l'orizzonte

mensile della strategia, i dati di prezzo sono ricampionati su base mensile e da questi si calcolano i rendimenti periodici. La stima di δ avviene attraverso una finestra “expanding”, cioè includendo progressivamente tutte le osservazioni storiche disponibili fino alla data di ribilanciamento, così che il parametro rifletta l’informazione accumulata nel tempo.

Per evitare valori estremi che potrebbero compromettere la stabilità numerica del modello, δ è vincolato entro un intervallo compreso tra 0 e 10. Il valore così stimato viene infine utilizzato in due momenti chiave: nella costruzione dei rendimenti impliciti di mercato (prior) e nell’ottimizzazione del portafoglio tramite la funzione di utilità quadratica.

La scelta di un approccio basato su una finestra “expanding”, piuttosto che una finestra mobile, risponde a precise motivazioni metodologiche. In primo luogo, garantisce stabilità: un calcolo su finestra mobile porterebbe ad oscillazioni eccessive del parametro, con effetti indesiderati sui pesi di portafoglio. In secondo luogo, rispetta la coerenza teorica: δ è concepito come parametro strutturale delle preferenze di rischio del mercato, infatti si assume che l’avversione al rischio media degli investitori sia un fenomeno strutturale e più stabile nel lungo periodo ed è quindi più appropriato stimarlo su base cumulata anziché sulla sola dinamica recente. Ciò rende la stima di δ più robusta e meno prociclica, evitando che il suo valore venga distorto da picchi di volatilità recenti o da movimenti di mercato di breve termine.

Infine, la distinzione tra i due approcci consente di bilanciare il modello: mentre la matrice di varianza-covarianza Σ viene stimata su finestra mobile con metodologia EWMA, per catturare la natura dinamica e di breve periodo delle volatilità e delle correlazioni, il parametro δ funge da ancoraggio più stabile e robusto.

In sintesi, l’utilizzo di un parametro di avversione al rischio calcolato attraverso una finestra “expanding” consente di ottenere stime meno soggette a rumore statistico, più coerenti con la natura di lungo periodo di δ , e allo stesso tempo complementari alla stima dinamica della matrice Σ , fornendo così una base metodologica solida e bilanciata per il modello Black-Litterman.

4.3.6 Il parametro Tau (τ)

All'interno della sofisticata architettura del modello Black-Litterman, il parametro Tau (τ) ha il compito di modulare il peso relativo tra il portafoglio di equilibrio implicito nel mercato e le opinioni dell'investitore (le cosiddette views). Esso può essere concettualizzato come un "regolatore di fiducia", una manopola che l'investitore utilizza per calibrare il peso da assegnare al punto di partenza neutrale del modello: i rendimenti di equilibrio impliciti nel mercato, noti come prior. La sua funzione è quella di modulare l'incertezza associata a questa visione di consenso, determinando in ultima istanza quanto le views soggettive dell'investitore potranno influenzare l'allocazione finale.

La scelta del suo valore, quindi, non è una mera formalità tecnica, ma una dichiarazione metodologica precisa. Un basso valore assegnato al parametro tau (τ) implica una forte fiducia nelle stime di mercato; al contrario, un valore elevato di τ segnalerebbe un profondo scetticismo verso il consenso di mercato, lasciando che le previsioni soggettive dell'investitore diventino il motore quasi esclusivo del processo, con il rischio di guidare l'allocazione verso lidi potenzialmente estremi.

La logica dietro la scelta di questo parametro risiede nel principio di prudenza e nella natura stessa del modello Black-Litterman. L'asset allocation prevista da quest'ultimo ha lo scopo fondamentale di superare i limiti imposti da Markowitz, per questa ragione all'interno del modello di Black-Litterman viene assegnato un ruolo fondamentale al portafoglio di mercato (prior) ovvero quello di essere un punto di riferimento efficiente, ricco di informazioni e precisione. Le views soggettive hanno il compito di correggere ed affinare tale equilibrio, senza però stravolgerlo, giustificando un valore basso di τ .

La letteratura non fornisce un'unica regola per stimare τ , ma concorda su alcuni intervalli ragionevoli. He e Litterman (1999) e diversi studi successivi indicano che valori compresi tra 0,01 e 0,05 rappresentano una scelta sensata, in quanto riflettono l'idea che l'incertezza sulla media dei rendimenti sia inferiore a quella sulla varianza. L'adozione di un valore come 0,05 implica quindi l'assunto che il portafoglio di mercato, con i suoi rendimenti impliciti, costituisca un punto di riferimento efficiente e informato.

Dal punto di vista operativo, questa impostazione garantisce che il modello rimanga ancorato a un'allocazione di base ben diversificata. Le deviazioni dal benchmark, determinate dai segnali generati dall'indicatore Momentum, avvengono in modo disciplinato e misurato, prevenendo così la creazione di portafogli eccessivamente concentrati o instabili, rafforzando la robustezza e la plausibilità dell'intera strategia di investimento.

In virtù di queste considerazioni teoriche e pratiche, in questa ricerca al parametro τ è stato assegnato il valore di 0,05 assicurando che il modello resti ancorato all'equilibrio di mercato (evitando eccessive distorsioni da parte delle views), ma allo stesso tempo si sufficientemente flessibile da incorporare le opinioni generate dall'indicatore Momentum. Si è quindi aderito perfettamente alle assunzioni teoriche della letteratura e alla pratica consolidata, garantendo un potenziale confronto e replicabilità.

In sintesi, fissare $\tau = 0,05$ consente di mantenere un compromesso equilibrato: il modello resta ancorato all'equilibrio di mercato, ma al tempo stesso si mostra flessibile nell'integrare informazioni nuove e pertinenti attraverso le views.

4.3.7 Calcolo dei Rendimenti di Equilibrio: la Prior (II)

Come già analizzato nel capitolo 3, il punto di partenza del modello Black-Litterman e la sua più grande innovazione rispetto all'approccio di Markowitz, risiedono nel modo in cui vengono definiti i rendimenti attesi. Anziché affidarsi a stime storiche spesso instabili, il modello introduce il concetto di rendimenti di equilibrio, noti come Prior o vettore Π . Questi non sono una previsione, ma rappresentano la risposta a una domanda fondamentale: "Quale vettore di rendimenti attesi giustificerebbe la composizione del portafoglio di mercato che osserviamo oggi, dato il suo profilo di rischio?".

Il modello Black-Litterman risolve questo problema alla radice attraverso il processo di ottimizzazione inversa (reverse optimization), il cui risultato è il vettore dei rendimenti di equilibrio (Π). Questo approccio si basa sull'assunzione, derivata dal CAPM, che il portafoglio di mercato ponderato per la capitalizzazione rappresenti il punto di equilibrio che tutti gli investitori collettivamente trovano ottimale per le loro allocazioni. Il

vettore Π , quindi, non è solo una previsione attiva, ma incarna il consenso neutrale e oggettivo del mercato, rappresentando il premio al rischio che il mercato nella sua totalità richiede per detenere ciascun asset, data la sua volatilità e la sua correlazione con tutti gli altri.

Nel nostro framework, questo vettore viene calcolato ad ogni ribilanciamento, mettendo insieme i parametri di mercato precedentemente stimati. La formula applicata è la seguente:

$$\Pi = \delta_{market} \cdot \Sigma \cdot w_{market}$$

dove:

- δ_{market} è il coefficiente di avversione al rischio del mercato, stimato con una finestra crescente per garantirne la stabilità.
- Σ è la matrice di covarianza adattiva, calcolata tramite EWMA su una finestra mobile per riflettere le condizioni di rischio recenti.
- w_{market} è il vettore dei pesi di ciascun titolo nel portafoglio di riferimento, basati sulla loro capitalizzazione di mercato.

Il risultato è il vettore dei rendimenti in eccesso impliciti, ovvero i rendimenti attesi al di sopra del tasso risk-free (rf). Questo vettore Π costituisce la "credenza a priori" (prior) nel processo bayesiano: è il punto di partenza stabile e ben diversificato che verrà successivamente aggiornato e "corretto" dalle views quantitative generate dal nostro segnale di Momentum. Se un investitore non avesse alcuna opinione personale, il modello gli suggerirebbe di detenere semplicemente il portafoglio di mercato, la cui logica di rischio-rendimento è perfettamente riassunta dal vettore Π .

Nel nostro framework, questa teoria viene tradotta in una pratica rigorosa e dinamica: ad ogni data di ribilanciamento, il processo inizia con la definizione dell'universo investibile, selezionando i 20 titoli più capitalizzati dell'S&P 500 per calcolare i pesi di mercato w_{market} per quell'anno. Successivamente, viene stimata una matrice di covarianza Σ adattiva, utilizzando la metodologia EWMA su una finestra mobile di tre anni, per catturare la natura mutevole delle correlazioni. Parallelamente, viene calcolato il

parametro di avversione al rischio δ attraverso una finestra crescente sui rendimenti dello SPY, garantendo una stima robusta e strutturale.

Tutti questi calcoli vengono eseguiti utilizzando rendimenti in eccesso (excess returns), ovvero al netto del tasso risk-free, che viene opportunamente convertito alla frequenza mensile della strategia. Infine, questi tre ingredienti (δ , Σ , e w_{market}) vengono combinati nella formula per calcolare il vettore delle prior Π .

Si genera così l'insieme di rendimenti attesi che fungono da ancora informativa, punto di riferimento neutrale che il modello andrà poi ad aggiornare in modo disciplinato, innestando su questa base le previsioni quantitative derivate dal segnale di Momentum.

4.3.8 La matrice link (P)

Come abbiamo visto nel Capitolo 3 dove abbiamo definito e spiegato il modello Black-Litterman, la matrice P , o anche link matrix, è lo strumento matematico che prende le intuizioni e le previsioni dell'investitore (le views) e le converte in una struttura rigorosa che il modello può elaborare. Ogni riga della matrice P , infatti, corrisponde a una singola view, specificando attraverso una combinazione di pesi quali asset ne siano l'oggetto.

Nel nostro approccio, le views generate dal segnale di Momentum sono di natura assoluta: non esprimono un confronto tra più titoli, ma un'aspettativa su un singolo asset. Di conseguenza, la matrice P assume una forma particolarmente intuitiva e pulita. Per ogni view formulata, la riga corrispondente in P diventa un semplice vettore "indicatore": è riempita di zeri, con un unico valore pari a 1 posizionato strategicamente per "puntare" alla colonna dell'asset oggetto della previsione.

Questa scelta non è casuale, ma discende direttamente dalla natura del nostro segnale: poiché l'indicatore Momentum fornisce un punteggio individuale per ogni titolo, una matrice P strutturata in questo modo garantisce una coerenza perfetta tra il segnale generato e la sua rappresentazione nel modello. Sebbene il framework Black-Litterman sia sufficientemente flessibile da gestire anche views relative, la nostra implementazione si concentra sulla forma assoluta, più diretta e allineata al segnale.

Questa rappresentazione compatta rende l'integrazione bayesiana finale particolarmente lineare. Il modello può così combinare in modo trasparente la prior di mercato con le

nostre previsioni puntuali su singoli titoli, il cui peso sarà poi calibrato dall'incertezza specificata nella matrice Ω .

4.3.9 La Matrice dell'Incetezza (Ω)

Se il vettore Q esprime cosa l'investitore si aspetta e la matrice P definisce su quali asset si esprime, la matrice Omega (Ω) ha il compito fondamentale di quantificare quanto l'investitore sia sicuro di ciascuna di queste previsioni. Senza questa matrice, il modello non sarebbe in grado di bilanciare in modo corretto il peso delle opinioni soggettive rispetto ai rendimenti di equilibrio di mercato.

Nel framework bayesiano del modello, ogni view non è una certezza assoluta, ma una stima probabilistica dotata di un proprio margine di errore. La matrice Ω formalizza rigorosamente questo concetto, agendo come la matrice di varianza-covarianza degli errori associati alle views.

Nella sua implementazione più comune, l'approccio originario proposto da He e Litterman (1999), e in quella adottata da questo framework, Ω è una matrice diagonale. Ogni elemento sulla diagonale rappresenta la varianza della view corrispondente, mentre gli elementi fuori diagonale sono posti a zero. Questa struttura implica l'assunzione, standard e pragmatica, che gli errori di stima delle diverse views siano indipendenti tra loro, evitando di introdurre correlazioni arbitrarie tra previsioni formulate su asset differenti. Tale semplificazione ha anche il vantaggio di garantire maggiore stabilità numerica, riducendo il rischio che la matrice diventi mal condizionata e quindi difficilmente invertibile. Nel contesto di questo studio, la scelta della forma diagonale risulta anche particolarmente coerente con la natura assoluta delle views, infatti ciascuna previsione è riferita a un singolo titolo, e dunque la sua incertezza riguarda esclusivamente quell'asset.

Il valore di ogni elemento diagonale è inversamente proporzionale alla fiducia riposta nella previsione:

- una grande fiducia in una view si traduce in una piccola varianza in Ω .

- una scarsa fiducia, o una grande incertezza, corrisponde a una grande varianza.

Stabilire manualmente un valore di incertezza per ogni singola previsione sarebbe un processo altamente soggettivo e difficile da replicare. Per questo motivo, il modello originale di He e Litterman (1999) ha introdotto un metodo sistematico e intuitivo per derivare Ω , legando la fiducia in una view al rischio intrinseco degli asset su cui essa è formulata. La metodologia, implicitamente utilizzata anche dal nostro codice, calcola l'incertezza di ogni view in modo proporzionale alla varianza del portafoglio che la rappresenta. La formula è la seguente:

$$\Omega = \text{diag}(\tau P \Sigma P^T)$$

dove:

- Σ è la matrice di varianza-covarianza stimata tramite EWMA
- P è la link matrix che associa le views agli asset
- τ è il parametro di scaling che calibra l'impatto complessivo delle views rispetto al prior di mercato

Legando la fiducia soggettiva a una misura oggettiva del rischio di mercato (Σ), il modello si assicura che le previsioni su asset più "rumorosi" vengano automaticamente trattate con maggiore cautela.

Nel processo bayesiano finale, l'inverso di Ω va a determinare il peso effettivo di ciascuna view. Una view espressa con alta fiducia (e quindi bassa varianza in Ω) avrà un'alta precisione, esercitando una forte influenza sui rendimenti attesi finali e spingendo l'allocazione del portafoglio in modo deciso verso la direzione indicata dalla previsione. In questo modo, la matrice Ω agisce come il meccanismo finale che traduce la fiducia qualitativa in un peso quantitativo rigoroso, garantendo un equilibrio disciplinato tra le convinzioni del mercato e quelle dell'investitore.

Per concludere, la costruzione di Ω come $\tau P \Sigma P^T$ consente di ottenere un equilibrio naturale: le views influenzano il portafoglio in misura proporzionata sia alla forza del segnale che al rischio sottostante, mantenendo così la coerenza interna con la stima di Σ e con la struttura del modello.

4.4 L'Ottimizzazione Finale: Calcolo dei Pesi e Vincoli di Portafoglio

Una volta spiegate e definite come sono state ottenute e calcolate tutte le componenti fondamentali e necessarie al funzionamento del modello Black-Litterman, ovvero il vettore delle prior (Π), il vettore contenete le views (Q), la matrice di collegamento (P), la matrice di incertezza (Ω) e la matrice di varianza-covarianza (Σ), si procede al calcolo del risultato centrale del framework: il vettore dei rendimenti attesi a posteriori (μ_{BL}). Questi rendimenti rappresentano la sintesi tra la conoscenza neutrale del mercato e le previsioni quantitative generate dall'indicatore di Momentum. In termini formali, vengono ottenuti attraverso la formula finale del modello Black-Litterman:

$$\mu_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

Il risultato, quindi, non è una semplice previsione ex novo, ma una media ponderata tra i rendimenti impliciti di equilibrio (Π) e le views quantitative derivate dal segnale Momentum, in cui i pesi relativi dipendono dal grado di incertezza espresso da Ω .

Il nuovo vettore dei rendimenti attesi μ_{BL} diventa l'input chiave per la fase finale e operativa del modello: la determinazione dei pesi ottimali del portafoglio. Per tradurre queste aspettative di rendimento in un'allocazione concreta, il framework di questa ricerca ritorna al paradigma dell'ottimizzazione media-varianza, prevedendo così la massimizzazione della funzione di utilità quadratica dell'investitore.

L'obiettivo è individuare il vettore di pesi w che realizza il miglior trade-off possibile tra la massimizzazione del rendimento atteso e la minimizzazione del rischio. Nel modello Black-Litterman la funzione obiettivo da massimizzare è la seguente:

$$U(w) = w^T\mu_{BL} - \frac{\delta}{2} w^T\Sigma w$$

In questa equazione, il primo termine ($w^T\mu_{BL}$) rappresenta il rendimento atteso del portafoglio, calcolato utilizzando i rendimenti a posteriori del modello. Il secondo termine ($\frac{\delta}{2} w^T\Sigma w$) quantifica il rischio del portafoglio (la sua varianza), il quale viene penalizzato in base al profilo specifico dell'investitore, rappresentato dal suo coefficiente di avversione al rischio (δ_{user}).

Tuttavia un'ottimizzazione puramente teorica e priva di vincoli rischierebbe di produrre soluzioni estreme, difficilmente applicabili nella realtà e generare portafogli teoricamente ottimali ma praticamente irrealizzabili. Per questo motivo, il processo è stato inquadrato all'interno di una serie di vincoli operativi e meccanismi di regolarizzazione che ne garantiscono il realismo e la stabilità. In questa ricerca sono stati implementati tre importanti meccanismi di controllo:

1. Vincolo Long-Only: è stato imposto il divieto di effettuare vendite allo scoperto, una restrizione comune per la maggior parte dei mandati di investimento. Matematicamente, questo si traduce nel vincolo che ogni peso del portafoglio debba essere non negativo ($w_i \geq 0$). Ricordiamo allora che, qualora il punteggio dell'indicatore sintetico Momentum di un titolo scenda nella zona di ipervenduto (≤ 25), essendoci il vincolo long-only del portafoglio, l'ottimizzatore andrà a minimizzare l'esposizione a tale titolo, calcolando un sottopeso significativo rispetto al benchmark, che può arrivare fino a un azzeramento completo della posizione, ma non andrà in alcun caso ad attivare una vendita allo scoperto nonostante il suo Momentum negativo.
2. Il Vincolo di Budget: oltre al vincolo operativo "long-only" l'ottimizzazione è soggetta a un vincolo ancora più fondamentale, il vincolo di budget. Questo impone che l'intero capitale a disposizione venga sempre investito. Matematicamente, questo si traduce nella condizione che la somma di tutti i pesi (w_i) del portafoglio debba essere sempre uguale a 1 (o al 100%). Ovvero:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Questo vincolo assicura che non vi sia liquidità non investita all'interno del portafoglio, né che si faccia ricorso a leva finanziaria (indebitamento per investire più del capitale disponibile). È una condizione standard in tutti i modelli di asset allocation, inclusi quelli di Markowitz e Black-Litterman, e garantisce che il portafoglio rappresenti sempre una piena allocazione delle risorse a disposizione dell'investitore. Nel nostro codice, questo vincolo è gestito implicitamente sia

dalla funzione di ottimizzazione sia dai passaggi di pulizia e rinormalizzazione dei pesi che assicurano, dopo ogni calcolo, che la loro somma torni esattamente a 1.

3. Tetto sul Peso Massimo: per prevenire un'eccessiva concentrazione del capitale su un singolo titolo, anche a fronte di una view molto forte, è stato introdotto un limite massimo del 25% per ogni asset in portafoglio ($w_i \leq 0.25$). Questo vincolo agisce come una misura prudenziale, come una rete di sicurezza, impedendo al modello di fare scommesse sproporzionate, anche a fronte di un segnale di Momentum particolarmente forte, forzando la diversificazione e mitigando il rischio idiosincratico.
4. Regolarizzazione L2 (o ridge): per migliorare ulteriormente la robustezza e la stabilità dei pesi calcolati, è stata aggiunta una penalità di regolarizzazione L2 all'ottimizzatore. Questa tecnica, comune nel machine learning e nell'ottimizzazione numerica, aggiunge un termine alla funzione obiettivo che penalizza la somma dei quadrati dei pesi. Tale regolarizzazione scoraggia il modello dall'assegnare pesi eccessivamente grandi a pochi asset, specialmente quando questi sono altamente correlati. Il risultato è un portafoglio più bilanciato, meno sensibile a piccole variazioni degli input e spesso più performante in un contesto out-of-sample.

È importante sottolineare quest'ultimo meccanismo di regolarizzazione utilizzato nella fase di ottimizzazione dell'utilità quadratica.

Infatti uno dei problemi più noti dell'ottimizzazione di portafoglio è l'instabilità dei pesi: piccole variazioni negli input (rendimenti attesi, covarianze) possono produrre variazioni anche molto ampie nelle soluzioni ottimali. In tali contesti, l'ottimizzatore tende a concentrare il portafoglio su pochi titoli, amplificando il rumore statistico e riducendo la robustezza out-of-sample.

Per mitigare questo problema, in questa ricerca è stata introdotta una penalità di regolarizzazione L2 (o ridge) all'interno della funzione di utilità. Formalmente, la funzione da massimizzare diventa:

$$\max_w U(w) = w^\top \mu_{BL} - \frac{\delta_{user}}{2} w^\top \Sigma w - \gamma \|w\|_2^2$$

dove il nuovo termine

$$\gamma \|w\|_2^2 = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N w_i^2$$

Nel presente lavoro, il parametro di regolarizzazione ($\gamma > 0$), che controlla l'intensità della penalizzazione, è stato fissato a $\gamma = 0.1$, un valore che bilancia efficacemente la stabilizzazione dei pesi senza snaturare la logica del modello Black-Litterman. In questo modo, la regolarizzazione non sostituisce la struttura teorica del modello, ma ne potenzia l'affidabilità pratica, rendendo i risultati più solidi e replicabili.

Il termine L2, quindi, non modifica le attese a posteriori μ_{BL} né la stima di Σ , ma agisce solo in fase di scelta dei pesi. Operativamente questo:

- riduce la sensibilità dell'allocazione a piccole variazioni di μ_{BL} e Σ ;
- limita portafogli troppo concentrati quando gli asset sono altamente correlati;
- tende a ridurre il turnover e quindi i costi di transazione.

Quindi dal punto di vista interpretativo, la regolarizzazione L2 introduce una sorta di “costo implicito di concentrazione”, che spinge il modello verso soluzioni più distribuite. A differenza di altre tecniche di regolarizzazione (es. L1/LASSO), il ridge non azzerava i pesi ma li riduce in maniera omogenea, favorendo un portafoglio più bilanciato e stabile.

Inoltre, tale penalità viene implementata nella ricerca perché in presenza di asset fortemente correlati, la matrice di covarianza può risultare prossima alla singolarità, cioè quasi non invertibile e mal condizionata il che può produrre una matrice Sigma invertita

numericamente instabile. Così la penalizzazione L2 agisce come una forma di “shrinkage”, ovvero questo termine di penalità ha la capacità di “tirare” i pesi verso valori più piccoli e meglio distribuiti, migliorando la stabilità del problema e riducendo la sensibilità dell’ottimizzatore a piccole variazioni degli input. L’aggiunta di termini di regolarizzazione rende i portafogli più realistici e implementabili, mitigando i limiti pratici del modello classico di Markowitz.

In sintesi, la fase finale non è una semplice ottimizzazione matematica, ma un processo controllato e realistico. La combinazione dei sofisticati rendimenti attesi del modello Black-Litterman con un’ottimizzazione vincolata e regolarizzata assicura che i portafogli finali (sia Neutrale che Aggressivo) siano robusti, diversificati e pienamente allineati non solo con il segnale quantitativo, ma anche con le esigenze pratiche della gestione di portafoglio.

4.5 La meccanica del Backtest

Dopo aver definito l’architettura teorica del modello, è fondamentale descrivere in dettaglio la meccanica operativa con cui questa teoria viene tradotta in una simulazione empirica. Questa sezione illustra il funzionamento del motore di backtesting, spiegando come vengono gestiti il calendario, la sequenza delle operazioni, i costi e il tracciamento delle performance, garantendo che ogni passaggio rispecchi fedelmente la logica implementata nel codice.

4.5.1 Il Framework Temporale

Il cuore della simulazione è un ciclo che avanza giorno per giorno per tutto il periodo di analisi (2012-2024), un approccio granulare che permette di catturare con precisione l’evoluzione del valore di ogni strategia.

La performance dei portafogli, infatti, viene aggiornato quotidianamente applicando i rendimenti di giornata ai pesi detenuti, assicurando che l'effetto della capitalizzazione composta (compounding) venga calcolato in modo accurato.

Quindi, tra una decisione di ribilanciamento e l'altra, i pesi del portafoglio non rimangono statici ma, a causa della diversa performance giornaliera degli asset, i pesi assegnati ai singoli asset del portafoglio "fluttuano" (drifts) naturalmente. Il ciclo giornaliero simula questo comportamento, ricalcolando i pesi ogni giorno in base ai rendimenti, fornendo una rappresentazione molto più realistica e fedele del valore effettivo del portafoglio.

Le decisioni strategiche, tuttavia, avvengono su un orizzonte diverso e più ampio. Coerentemente con l'impostazione mensile della strategia, l'intero modello Black-Litterman viene ricalcolato e i portafogli attivi vengono ribilanciati solo all'ultimo giorno di borsa di ogni mese. Per garantire un confronto equo, tutte e tre le strategie (Buy & Hold, BL Neutrale e BL Aggressivo) partono lo stesso giorno, con un capitale iniziale di 100.000 dollari e gli stessi pesi. Il primo ribilanciamento per le strategie attive avviene però solo a partire dal secondo mese, per dare al modello il tempo di assestarsi e raccogliere dati, mentre il portafoglio Buy & Hold viene ribilanciato solo una volta all'anno, al primo giorno di contrattazioni, per adeguarsi al nuovo universo dei Top 20 titoli dell'S&P 500.

4.5.2 Il Processo di Ribilanciamento: dalla Stima all'Allocazione

Alla fine di ogni mese, per i portafogli attivi si innesca una sequenza di calcoli.

Per la stima del rischio, come già visto in precedenza, si utilizzano i dati degli ultimi tre anni, un approccio mobile che rende la matrice di covarianza Σ (stimata tramite la metodologia EWMA) reattiva alle condizioni di mercato recenti. Al contrario, il parametro di avversione al rischio δ viene calcolato su una finestra crescente, che include tutta la storia disponibile del proxy di mercato (SPY), per ottenere una stima più stabile e strutturale.

Con questi parametri, si procede a calcolare i rendimenti di equilibrio (I) tramite ottimizzazione inversa. Parallelamente, si campiona lo score del segnale "Momentum(5)" per ogni titolo: se il punteggio si trova in una zona estrema (sopra 75 o sotto 25), viene

generata una view quantitativa, il rendimento assegnato a questa view deriva dalla mappa "Q" che associa ogni score al valore atteso dei rendimenti storici osservati su quel titolo per quel determinato punteggio del segnale Momentum.

È importante sottolineare che, se nessun titolo genera un segnale, la strategia applica una logica di carry-forward, mantenendo così i pesi del mese precedente per evitare turnover e costi inutili.

Infine, se sono state generate delle views, i rendimenti di equilibrio e le previsioni vengono combinati nel modello Black-Litterman per ottenere i rendimenti attesi a posteriori (μ_{BL}). Questi ultimi, insieme alla matrice di rischio Σ , alimentano un ottimizzatore di Markowitz che, soggetto a vincoli di long-only, al vincolo di budget (tutto deve essere sempre investito), al tetto sui pesi (del 25%) e ad una regolarizzazione L2 (Ridge), calcola le allocazioni finali per il portafoglio Neutrale e Aggressivo.

4.5.3 Realismo Operativo e Valutazione

Per rendere la simulazione il più realistica possibile, il backtest considera i costi di transazione, che rappresentano una delle principali frizioni operative nella gestione di un portafoglio attivo. Ad ogni ribilanciamento, il modello esegue i seguenti passaggi:

1. Il turnover viene determinato confrontando i nuovi pesi ottimali forniti dall'ottimizzatore con i pesi effettivamente detenuti immediatamente prima del ribilanciamento. È importante sottolineare che questi ultimi non coincidono semplicemente con i pesi fissati al periodo precedente, ma riflettono, per l'appunto, l'evoluzione naturale del portafoglio durante l'intervallo, essendo stati aggiornati giorno per giorno in base ai rendimenti degli asset (drift). In questo modo, alla data di ribilanciamento, i pesi "correnti" sono quelli risultanti dalle fluttuazioni di mercato intervenute nel frattempo.

La somma delle variazioni assolute tra pesi ottimali e pesi correnti definisce il turnover di portafoglio, ovvero la percentuale del capitale che deve essere

movimentata (venduta e acquistata) per riallineare la composizione del portafoglio alla nuova allocazione target.

2. Il turnover viene poi moltiplicato per il controvalore totale del portafoglio in quel momento per determinare il valore monetario scambiato. Su questa cifra viene applicato un costo fisso di 10 punti base (bps), ovvero lo 0,10%, che simula le commissioni di transazione. L'importo risultante viene quindi sottratto direttamente dal valore del portafoglio, impattando la sua performance.

Quindi:

1. Calcolo del turnover come somma delle variazioni assolute dei pesi

$$\text{Turnover} = \sum_{i=1}^n |w_i^{\text{nuovo}} - w_i^{\text{corrente}}|$$

2. Conversione in controvalore monetario

$$\text{Valore scambiato} = \text{Turnover} \cdot V_{\text{portafoglio}}$$

3. Costo di transazione applicato

$$\text{Costo}_{\text{transazioni}} = \text{Valore scambiato} \cdot \text{Costo}_{\text{bps}}$$

Questa procedura garantisce che ogni decisione di ribilanciamento porti con sé un costo operativo. È importante sottolineare che si tratta di un'approssimazione che cerca di essere il più realistica possibile: penalizzando le strategie che generano un turnover eccessivo, essa fornisce una misura più onesta e prudente della performance netta, depurata da frizioni che nel mondo reale sono inevitabili.

L'ultimo step previsto dalla simulazione è il calcolo delle principali metriche di performance che vengono utilizzate per valutare e confrontare in modo oggettivo l'efficacia delle diverse strategie. Ciascuna metrica offre una prospettiva diversa sul profilo di rischio-rendimento dei portafogli, e la loro analisi congiunta permette una valutazione completa. Le principali metriche calcolate sono:

- CAGR (Compound Annual Growth Rate): è il tasso di crescita annuale composto, ovvero il tasso di rendimento medio geometrico che un portafoglio ha generato su base annua. A differenza di una media semplice, il CAGR tiene conto dell'effetto della capitalizzazione (compounding) ed è la misura più accurata per descrivere il rendimento di un investimento nel lungo periodo. Un valore più alto indica una performance migliore.
- Volatilità Annualizzata: misura la dispersione dei rendimenti di un portafoglio attorno alla loro media, ed è la principale proxy per il rischio totale. Viene calcolata come la deviazione standard dei rendimenti periodici (mensili) e poi annualizzata. Una volatilità più bassa, a parità di rendimento, è preferibile in quanto indica un percorso di crescita più stabile e meno "nervoso".
- Max Drawdown: rappresenta la massima perdita percentuale che il portafoglio ha subito da un suo picco precedente a un successivo punto di minimo. È una misura di rischio molto concreta e intuitiva, in quanto risponde alla domanda "qual è stata la peggior perdita che avrei subito investendo in questa strategia?". Un valore più piccolo (meno negativo) indica una maggiore capacità di preservare il capitale durante le fasi avverse del mercato.
- Sharpe Ratio: è uno degli indici più utilizzati per misurare l'efficienza di un portafoglio. Calcola il rendimento in eccesso (ovvero, al di sopra del tasso risk-free) per ogni unità di rischio totale (volatilità). In sostanza, indica se il rendimento ottenuto è stato adeguato al rischio corso. Un valore più alto è migliore, poiché segnala una maggiore abilità nel generare rendimento per il rischio assunto.
- Sortino Ratio: è una variante più sofisticata dello Sharpe Ratio. Misura il rendimento in eccesso per ogni unità di rischio al ribasso (downside risk). A differenza dello Sharpe, che penalizza indifferentemente sia la volatilità positiva (verso l'alto) sia quella negativa (verso il basso), il Sortino considera solo la deviazione standard dei rendimenti negativi. È particolarmente utile per gli

investitori che sono più preoccupati dalle perdite che dalla volatilità in generale. Anche in questo caso, un valore più alto è migliore.

- **Calmar Ratio:** è un indice di performance che misura il rendimento in rapporto al rischio di perdita massima. Si calcola dividendo il CAGR per il valore assoluto del Max Drawdown. A differenza dello Sharpe Ratio, che usa la volatilità come misura di rischio, il Calmar si concentra sullo scenario peggiore (la perdita più grande subita). Un Calmar Ratio più alto è migliore, perché indica che la strategia ha generato rendimenti elevati rispetto alla sua peggiore perdita storica.
- **Tracking Error:** misura la divergenza tra l'andamento dei rendimenti di un portafoglio e l'andamento dei rendimenti del suo benchmark (che in questa tesi corrisponde al portafoglio Buy & Hold). Il Tracking Error viene calcolato come la deviazione standard della differenza tra i rendimenti del portafoglio e quelli del benchmark. Un Tracking Error basso indica che la strategia si discosta poco dal benchmark (tipico dei fondi passivi). Un valore alto, invece, segnala che la strategia è molto attiva e si assume un rischio significativo rispetto al mercato, con performance potenzialmente molto diverse, sia in positivo che in negativo³¹.
- **Turnover Annualizzato:** misura l'intensità dell'attività di ribilanciamento del portafoglio. Viene calcolato come la percentuale media del capitale che viene movimentata (comprata e venduta) in un anno. È un'importante proxy dei costi di transazione e dell'attività della strategia: un turnover elevato implica costi maggiori e una strategia più "attiva", mentre un turnover basso suggerisce una gestione più stabile e meno costosa.

³¹ Chen, J.(2024) *Tracking Error: Definition, Factors That Affect It, and Example*. Investopedia.

Quindi in sintesi, la meccanica del backtest implementata in questo studio è stata progettata per garantire il massimo rigore metodologico. L'architettura temporale previene il lookahead bias, il processo di ribilanciamento utilizza stime dei parametri sia adattive che strutturali e la gestione operativa include dettagli realistici come il drift dei pesi e l'impatto dei costi di transazione. Questo approccio integrato assicura che la valutazione finale delle performance non sia solo un esercizio teorico, ma una simulazione realistica e replicabile, in grado di fornire indicazioni significative sull'efficacia del modello di asset allocation proposto.

5 Analisi dei Risultati

Dopo aver costruito e spiegato l'architettura teorica e la meccanica operativa del backtest nei capitoli precedenti, si giunge ora al momento culminante della ricerca: l'analisi dei risultati.

Verranno di seguito presentati e interpretati gli esiti della simulazione storica condotta sul periodo 2012-2024. Si confronteranno le performance delle tre strategie di portafoglio: il benchmark passivo Buy & Hold, il modello Black-Litterman e la sua variante Aggressiva, valutandone non solo i rendimenti assoluti, ma anche il profilo di rischio, l'efficienza e i costi operativi.

L'obiettivo non è solo quello di presentare i dati, ma di trarre conclusioni significative sull'efficacia del segnale di Momentum, sull'impatto dell'avversione al rischio e sui limiti intrinseci del modello, fornendo una visione completa dei risultati emersi da questo studio.

5.1 Analisi delle Metriche di Performance Aggregate

La valutazione inizia con l'analisi delle metriche di performance aggregate, presentate nel capitolo 4.5.3, che riassumono l'esito dell'intero periodo di backtest (2012-2024) in una tabella comparativa. Questo primo esame permette di rispondere alla domanda fondamentale: quale strategia ha generato i migliori risultati, non solo in termini di rendimento assoluto, ma anche in rapporto al rischio assunto e ai costi operativi?

Metrica	BH	BL	BLA
CAGR	17,26%	16,71%	17,76%
Vol_Ann	15,54%	14,30%	15,49%
Sharpe	0,98	1,02	1,01
Sortino	1,49	1,52	1,55
MaxDD	-29,93%	-23,07%	-25,67%
Calmar	0,58	0,72	0,69
TrackingError	0,00%	6,31%	6,63%
Turnover_Ann	3,20	8,68	9,17

Tabella 2: Immagine elaborata in autonomia. Metriche di performance aggregate.

A prima vista, in termini di performance assoluta, la strategia Black-Litterman Aggressiva (BLA) emerge come la vincitrice, con un CAGR del 17,76%. Questo risultato supera sia il benchmark passivo Buy & Hold (BH), che si attesta al 17,26%, sia la strategia Black-Litterman Neutrale (BL), che registra un 16,71%. Ciò suggerisce che l'approccio più aggressivo, che dà maggior peso alle views del modello, è riuscito a generare il maggior tasso di crescita composto nel lungo periodo.

Tuttavia, l'analisi del rendimento deve essere immediatamente contestualizzata con quella del rischio. La volatilità annualizzata mostra un quadro interessante: la strategia BL Neutrale è stata la meno rischiosa, con una volatilità del 14,30%, riuscendo a ridurre significativamente le oscillazioni rispetto al mercato. Sorprendentemente, la strategia BLA, pur essendo la più attiva, ha mostrato un livello di rischio quasi identico a quello del benchmark (rispettivamente del 15,49% e del 15,54%).

La vera superiorità dei modelli attivi emerge però dall'analisi del Max Drawdown. Entrambe le strategie Black-Litterman hanno offerto una protezione del capitale nettamente superiore rispetto al benchmark durante le crisi. La strategia BL Neutrale ha registrato la perdita massima più contenuta (-23,07%), seguita dalla BLA (-25,67%), entrambe significativamente migliori del -29,93% del portafoglio Buy & Hold. Questo indica una notevole capacità del modello attivo di mitigare le perdite nei periodi più avversi, nonostante l'approccio risk-on e sostanzialmente a leva che il fattore Momentum possiede.

Però per determinare quale strategia abbia utilizzato il rischio in modo più efficace, si ricorre agli indici di performance corretta per il rischio. Lo Sharpe Ratio premia la strategia BL Neutrale, che con un valore di 1,02 si dimostra la più efficiente nel generare rendimento in eccesso per ogni unità di rischio totale. Segue a ruota la BLA (1,01), mentre il benchmark BH risulta il meno efficiente (0,98).

Il Sortino Ratio, che si concentra sul rischio al ribasso, inverte leggermente la classifica, premiando la strategia BLA (1,55), seguita dalla BL (1,52). Questo suggerisce che, sebbene più volatile, la strategia aggressiva è stata particolarmente abile nel generare rendimenti rispetto alle sole oscillazioni negative. Il Calmar Ratio, che rapporta il rendimento alla massima perdita subita, conferma la netta superiorità dei modelli attivi: la strategia BL Neutrale (0,72) e quella Aggressiva (0,69) mostrano una capacità molto maggiore del benchmark (0,58) di recuperare dalla loro peggiore perdita.

Infine, le metriche operative confermano la natura delle strategie. Il Tracking Error del 6,31% (BL) e del 6,63% (BLA) evidenzia come entrambi i portafogli si siano discostati significativamente dal benchmark (ricordiamo che questa metrica individua solo l'intensità del discostamento non la direzione) confermando il loro carattere attivo. Il Turnover Annualizzato quantifica la caratteristica tipica dell'asset allocation dinamica: le strategie BL e BLA registrano un turnover estremamente elevato (rispettivamente 8,68 e 9,17, ovvero 868% e 917%), indicando che il portafoglio viene interamente rinnovato più volte all'anno. Questo dato, sebbene molto alto, è coerente con la strategia mensile basata su segnali dell'indicatore sintetico Momentum sviluppata in questa ricerca.

In conclusione, l'analisi aggregata non decreta un vincitore assoluto, ma delinea due profili di successo:

- la strategia BL Aggressiva ha vinto in termini di performance assoluta (CAGR) e di efficienza rispetto al rischio di ribasso (Sortino Ratio).
- mentre la strategia BL si è dimostrata superiore in termini di efficienza complessiva (Sharpe Ratio), protezione del capitale (Max Drawdown) e rapporto rendimento/massima perdita (Calmar Ratio).

Quindi, entrambe le strategie attive hanno superato il benchmark Buy & Hold sulla maggior parte delle metriche corrette per il rischio, dimostrando l'efficacia del modello nel generare alfa e, soprattutto, nel gestire le fasi di mercato più difficili.

5.2 Analisi dell'Equity Line

Se le metriche aggregate forniscono una sintesi dell'andamento generale, l'analisi grafica dell'evoluzione del capitale (equity line) nel tempo permette di comprendere il comportamento dinamico delle strategie e di contestualizzare i risultati, identificando i regimi di mercato in cui gli approcci attivi hanno creato o distrutto valore rispetto al benchmark.

Il grafico dell'equity line mostra la crescita di un capitale iniziale di 100.000 \$ per le tre strategie.

Innanzitutto, vediamo che durante il periodo considerato le strategie attive si sono dimostrate divergenti soprattutto nella fase finale di mercato. Infatti la strategia BLA è stata capace di generare un risultato finale superiore a quello del benchmark passivo,

mentre la strategia attiva BL no. Tuttavia, il percorso per raggiungere tale risultato non è stato lineare; per un'analisi più appropriata, è corretto dividere l'andamento dell'equity line in diverse fasi distinte.



Figura 6: Immagine elaborata in autonomia. Equity Line totale.

Per una analisi più appropriata è corretto dividere l'equity line in quattro fasi distinte.

Prima Fase (2012-2016): La Conferma del Momentum



Figura 7: Immagine elaborata in autonomia. Equity Line Prima Fase (2012-2016).

In questa fase iniziale, caratterizzata da una tendenza rialzista dei mercati, emerge chiaramente una costante e persistente sovraperformance delle strategie attive rispetto al benchmark. Questo comportamento è una perfetta illustrazione della natura teorica del fattore Momentum, il quale, come documentato in letteratura, tende a generare i suoi migliori risultati proprio in regimi di mercato direzionali e con trend rialzisti stabili. L'indicatore "Momentum(5)", catturando la forza di questo trend, ha permesso ai portafogli BL di posizionarsi in modo più profittevole. È singolare, tuttavia, notare come le curve delle due strategie attive (Neutrale e Aggressiva) siano quasi perfettamente sovrapposte. Ciò suggerisce che, in questa fase, la minore avversione al rischio della strategia BLA non si è tradotta in un extra-rendimento significativo, poiché i segnali non erano abbastanza estremi da spingere l'ottimizzatore verso allocazioni marcatamente diverse.

Seconda Fase (fine 2016 – metà 2020): Divergenza e Segnali Predittivi



Figura 8: Immagine elaborata in autonomia. Equity Line Seconda Fase (2016-2020).

In questo secondo periodo, la sovraperformance delle strategie attive non solo persiste, ma si accentua e per la prima volta si assiste a una chiara divergenza tra il portafoglio Neutrale e quello Aggressivo. La strategia BLA riesce sistematicamente a generare rendimenti superiori, dimostrando che, in un contesto di mercato più volatile ma ancora positivo, una minore avversione al rischio ha permesso di sfruttare più efficacemente le

opportunità identificate dal segnale Momentum. L'assunzione di un maggior rischio attivo è stata quindi ripagata in termini di rendimento superiore. Un altro aspetto interessante che emerge è la potenziale capacità predittiva del segnale: in occasione delle correzioni di mercato (come quella di inizio e fine 2018), le strategie attive sembrano reagire con maggiore rapidità, anticipando le discese, sebbene con una volatilità a breve termine più accentuata e quindi movimenti a ribasso più violenti. Ciò ci permette di individuare un ulteriore utilizzo del fattore Momentum, e quindi delle strategie BL informate dai suoi indicatori, cioè quello di anticipatore del mercato.

Terza Fase (2020-2022): Lo Stress Test del Mercato Orso



Figura 9: Immagine elaborata in autonomia. Equity Line Terza Fase (2020-2022).

Questa fase rappresenta il test più severo per le strategie, coprendo lo shock iniziale della pandemia e, soprattutto, il mercato orso del 2022, innescato dall'inflazione e dal repentino e violento aumento dei tassi di interesse da parte della FED. In questo contesto, caratterizzato da alta volatilità e rapidi reversal, la natura trend-following del Momentum mostra i suoi limiti. Entrambe le strategie attive sottoperformano significativamente il benchmark, che beneficia della sua natura passiva e della ponderazione sui titoli value, spesso più resilienti in fasi di recessione o di forte incertezza. Questo periodo conferma la criticità ben nota in

letteratura dei cosiddetti "Momentum crashes", dove le strategie che inseguono i trend soffrono quando le tendenze si invertono bruscamente.

Solo a gennaio 2023 con il cambio di sentiment dei mercati, le strategie attive hanno incominciato un rapido recupero del gap formatosi con il portafoglio BH.

Quarta Fase (2023-2024): Il Recupero e la Vittoria dell'Aggressività

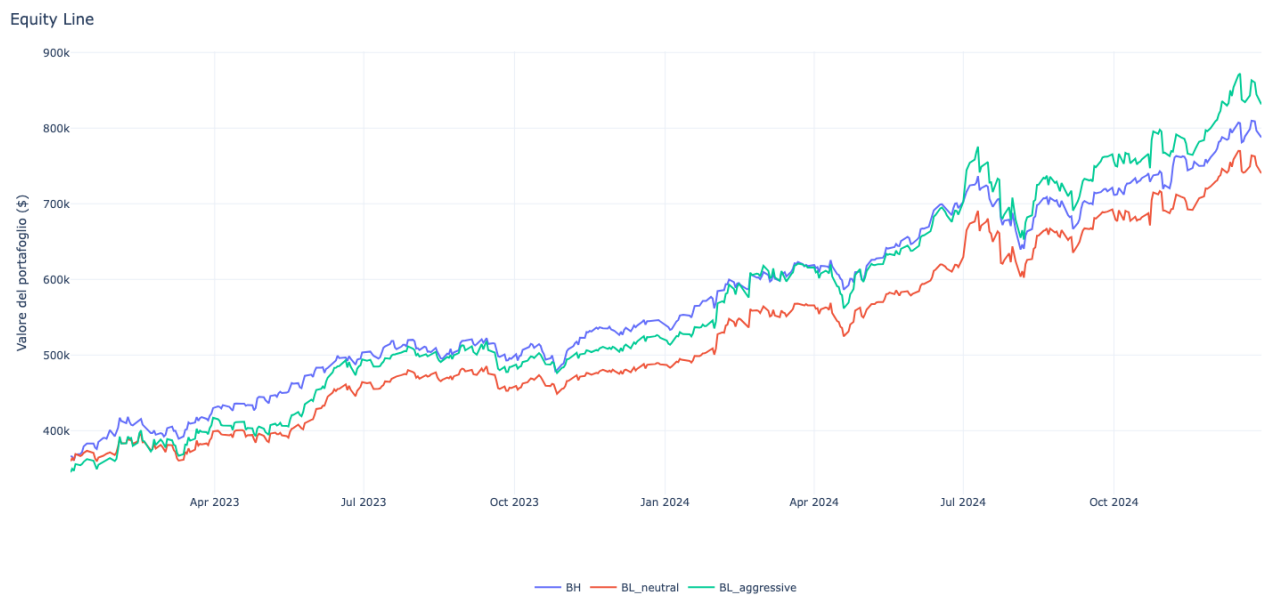


Figura 10: Immagine elaborata in autonomia. Equity Line Quarta Fase (2023-2024).

L'ultima fase, che mostra il prosieguo di questo recupero da parte delle due strategie attive, è caratterizzata da una loro forte performance.

È in questa fase che la strategia BLA dimostra tutta la sua forza: capitalizzando sul nuovo trend rialzista, non solo recupera tutto il terreno perso rispetto al benchmark, ma lo supera con decisione, terminando il backtest come la strategia più performante in assoluto. In questa fase, la minore avversione al rischio si è rivelata la scelta vincente, permettendo al portafoglio di "correre" insieme ai leader di mercato. Anche la strategia Neutrale recupera, ma con meno vigore, posizionandosi al di sotto del benchmark.

5.3 Analisi del Track Record Annuale e delle perdite (drawdown)

Se l'equity line descrive il viaggio, il track record annuale ne rappresenta le tappe fondamentali. L'analisi anno per anno permette di scomporre la performance aggregata e di comprendere in quali regimi di mercato il modello ha eccelso e in quali ha faticato, rivelando la vera natura del segnale di Momentum.

Date	BH	BL	BLA
2012	12,33%	9,52%	9,33%
2013	24,15%	26,31%	26,38%
2014	10,09%	13,45%	13,60%
2015	2,08%	2,28%	2,37%
2016	13,51%	16,91%	17,41%
2017	26,87%	26,03%	26,33%
2018	0,44%	-1,37%	-1,61%
2019	35,73%	37,16%	38,44%
2020	30,99%	15,95%	16,78%
2021	30,81%	19,54%	17,62%
2022	-29,93%	-19,10%	-22,79%
2023	47,54%	36,04%	51,97%
2024	44,67%	51,82%	59,03%

Tabella 3: Immagine elaborata in autonomia. Track Record Annuale dei tre portafogli.

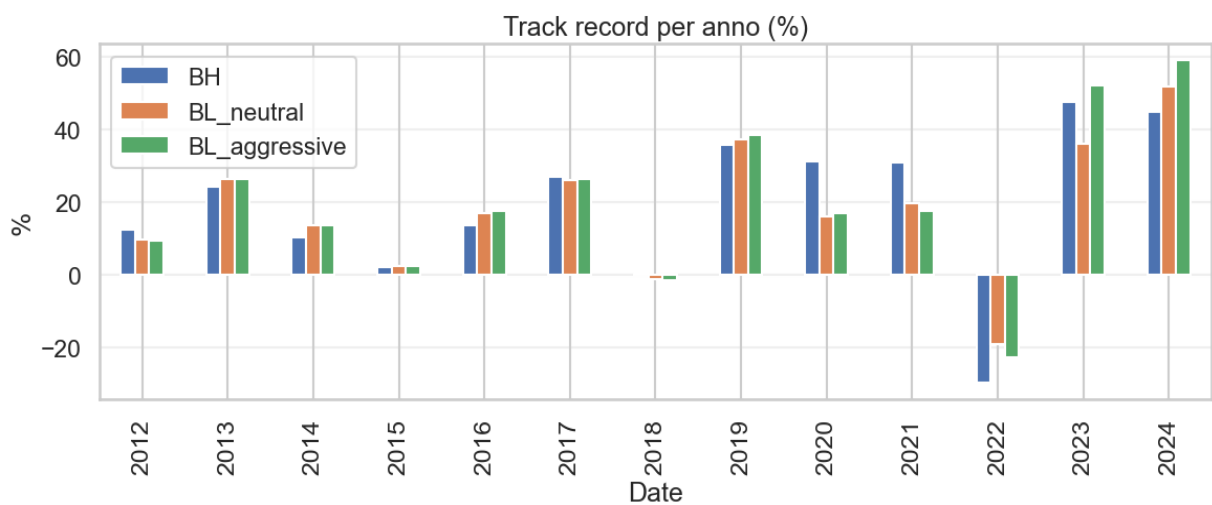


Figura 11: Immagine elaborata in autonomia. Track record annuale (Istogrammi)

Dall'analisi dei rendimenti annuali emerge chiaramente come le strategie dinamiche non abbiano garantito una sovraperformance costante sul benchmark. Su tredici anni, in cinque casi il portafoglio Buy & Hold ha ottenuto risultati migliori, portando il win-rate delle strategie attive al 61,5%. Questo dato conferma la difficoltà intrinseca di battere il mercato in maniera sistematica: la letteratura mostra come circa il 70% dei fondi comuni e degli investitori istituzionali tenda a sottoperformare gli indici di riferimento nel lungo periodo. In questo senso, il risultato raggiunto dal modello proposto rappresenta già un progresso rispetto alla media del settore, mostrando una struttura di asset allocation dinamica teoricamente ed empiricamente solida.

Coerentemente con la natura del fattore Momentum, le strategie hanno mostrato ottime performance in contesti di trend persistente (2012–2016, 2019, 2023–2024), mentre hanno sofferto nei regimi caratterizzati da shock improvvisi, alta volatilità o cambi di politica monetaria inattesi (2020–2021). Questo comportamento riflette quanto osservato in letteratura: il Momentum è un fattore “a leva”, capace di amplificare i guadagni in fasi direzionali ma anche vulnerabile nei periodi di inversione brusca.

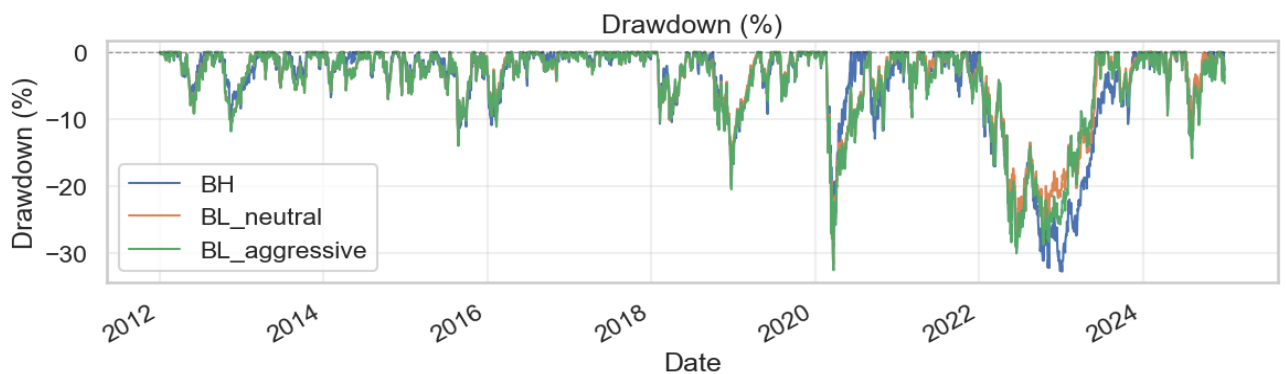


Figura 13: Immagine elaborata in autonomia. Drawdown (%).

Anche con il supporto del grafico del drawdown, si può osservare che il 2022 rappresenta un esempio emblematico della funzione di risk management insita nell'approccio dinamico: mentre il benchmark BH ha subito un drawdown vicino al -30%, le strategie attive hanno limitato le perdite a circa -19% (BL) e -23% (BLA). Ciò testimonia la capacità del modello di attenuare i ribassi più profondi, confermata da indicatori di robustezza come il Calmar Ratio, che risultano più favorevoli per la configurazione neutrale. In particolare, la strategia BL neutrale si è distinta per la sua resilienza: pur

sacrificando parte della performance nei rally, ha mostrato una migliore capacità di proteggere il capitale nelle fasi avverse, rispettando pienamente la funzione primaria di un modello di asset allocation prudente.

5.4 Analisi dei costi di transazione

Un ultimo aspetto cruciale per verificare l'efficienza di una strategia è valutare i costi di transazione, ovvero quelle frizioni naturali che accompagnano ogni attività di investimento e che, nel mondo reale, incidono in maniera rilevante sui risultati finali.

Commissioni BH	Commissioni BL	Commissioni BLA
578,39	30451,10	33518,82

Tabella 4: Costi totali di transazione

Come da immagine, la strategia Buy & Hold presenta commissioni quasi nulle: la sua natura statica minimizza i ribilanciamenti, evidenziando i vantaggi in termini di contenimento dei costi. Al contrario, le strategie attive, soprattutto quella aggressiva, generano un turnover più elevato che si traduce in costi sensibilmente maggiori.

Questi risultati confermano un principio noto nella letteratura sulla gestione attiva: maggiore è il grado di attività di trading, maggiore sarà il peso delle frizioni di mercato, che riducono il rendimento netto. Tale fenomeno è stato ampiamente documentato da Carhart (1997) e da Fama & French (2010) i quali mostrano come i costi di transazione rappresentino uno dei principali fattori che spiegano la difficoltà degli investitori istituzionali a sovraperformare i benchmark.

Tuttavia, la presenza di costi più alti non invalida l'efficacia delle strategie attive proposte: ciò che conta è la capacità di generare excess return sufficiente a compensare tali spese. In questo senso, le strategie Black–Litterman con Momentum hanno comunque prodotto un profilo rischio–rendimento competitivo anche dopo aver internalizzato le non poco rilevanti commissioni.

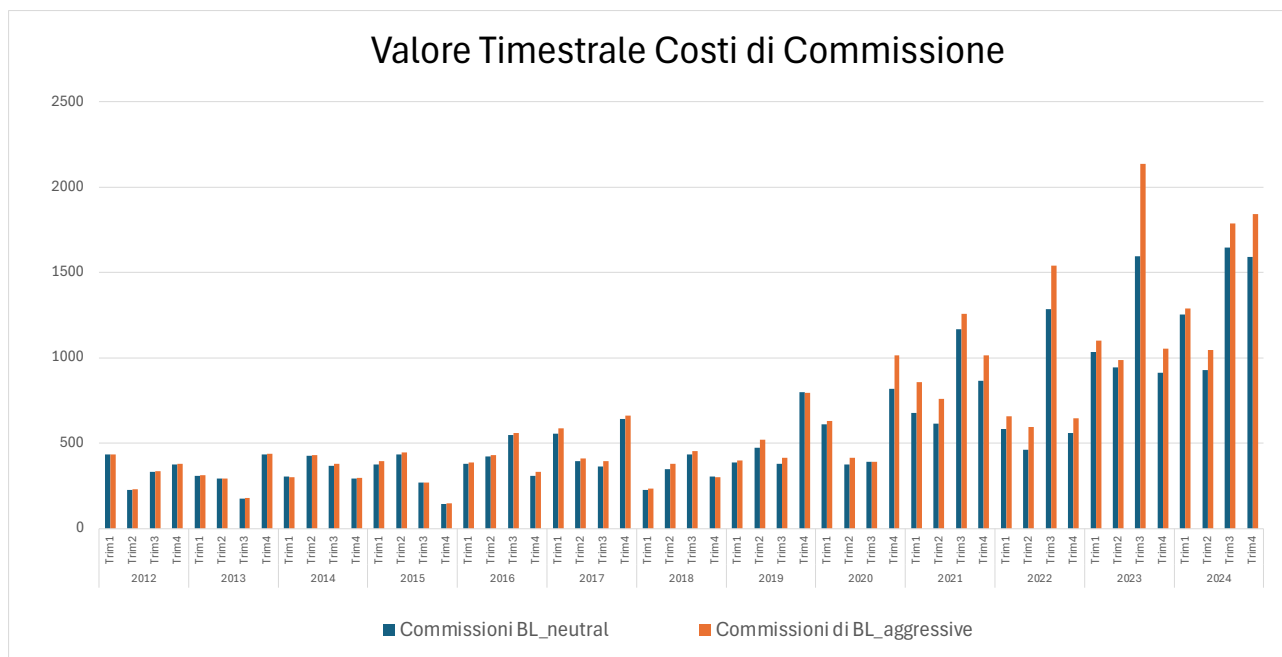


Figura 13: Immagine elaborata in autonomia. Valore Trimestrale Costi di Transazione dei soli portafogli attivi BL e BLA.

L'analisi dei costi di transazione, sia parziali sia totali, evidenzia come il confronto tra strategie attive e passive non possa limitarsi a rendimenti e rischi, ma debba necessariamente includere anche le frizioni operative.

Il fatto che le strategie attive, pur sopportando costi di oltre \$ 30.000, abbiano mantenuto un rendimento netto superiore o paragonabile al benchmark in più fasi del campione, rappresenta una conferma ulteriore della validità del modello proposto e della sua possibile applicabilità in contesti reali di gestione del portafoglio.

5.5 Conclusioni

Questo lavoro ha dimostrato come l'integrazione del fattore Momentum all'interno del modello Black-Litterman rappresenti un contributo significativo al dibattito sulla gestione attiva e passiva, offrendo una metodologia capace di bilanciare disciplina quantitativa e flessibilità adattiva. I risultati empirici hanno evidenziato che, sebbene non sia possibile eliminare del tutto i limiti strutturali insiti nelle strategie Momentum (come la vulnerabilità ai cosiddetti Momentum crashes), l'approccio proposto riesce a sfruttare in maniera sistematica le fasi di trend persistente e a limitare le perdite durante i

drawdown più profondi, migliorando così il profilo rischio–rendimento rispetto al benchmark.

Un ulteriore elemento di valore di questa tesi risiede nella possibilità di declinare il modello secondo differenti configurazioni in funzione delle preferenze dell’investitore. La variante BL neutrale si configura come la scelta ideale per chi privilegia la stabilità e la protezione del capitale, mostrando una maggiore resilienza nei periodi di stress di mercato. La versione BL aggressiva, invece, pur assumendo un livello di rischio superiore, ha dimostrato la capacità di generare alpha aggiuntivo, coniugando la ricerca di rendimento con una gestione del rischio più accorta rispetto al semplice benchmark passivo.

Questa duplice prospettiva testimonia la flessibilità del modello, che può adattarsi a profili di rischio eterogenei senza perdere coerenza teorica né solidità empirica. L’adozione di un framework di questo tipo consente di superare la rigida contrapposizione tra approcci passivi, spesso incapaci di reagire ai cambiamenti di regime, e approcci attivi tradizionali, frequentemente inefficaci e onerosi in termini di costi.

Pertanto, i risultati di questa ricerca non solo confermano la validità del modello proposto, ma ne sottolineano anche la possibilità applicativa: il Black–Litterman arricchito dal fattore Momentum costituisce uno strumento moderno e replicabile, potenzialmente utilizzabile tanto da investitori istituzionali quanto da investitori privati. In un’epoca di crescente incertezza e volatilità dei mercati finanziari, tale metodologia offre una via percorribile per perseguire performance superiori e al tempo stesso preservare il capitale, incarnando l’essenza di una gestione del portafoglio veramente dinamica ed evoluta.

SITOGRAFIA

- Hayes, A. (2025) *What Is the Life-Cycle Hypothesis in Economics?*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/l/life-cycle-hypothesis.asp>
- Hayes, A. (2025) *Investment: How and Where to Invest*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/i/investment.asp>
- Demaria, L. *ETF: che cosa sono? Semplice spiegazione sugli ETF*. JustETF. Disponibile da : <https://www.justetf.com/it/academy/che-cosa-sono-gli-etf.html>
- Chen, J. (2024) *Dividend Discount Model (DDM) Formula, Variations, Examples, and Shortcomings*. Investopedia. Disponibile da: [https://www.investopedia.com/terms/d/ddm.asp#:~:text=The%20dividend%20discount%20model%20\(DDM\)%20is%20a%20quantitative%20method%20used,back%20to%20their%20present%20value.](https://www.investopedia.com/terms/d/ddm.asp#:~:text=The%20dividend%20discount%20model%20(DDM)%20is%20a%20quantitative%20method%20used,back%20to%20their%20present%20value.)
- Beattie, A. (2021) *Understanding the History of the Modern Portfolio*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/articles/07/portfolio-history.asp>
- Scott, G. (2025) *Modern Portfolio Theory: What MPT Is and How Investors Use It*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/m/modernportfoliotheory.asp>
- Hayes, A. (2025) *Volatility: Meaning in Finance and How It Works With Stocks*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/v/volatility.asp>
- Borsa Italiana. GLOSSARIO FINANZIARIO-PORTAFOGLIO. Borsa Italiana. Disponibile da: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/portafoglio.html>
- Ross, S. (2022) *Correlation and Modern Portfolio Theory*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/ask/answers/030515/how-correlation-used-modern-portfolio-theory.asp>

- Ancheta, A.(2025) Idiosyncratic Risk: Definition, Types, Examples, and Ways to Minimize. Investopedia. Disponibile da:
<https://www.investopedia.com/terms/i/idiosyncraticrisk.asp>

- Cavacini, C.(2022) ‘Asset allocation: comparison between the Markowitz approach and the Black-Litterman method.’ Tesi magistrale, Politecnico di Torino. Disponibile da:
<https://webthesis.biblio.polito.it/secure/23708/1/tesi.pdf>

- Armento, A.(2022). *L’esame a test per Consulente finanziario abilitato all’offerta fuori sede. Manuale completo di preparazione*. 27^a ed. Torino. Alpha Test. cap. 19. pp. 471–477.

- Zhang, H. (2024). *Limitations and Critique of Modern Portfolio Theory: A Comprehensive Literature Review*. University of Manchester. EWA Publishing. Disponibile da:
<https://www.ewadirect.com/proceedings/aemps/article/view/8240>

- Goldman Sachs. *Innovative Black-Litterman Global Asset Allocation Model Is Developed at Goldman Sachs*. Disponibile da:
<https://www.goldmansachs.com/our-firm/history/moments/1990-black-litterman-model>

- Di Tondo, B.(2023). *La teoria di asset allocation: il modello Black-Litterman*. Tesi Laurea triennale, LUISS Guido Carli. pp. 37-38. Disponibile da:
<https://tesi.luiss.it/36830/>

- Nunnari, R.(2020). *Modello Black Litterman e asset allocation*. Altervista. Disponibile da: https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875

- BM Corporation (2023). *SPSS Statistics: Bayesian statistics*. IBM Documentation. Disponibile all’indirizzo <https://www.ibm.com/docs/it/spss-statistics/30.0.0?topic=edition-bayesian-statistics>

- Dhankar, R., Maheshwari, S.(2016). *Behavioural Finance: A New Paradigm to Explain Momentum Effect*. University of Delhi. Disponibile da:
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2785520

- Vayanos, D., Woolley, P.(2008). *An Institutional Theory of Momentum and Reversal*. National Bureau of Economic Research. Diposnibile da:
https://www.nber.org/system/files/working_papers/w14523/w14523.pdf

- IG. *Momentum trading strategies: a beginner's guide*. ig.com. Disponibile da: <https://www.ig.com/en/trading-strategies/momentum-trading-strategies--a-beginners-guide-190905>
- Ferdnando, J. (2024). *Relative Strength Index (RSI) Indicator Explained With Formula*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/r/rsi.asp>
- Gratton, P.(2025). *Money Flow Index (MFI): Definition and Uses*.Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/m/mfi.asp>
- Thompson, C.(2024).*Bollinger Bands: What They Are, and What They Tell Investors*.Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/b/bollingerbands.asp>
- Fahoum, A.(2019).*Use The Power of Bollinger Bands As An Oscillator with %B*.Market Vidhya. Disponibile da: <https://blog.market-pulse.in/new-indicator-b-indicator/>
- Fidelity.*Ultimate Oscillator (UO)*.Fidelity Investments. Disponibile da: <https://www.fidelity.com/learning-center/trading-investing/technical-analysis/technical-indicator-guide/ultimate-oscillator>
- CFI Team.*Look-Ahead Bias*.CFI. Disponibile da: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/career-map/sell-side/capital-markets/look-ahead-bias/#:~:text=Look%2Dahead%20bias%20is%20a,from%20a%20study%20or%20simulation.>
- Renevier,S. (2024).*Goldman's Bear Market Indicator Is Urging You To Be Cautious*.Finimize. Disponibile da: <https://finimize.com/content/goldmans-bear-market-indicator-is-urging-you-to-be-cautious>
- Harper, D.(2024).*Exploring the Exponentially Weighted Moving Average*.Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/articles/07/ewma.asp>
- Chen, J.(2024) *Tracking Error: Definition, Factors That Affect It, and Example*. Investopedia. Disponibile da: <https://www.investopedia.com/terms/t/trackingerror.asp>

Immagini:

- Figura1: IFT.Concept 65: Minimum-Variance and Efficient Frontiers.*IFT* . Disponibile da: https://ift.world/concept1/concept-65-minimum-variance-efficient-frontiers/?utm_source=chatgpt.com
- Figura 4: Wagdi, O.(2014) *Relationship between Risk and Common Stock Return in CML and CAPM*. ResearchGate. Disponibile da: http://researchgate.net/publication/307905956_Relationship_between_Risk_and_Common_Stock_Return_in_CML_and_CAPM

APPENDICE (CODICE PYTHON)

```
# ===== 1. LIBRERIE E CONFIGURAZIONE =====

import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

import os
import numpy as np
import pandas as pd
import yfinance as yf
from datetime import datetime
from tqdm import tqdm
import pandas_ta as ta
import matplotlib.pyplot as plt

# PyPortfolioOpt

from pypfopt.black_litterman import BlackLittermanModel,
market_implied_prior_returns
from pypfopt.efficient_frontier import EfficientFrontier
from pypfopt import objective_functions

# ===== CONFIGURAZIONE =====

class Config:
    START_YEAR = 2012
    END_YEAR = 2024
    INITIAL_CAPITAL = 100_000.0

    EXCEL_PATH = os.path.expanduser('~/Desktop/SP500_Top20.xlsx')

    # Frequenza strategia
    HORIZON = 'M' # si può impostare 'M' (mensile) o 'Q'
    (trimestrale)
    TRAINING_YEARS = 3

    # Proxy mercato per  $\delta(t)$ 
    MARKET_PROXIES = ["SPY"]
    MIN_PERIODS_DELTA = 12

    # Momentum(5)
    RSI_PERIOD = 14
    MFI_PERIOD = 14
    UO_PERIODS = (7, 14, 28)
    STOCHRSI_PERIOD = 14
    BB_PERIOD = 20
    BB_STD = 2.0
```

```

# Soglie assolute per views
MOM_BUY_LEVEL = 75.0
MOM_SELL_LEVEL = 25.0

# Costi (bps sul controvalore scambiato)
COST_BPS_BH = 10.0
COST_BPS_BL = 10.0

# Vincoli pesi
MAX_WEIGHT_SINGLE = 0.25
LONG_ONLY = True

# Tau BL
TAU = 0.05

# Aggressività EF, parametro K
DELTA_SCALER_NEU = 1.0
DELTA_SCALER_AGG = 0.20

# Risk-free annuo
RISK_FREE_ANNUAL = 0.02

# Export tabelle metriche/track record
EXPORT_TABLES = True
EXPORT_DIR = os.path.expanduser('~/Desktop')

# Debug / audit
DEBUG = True

# ===== 2. FUNZIONI DI UTILITÀ =====

def periods_per_year():
    return 12 if Config.HORIZON == 'M' else 4

def resample_rule():
    return 'M' if Config.HORIZON == 'M' else 'Q'

def rf_per_period():
    return (1 + Config.RISK_FREE_ANNUAL)**(1/periods_per_year()) - 1

def _clean_mcap(x):
    if pd.isna(x): return 0.0
    s = str(x).replace('$','').replace(',','').strip()
    try: return float(s)
    except: return 0.0

# ===== 3. GESTIONE DATI E UNIVERSO =====

```

```

def load_universe():
    df = pd.read_excel(Config.EXCEL_PATH)
    df = df.iloc[:, :4]
    df.columns = ['Year', 'Company', 'Symbol', 'MarketCap']
    df['Symbol'] = df['Symbol'].astype(str).str.strip().replace({'BRK.B': 'BRK-
B', 'GOOGL.1': 'GOOGL'})
    df['Year'] = pd.to_numeric(df['Year'], errors='coerce')
    df = df.dropna(subset=['Year']); df['Year'] = df['Year'].astype(int)
    df['MarketCap'] = df['MarketCap'].apply(_clean_mcap)

    universe_by_year, mcaps_by_year = {}, {}
    years = sorted(df['Year'].unique())
    for invest_year in range(Config.START_YEAR, Config.END_YEAR+1):
        ref = invest_year-1 if (invest_year-1) in years else years[0]
        tmp = df[df['Year']==ref].head(20)
        tickers = tmp['Symbol'].tolist()
        mcaps = dict(zip(tmp['Symbol'], tmp['MarketCap']))
        universe_by_year[invest_year] = tickers
        mcaps_by_year[invest_year] = mcaps
    return universe_by_year, mcaps_by_year

def download_prices(universe_by_year):
    tickers = sorted({t for lst in universe_by_year.values() for t in lst})
    tickers = sorted(set(tickers) | set(Config.MARKET_PROXIES))
    start = f"{Config.START_YEAR - Config.TRAINING_YEARS -1}-01-01"
    end = f"{Config.END_YEAR}-12-31"
    data = yf.download(tickers, start=start, end=end, auto_adjust=True,
threads=True, progress=False)

    if isinstance(data.columns, pd.MultiIndex):
        px = {k: data[k] for k in ['Open', 'High', 'Low', 'Close', 'Volume'] if k
in data.columns.get_level_values(0)}
    else:
        px = {'Close': data}
    return px

# ===== 4. LOGICA DELLA STRATEGIA =====

def compute_momentum_5(px, tickers):
    if isinstance(px, dict):
        C = px['Close']; H = px.get('High', C); L = px.get('Low', C); V =
px.get('Volume', C*0+1_000_000)
    else:
        C = H = L = px; V = C*0+1_000_000

    mom = pd.DataFrame(index=C.index)
    for t in tqdm(tickers, desc="Momentum(5)"):
        if t not in C.columns: continue

```

```

close = C[t].ffill().bfill()
high = H[t].ffill().bfill() if t in H.columns else close
low = L[t].ffill().bfill() if t in L.columns else close
vol = V[t].ffill().bfill() if (hasattr(V, 'columns') and t in
V.columns) else (close*0+1_000_000)

if close.dropna().shape[0] < 100:
    mom[t] = 50.0
    continue

rsi = ta.rsi(close, length=Config.RSI_PERIOD)
mfi = ta.mfi(high, low, close, vol, length=Config.MFI_PERIOD)
uo = ta.uo(high, low, close, fast=Config.UO_PERIODS[0],
medium=Config.UO_PERIODS[1], slow=Config.UO_PERIODS[2])
stoch_df = ta.stochrsi(close, rsi_length=Config.STOCHRSI_PERIOD,
length=Config.STOCHRSI_PERIOD)
if isinstance(stoch_df, pd.DataFrame):
    k_col = [c for c in stoch_df.columns if 'K' in c.upper()]
    stoch = (stoch_df[k_col[0]]*100.0 if k_col else
stoch_df.iloc[:,0]*100.0)
else:
    rsi_f = ta.rsi(close, length=Config.STOCHRSI_PERIOD)
    stoch = ((rsi_f - rsi_f.rolling(Config.STOCHRSI_PERIOD).min())/
(rsi_f.rolling(Config.STOCHRSI_PERIOD).max()-
rsi_f.rolling(Config.STOCHRSI_PERIOD).min()))*100

bb = ta.bbands(close, length=Config.BB_PERIOD, std=Config.BB_STD)
if isinstance(bb, pd.DataFrame):
    bbp_cols = [c for c in bb.columns if 'BBP' in c.upper()]
    if bbp_cols:
        bbp = bb[bbp_cols[0]]*100.0
    else:
        up = bb.filter(like='UB', axis=1).iloc[:,0]
        lo = bb.filter(like='LB', axis=1).iloc[:,0]
        bbp = ((close - lo)/(up - lo))*100.0
else:
    ma = close.rolling(Config.BB_PERIOD).mean()
    sd = close.rolling(Config.BB_PERIOD).std()
    up = ma + Config.BB_STD*sd
    lo = ma - Config.BB_STD*sd
    bbp = ((close - lo)/(up - lo))*100.0

parts = [rsi, mfi, uo, stoch, bbp]
comp = pd.concat(parts, axis=1).clip(0,100).mean(axis=1).fillna(50)
mom[t] = comp
return mom

```

```

def period_ends(idx):

```

```

        """Ritorna l'ULTIMO GIORNO DI TRADING disponibile per ogni periodo
(M/Q)."""
        s = pd.Series(1, index=idx)
        last_days = s.groupby(pd.Grouper(freq=resample_rule())).apply(lambda x:
x.index.max())
        last_days = pd.DatetimeIndex(last_days.dropna().values)
        return last_days

def to_period_prices(close_df):
    return close_df.resample(resample_rule()).last()

def to_period_returns_from_prices(close_period):
    return close_period.shift(-1) / close_period - 1

def momentum_at_period_end(momentum_daily, ends_idx):
    m = momentum_daily.reindex(ends_idx, method='ffill')
    return m.clip(0,100).round().astype('Int64')

def build_q_lookup(close_daily, momentum_daily, training_end_date, tickers):
    close_p = to_period_prices(close_daily[tickers].dropna(how='all', axis=1))
    ends = close_p.index
    ends_train = ends[ends <= training_end_date][:-1] # no look-ahead
    fut_ret = to_period_returns_from_prices(close_p).loc[ends_train]
    mom_pe = momentum_at_period_end(momentum_daily[tickers], ends_train)
    q_map = {}
    for t in tickers:
        if t not in fut_ret.columns or t not in mom_pe.columns: continue
        a = pd.DataFrame({'score': mom_pe[t].astype(float), 'futret':
fut_ret[t]}).dropna()
        if a.empty: continue
        q_map[t] =
a.groupby(a['score'].round().astype(int))['futret'].mean().to_dict()
    return q_map

def compute_delta_expanding(close_daily, asof_date):
    candidates = [c for c in Config.MARKET_PROXIES if c in
close_daily.columns]
    px = None
    for c in candidates:
        s = close_daily[c].dropna()
        if not s.empty:
            px = s[s.index <= asof_date]
            break
    if px is None or px.empty: return 3.0
    pxp = px.resample(resample_rule()).last()
    if len(pxp) < Config.MIN_PERIODS_DELTA + 1: return 3.0
    rets = pxp.pct_change().dropna()
    mu_p, var_p = rets.mean(), rets.var()
    rf_p = rf_per_period()

```

```

    if not np.isfinite(var_p) or var_p <= 0: return 3.0
    delta = float((mu_p - rf_p) / var_p)
    return float(np.clip(delta, 0, 10.0))

# ===== STIMA  $\Sigma$  EWMA PER-PERIODO (M/Q) =====
def _lambda_from_halflife_months(half_life_months: float) -> float:
    """Converte una half-life (in mesi) nel parametro lambda dell'EWMA."""
    return float(np.exp(np.log(0.5) / float(half_life_months)))

def compute_sigma_ewma_per_period(train_close: pd.DataFrame,
                                   min_obs: int = 8,
                                   lambda_: float | None = None,
                                   half_life_months: float = 12.0,
                                   demean: bool = True,
                                   add_jitter: float = 1e-10) -> pd.DataFrame:
    """
     $\Sigma$  stimata con EWMA sulla stessa frequenza dell'orizzonte (M/Q) → PER-
    PERIODO.
    Nessuna annualizzazione.
    """
    # 1) rendimenti per-periodo (M/Q)
    period_rets = (
        train_close
        .resample(resample_rule()).last()
        .pct_change()
        .dropna(how='all')
    )
    # 2) filtro qualità
    ok_cols = [c for c in period_rets.columns if period_rets[c].count() >=
min_obs]
    R = period_rets[ok_cols].dropna(how='any')

    # fallback se dati scarsi
    if R.shape[0] < 2 or R.shape[1] < 2:
        Sigma = R.cov()
        if add_jitter and Sigma.shape[0] > 0:
            Sigma = Sigma + np.eye(Sigma.shape[0]) * add_jitter
        return Sigma

    # 3) parametro EWMA (da half-life o esplicito)
    lam = _lambda_from_halflife_months(half_life_months) if lambda_ is None
else float(lambda_)
    lam = float(np.clip(lam, 0.0, 0.999999))
    one_minus = (1.0 - lam)

    # 4) accumulo EWMA
    X = R.values # T x N
    if demean:

```

```

        X = X - X.mean(axis=0, keepdims=True)
N = X.shape[1]
S = np.zeros((N, N), dtype=float)
for t in range(X.shape[0]):
    x = X[t:t+1].T # N x 1
    S = lam * S + one_minus * (x @ x.T)

Sigma = pd.DataFrame(S, index=R.columns, columns=R.columns)
if add_jitter:
    Sigma = Sigma + np.eye(N) * add_jitter
return Sigma

# ===== 5. BACKTEST =====

def run_backtest():
    universe_by_year, mcaps_by_year = load_universe()
    px = download_prices(universe_by_year)
    C = px['Close'].sort_index()

    uni_tickers = sorted({t for v in universe_by_year.values() for t in v})
    momentum = compute_momentum_5(px, uni_tickers)
    daily_returns = C.pct_change()

    dates_all = C.index[(C.index.year>=Config.START_YEAR) &
(C.index.year<=Config.END_YEAR)]

    bh_val = bl_neu_val = bl_agg_val = Config.INITIAL_CAPITAL
    bh_w = bl_neu_w = bl_agg_w = None

    equity_log = []
    weights_log = []
    ends_all = period_ends(dates_all)
    ends_set = set(ends_all)
    prev_d = None

    # === DIAGNOSTICA INIZIALE ===
    diagnostics = {
        'C_shape': C.shape,
        'C_date_range': (str(C.index.min().date()),
str(C.index.max().date())),
        'uni_tickers_n': len(uni_tickers),
        'ends_all_n': len(ends_all),
        'first_5_ends': [str(d.date()) for d in ends_all[:5]],
        'last_5_ends': [str(d.date()) for d in ends_all[-5:]],
    }
    if Config.DEBUG:
        print("[DEBUG] Close shape:", diagnostics['C_shape'])
        print("[DEBUG] Close date range:", diagnostics['C_date_range'])

```

```

        print("[DEBUG] Universe tickers:", diagnostics['uni_tickers_n'])
        print("[DEBUG] Period ends (trading days):",
diagnostics['ends_all_n'])

# >>> nuovo flag: giorno di start comune
start_trading_day = None

for d in tqdm(dates_all, desc="Backtest 3-portfolios"):
    y = d.year
    dr = daily_returns.loc[d] if d in daily_returns.index else
pd.Series(0, index=C.columns)

    # 1) Accumula rendimento giornaliero
    if bh_w is not None:
        bh_val *= (1.0 +
float(pd.Series(dr).reindex(bh_w.index).fillna(0).dot(bh_w)))
        bl_neu_val *= (1.0 +
float(pd.Series(dr).reindex(bl_neu_w.index).fillna(0).dot(bl_neu_w)))
        bl_agg_val *= (1.0 +
float(pd.Series(dr).reindex(bl_agg_w.index).fillna(0).dot(bl_agg_w)))

    # 2) Rebalance BH al primo giorno di trading del nuovo anno
    is_first_day = (bh_w is None)
    is_first_trading_day_of_year = (prev_d is not None and d.year !=
prev_d.year)
    if is_first_day or is_first_trading_day_of_year:
        val_before = bh_val if not is_first_day else
Config.INITIAL_CAPITAL
        old_w = bh_w.copy() if not is_first_day else
pd.Series(dtype=float)

        cur_uni = [t for t in universe_by_year.get(y, []) if t in
C.columns]
        caps = mcaps_by_year.get(y, {})
        tot = sum(caps.get(t,0.0) for t in cur_uni) if cur_uni else 0.0
        if tot > 0 and cur_uni:
            new_bh_w = pd.Series({t: caps.get(t,0.0)/tot for t in
cur_uni}, dtype=float)
        else:
            new_bh_w = pd.Series(1/len(cur_uni) if cur_uni else 0.0,
index=cur_uni, dtype=float)

        # costi BH
        all_tix = old_w.index.union(new_bh_w.index) if not old_w.empty
else new_bh_w.index
        delta_w = new_bh_w.reindex(all_tix).fillna(0) -
old_w.reindex(all_tix).fillna(0)
        traded_val = float(delta_w.abs().sum()) * val_before)
        bh_val -= traded_val * (Config.COST_BPS_BH/10000.0)

```

```

bh_w = new_bh_w.copy()

for t, w in bh_w.items():
    weights_log.append({'Date': d, 'Strategy': 'BH', 'Ticker': t,
'Weight': float(w)})

# >>> START COMUNE: BL partono OGGI con gli stessi pesi e stessa
equity di BH
    if is_first_day:
        bl_neu_val, bl_agg_val = bh_val, bh_val
        bl_neu_w, bl_agg_w = bh_w.copy(), bh_w.copy()
        for t, w in bl_neu_w.items():
            weights_log.append({'Date': d, 'Strategy': 'BL_neutral',
'Ticker': t, 'Weight': float(w)})
        for t, w in bl_agg_w.items():
            weights_log.append({'Date': d, 'Strategy':
'BL_aggressive', 'Ticker': t, 'Weight': float(w)})

        start_trading_day = d # impedisce il rebalance BL nel period-
end corrente

# 3) Fine periodo: ribilanci BL SOLO dal primo period-end SUCCESSIVO
allo start
    allow_bl_rebalance = (
        start_trading_day is not None and
        d in ends_set and
        d > start_trading_day and
        bl_neu_w is not None
    )
    if allow_bl_rebalance:
        training_end = d
        start_train = training_end -
pd.DateOffset(years=Config.TRAINING_YEARS)
        cur_cols = sorted(list(set(bh_w.index) & set(C.columns)))
        train_close = C[cur_cols].loc[start_train:training_end]

# ===== SOSTITUZIONE:  $\Sigma$  con EWMA per-periodo
=====
        Sigma = compute_sigma_ewma_per_period(
            train_close,
            min_obs=8, # minimo # di rendimenti per-periodo
            lambda_=None, # oppure imposta esplicitamente (es.
0.94)
            half_life_months=6.0, # 6.0 → più reattiva; 12.0 → più smooth
            demean=True, # de-meant consigliato su base
mensile

```

```

        add_jitter=1e-10          # piccolo jitter per stabilità
numerica
    )
    #
=====

    delta_market = compute_delta_expanding(C, training_end)

    pi = market_implied_prior_returns(
        market_caps=pd.Series({t: mcaps_by_year.get(y, {}).get(t, 0.0)
for t in cur_cols}),
        risk_aversion=delta_market, cov_matrix=Sigma,
risk_free_rate=rf_per_period()
    ).reindex(cur_cols).fillna(0.0)

    # Momentum assoluto
    mom_now = momentum_at_period_end(momentum[cur_cols],
pd.DatetimeIndex([training_end])).iloc[0]

    # Lookup Q (attese prossimo periodo) out-of-sample
    q_lookup = build_q_lookup(C, momentum, training_end, cur_cols)

    views = {}
    for t in cur_cols:
        s = mom_now.get(t, np.nan)
        if pd.isna(s):
            continue
        if (s >= Config.MOM_BUY_LEVEL) or (s <=
Config.MOM_SELL_LEVEL):
            s_int = int(round(float(s)))
            qdict = q_lookup.get(t, {})
            if s_int in qdict:
                views[t] = float(qdict[s_int])
            else:
                # smoothing sui vicini +/-5
                for k in range(1, 6):
                    nei = [s_int-k, s_int+k]
                    vals = [qdict[x] for x in nei if x in qdict]
                    if vals:
                        views[t] = float(np.mean(vals))
                        break

    if not views:
        # >>>>> MODIFICA: carry-forward dei pesi BL (niente reset a
BH)

        # Fallback = BH normalizzato sui titoli correnti
        fallback = bh_w.reindex(cur_cols).fillna(0)
        if fallback.sum() > 0:
            fallback = fallback / fallback.sum()

```

```

def _carry_prev(prev_w, ref_cols, fallback_w):
    # se esiste un portafoglio precedente, riusa i pesi sui
    titoli attuali

    if prev_w is None:
        return fallback_w.copy()
    w = prev_w.reindex(ref_cols).fillna(0)
    if w.sum() > 0:
        w = w.clip(lower=0)
        w = w / w.sum()
        # opzionale: cap per singolo titolo
        ub = Config.MAX_WEIGHT_SINGLE
        if (ub is not None) and np.isfinite(ub):
            for _ in range(12):
                over = w > ub + 1e-12
                if not over.any():
                    break
                excess = (w[over] - ub).sum()
                w[over] = ub
                under = ~over
                if under.any() and w[under].sum() > 0:
                    w[under] += excess * (w[under] /
w[under].sum())

            else:
                break
        w = w / w.sum()
        return w
    # se tutti i titoli sono usciti, usa fallback
    return fallback_w.copy()

new_neu_w = _carry_prev(bl_neu_w, cur_cols, fallback)
new_agg_w = _carry_prev(bl_agg_w, cur_cols, fallback)

else:
    lb = 0.0 if Config.LONG_ONLY else None
    ub = Config.MAX_WEIGHT_SINGLE

    blm = BlackLittermanModel(Sigma, pi=pi, absolute_views=views,
tau=Config.TAU)
    mu_bl = blm.bl_returns()

    # Neutral
    ef_neu = EfficientFrontier(mu_bl, Sigma, weight_bounds=(lb,
ub))

    ef_neu.add_objective(objective_functions.L2_reg, gamma=0.1)
    ef_neu.max_quadratic_utility(risk_aversion=delta_market *
Config.DELTA_SCALER_NEU)
    new_neu_w =
pd.Series(ef_neu.clean_weights()).reindex(cur_cols).fillna(0)

```

```

        if new_neu_w.sum() > 0:
            new_neu_w = (new_neu_w.clip(lower=0) /
new_neu_w.clip(lower=0).sum())

        # Aggressive
        ef_agg = EfficientFrontier(mu_bl, Sigma, weight_bounds=(lb,
ub))

        ef_agg.add_objective(objective_functions.L2_reg, gamma=0.1)
        ef_agg.max_quadratic_utility(risk_aversion=max(delta_market *
Config.DELTA_SCALER_AGG, 1e-8))
        new_agg_w =
pd.Series(ef_agg.clean_weights()).reindex(cur_cols).fillna(0)
        if new_agg_w.sum() > 0:
            new_agg_w = (new_agg_w.clip(lower=0) /
new_agg_w.clip(lower=0).sum())

        # Costi
        # BL_neutral
        all_tix = bl_neu_w.index.union(new_neu_w.index)
        delta_w = new_neu_w.reindex(all_tix).fillna(0) -
bl_neu_w.reindex(all_tix).fillna(0)
        traded_val = float(delta_w.abs().sum() * bl_neu_val)
        bl_neu_val -= traded_val * (Config.COST_BPS_BL/10000.0)
        bl_neu_w = new_neu_w.copy()
        for t, w in bl_neu_w.items():
            weights_log.append({'Date': d, 'Strategy': 'BL_neutral',
'Ticker': t, 'Weight': float(w)})

        # BL_aggressive
        all_tix = bl_agg_w.index.union(new_agg_w.index)
        delta_w = new_agg_w.reindex(all_tix).fillna(0) -
bl_agg_w.reindex(all_tix).fillna(0)
        traded_val = float(delta_w.abs().sum() * bl_agg_val)
        bl_agg_val -= traded_val * (Config.COST_BPS_BL/10000.0)
        bl_agg_w = new_agg_w.copy()
        for t, w in bl_agg_w.items():
            weights_log.append({'Date': d, 'Strategy': 'BL_aggressive',
'Ticker': t, 'Weight': float(w)})

        # 4) Drift pesi (normalizzazione)
        def _drift(w, dr_):
            if w is None: return None
            tmp = w * (1.0 + pd.Series(dr_).reindex(w.index).fillna(0))
            s = tmp.sum()
            return (tmp / s) if s > 0 else w

        bh_w      = _drift(bh_w, dr)
        bl_neu_w = _drift(bl_neu_w, dr)
        bl_agg_w = _drift(bl_agg_w, dr)

```

```

        # 5) equity
        equity_log.append({'Date': d, 'BH': bh_val, 'BL_neutral': bl_neu_val,
                           'BL_aggressive': bl_agg_val})
        prev_d = d

    perf_df = pd.DataFrame(equity_log).set_index('Date')
    weights_df = pd.DataFrame(weights_log)
    diagnostics['perf_shape'] = perf_df.shape
    diagnostics['weights_rows'] = len(weights_df)
    return {"performance": perf_df, "weights": weights_df, "diagnostics":
diagnostics}

# ===== 6. PLOT =====
def analyze_and_plot(backtest_out):
    res = backtest_out["performance"].copy()
    wlog = backtest_out["weights"].copy()

    # ===== Helpers =====
    def _rule():
        return 'M' if Config.HORIZON == 'M' else 'Q'

    def _ppy():
        return 12 if Config.HORIZON == 'M' else 4

    def _dd(series):
        cm = series.cummax()
        return series / cm - 1.0

    def _period_returns_from_equity(eq_df):
        eqp = eq_df.resample(_rule()).last()
        rets = eqp.pct_change().dropna(how='all')
        return rets

    # ===== SUMMARY (final value) =====
    print("=== SUMMARY ===")
    for col in res.columns:
        print(f"Final {col}: €{res[col].iloc[-1]:,.0f} | Total:
{(res[col].iloc[-1]/res[col].iloc[0]-1):.2%}")

    # ===== Equity (line) =====
    ax = res.plot(figsize=(12, 6), lw=2,
                  title=f"Equity Line")
    ax.grid(alpha=.3)
    ax.set_ylabel("Portfolio Value ($)")
    plt.tight_layout()
    plt.show()

```

```

# ===== Equity (interattiva - Plotly) =====
try:
    import plotly.express as px
    import plotly.io as pio
    pio.renderers.default = "browser"
    df_val = res.reset_index().rename(columns={'index': 'Date'})
    fig_val = px.line(df_val, x='Date', y=res.columns,
                      title='Equity Line', labels={"value": "Valore ($)"),
"variable": "Portfolio"})
    fig_val.show()
except Exception as _e:
    print(f"(Interactive equity skipped) {_e}")

# ===== Drawdown (underwater) =====
dd_df = pd.DataFrame({c: _dd(res[c]) for c in res.columns})
(dd_df * 100).plot(figsize=(12, 4), lw=1.5, title="Drawdown (%)")
plt.axhline(0, ls='--', lw=1, c='k', alpha=.4)
plt.ylabel("Drawdown (%)")
plt.grid(alpha=.3)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ===== Max Drawdown (bar) =====
(dd_df.min() * 100).plot(kind='bar', figsize=(8, 4), title='Max Drawdown (%)')
plt.ylabel('%')
plt.grid(axis='y', alpha=.3)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ===== METRICHE =====
P = _ppy()
rf_p = rf_per_period()
period_rets = _period_returns_from_equity(res)

metrics_index = [
    'CAGR', 'Vol_Ann', 'Sharpe', 'Sortino', 'MaxDD', 'Calmar',
    'TrackingError', 'Turnover_Ann'
]
metrics_table = pd.DataFrame(index=metrics_index, columns=res.columns,
dtype=float)

eq_period = res.resample(_rule()).last()
years = (eq_period.index[-1] - eq_period.index[0]).days / 365.25 if
len(eq_period) > 1 else np.nan

for col in res.columns:
    eq = eq_period[col].dropna()
    if len(eq) < 2:

```

```

        continue
    r = period_rets[col].dropna()
    er = r - rf_p
    cagr = (eq.iloc[-1] / eq.iloc[0]) ** (1 / years) - 1 if years and
years > 0 else np.nan
    vol_ann = r.std() * np.sqrt(P)
    sharpe = (np.sqrt(P) * er.mean() / er.std()) if np.isfinite(er.std())
and er.std() > 0 else np.nan
    downside = er[er < 0]
    ddev = downside.std() if not downside.empty else np.nan
    sortino = (np.sqrt(P) * er.mean() / ddev) if np.isfinite(ddev) and
ddev and ddev > 0 else np.nan
    maxdd = _dd(eq).min()
    calmar = (cagr / abs(maxdd)) if maxdd < 0 else np.nan
    metrics_table.loc['CAGR', col] = cagr
    metrics_table.loc['Vol_Ann', col] = vol_ann
    metrics_table.loc['Sharpe', col] = sharpe
    metrics_table.loc['Sortino', col] = sortino
    metrics_table.loc['MaxDD', col] = maxdd
    metrics_table.loc['Calmar', col] = calmar

if 'BH' in period_rets.columns:
    for col in period_rets.columns:
        if col == 'BH':
            metrics_table.loc['TrackingError', 'BH'] = 0.0
            continue
        diff = (period_rets[col] - period_rets['BH']).dropna()
        te = diff.std() * np.sqrt(P) if not diff.empty else np.nan
        metrics_table.loc['TrackingError', col] = te

def _weights_on_date(df, d):
    s = df[df['Date'] == d].set_index('Ticker')['Weight']
    return s

if not wlog.empty:
    wlog['Date'] = pd.to_datetime(wlog['Date'])
    for strat, g in wlog.groupby('Strategy'):
        g = g.sort_values('Date')
        dates = g['Date'].unique()
        prev_w = None
        tots = []
        for d in dates:
            w_new = _weights_on_date(g, d)
            if prev_w is not None:
                idx = prev_w.index.union(w_new.index)
                tw = (w_new.reindex(idx).fillna(0) -
prev_w.reindex(idx).fillna(0)).abs().sum()
                tots.append(float(tw))
            prev_w = w_new

```

```

        if len(tots) > 0:
            avg_per_period = float(np.mean(tots))
            metrics_table.loc['Turnover_Ann', strat] = avg_per_period * P

print("=== METRICS TABLE (rows = metrics, cols = strategies) ===")
with pd.option_context('display.float_format', '{:.6f}'.format):
    print(metrics_table)

try:
    backtest_out['metrics_table'] = metrics_table.copy()
except Exception:
    pass

# === TRACK RECORD ANNUALE ===
daily_rets = res.pct_change().dropna(how='all')
annual_rets = (1 + daily_rets).resample('Y').prod() - 1
annual_rets.index = annual_rets.index.year

print("=== TRACK RECORD ANNUALE (rendimento per anno, %) ===")
print((annual_rets * 100).round(2))

try:
    backtest_out['annual_track_record'] = annual_rets.copy()
except Exception:
    pass

annual_rets.mul(100).plot(kind='bar', figsize=(12, 5), title='Track record
per anno (%)')
plt.ylabel('%')
plt.grid(axis='y', alpha=.3)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ===== Pies interattivi =====
try:
    import plotly.io as pio
    import plotly.graph_objects as go
    pio.renderers.default = "browser"

    def make_pie_timeseries_from_log(df_log, strat, title, filename=None):
        df = df_log[df_log['Strategy'] == strat].copy()
        if df.empty:
            print(f"(no data) {strat} pie skipped")
            return

        df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])

        start_date = df['Date'].min() # START COMUNE

```

```

        grp = df.groupby(pd.Grouper(key='Date', freq=_rule()))
        period_last_dates = [g['Date'].max() for _, g in grp if not
g.empty]
        period_last_dates =
sorted(pd.Series(period_last_dates).dropna().unique())

        dates = [start_date] + [d for d in period_last_dates if
pd.notna(d) and d > start_date]

        def snapshot_at(d):
            snap = df[df['Date'] == d]
            if snap.empty:
                d_alt = df[df['Date'] <= d]['Date'].max()
                snap = df[df['Date'] == d_alt] if pd.notna(d_alt) else
df.iloc[0:0]
            return snap

        snap0 = snapshot_at(dates[0])
        start_annot = dict(
            text=f"{pd.to_datetime(dates[0]).date()} - START",
            x=0, y=1.08, xanchor='left', yanchor='top', showarrow=False
        )

        fig = go.Figure(
            data=[go.Pie(labels=snap0['Ticker'], values=snap0['Weight'],
hole=0)],
            layout=go.Layout(
                title=dict(text=f"{title}", x=0, xanchor='left'),
                annotations=[start_annot],
                updatemenus=[dict(
                    type="buttons", showactive=False,
                    buttons=[
                        dict(label="Play", method="animate",
                            args=[None, {"frame": {"duration": 600,
"redraw": True},
                                "fromcurrent": True,
"transition": {"duration": 200}})],
                        dict(label="Pause", method="animate",
                            args=[None, {"frame": {"duration": 0,
"redraw": False},
                                "mode": "immediate",
"transition": {"duration": 0}})],
                    ],
                )],
                template="plotly_white"
            ),
            frames=[go.Frame(
                data=[go.Pie(labels=snapshot_at(d)['Ticker'],
                            values=snapshot_at(d)['Weight'])],

```

```

        name=str(d),
        layout=go.Layout(annotations=[dict(
            text=str(pd.to_datetime(d).date()),
            x=0, y=1.08, xanchor='left', yanchor='top',
showarrow=False
        )))
    ) for d in dates]
)

if filename:
    import os
    pio.write_html(fig, file=filename, auto_open=False)
    print(f"📄 Pie saved: {os.path.abspath(filename)}")
try:
    fig.show()
except Exception:
    pass
    make_pie_timeseries_from_log(wlog, 'BH', "BH Allocations")
    make_pie_timeseries_from_log(wlog, 'BL_neutral', "BL Neutral
Allocations")
    make_pie_timeseries_from_log(wlog, 'BL_aggressive', "BL Aggressive
Allocations")

except Exception as e:
    print(f"(Plotly skipped) {e}")

# ===== 7. RUN =====

if __name__ == "__main__":
    out = run_backtest()
    analyze_and_plot(out)

```