



Dipartimento di Impresa e Management

**Corso di laurea in Economia e Management**

Cattedra di Matematica Finanziaria

**Scelte di portafoglio:  
dalla teoria classica alle prospettive  
quantistiche**

Prof. Salvatore Forte

---

Relatore

Francesca Leone matr. 282251

---

Candidato

Anno Accademico 2024/2025

# Indice

<i>Indice</i> .....	1
<i>Introduzione</i> .....	4
<i>Parte I – Approccio classico alla scelta di portafoglio</i> .....	6
<i>Capitolo 1 – Fondamenti teorici della diversificazione finanziaria</i> .....	6
<b>Premessa</b> .....	6
<b>1.1 Rendimento e rischio</b> .....	7
1.1.1 Il rendimento .....	7
1.1.2 Il rischio .....	8
1.1.3 Il rischio sistematico .....	8
1.1.4 Il rischio specifico .....	9
<b>1.2 La relazione tra rischio e rendimento: <i>trade-off</i> e utilità attesa</b> .....	10
<b>1.3 Il modello media-varianza di Markowitz</b> .....	10
1.3.1 Allocazione ottima degli asset .....	11
1.3.2 La frontiera efficiente.....	12
1.3.3 Le curve di indifferenza .....	13
1.3.4 Estensione con il titolo privo di rischio: la <i>Capital Market Line</i> .....	14
<i>Capitolo 2 – Applicazione</i> .....	17
<b>Premessa</b> .....	17
<b>2.1 Metodologia e <i>dataset</i></b> .....	17
<b>2.2 Misure di rischio-rendimento dei singoli titoli</b> .....	19
<b>2.3 Il profilo di rischio-rendimento del portafoglio</b> .....	22
<b>2.4 Combinazioni sub-ottimali</b> .....	25
<b>2.5 La frontiera efficiente</b> .....	28
2.5.1 Divieto di short selling .....	33
<b>2.6 La <i>Capital Market Line (CML)</i></b> .....	35
<i>Parte II – Innovazioni computazionali e Quantum Finance</i> .....	38
<i>Capitolo 3 – Introduzione al Quantum Computing</i> .....	38
<b>Premessa</b> .....	38
<b>3.1 Cos'è un <i>qubit</i>: sovrapposizione ed <i>entanglement</i></b> .....	39

<b>3.2 Principio di realtà, paradosso EPR e disuguaglianze di Bell.....</b>	<b>41</b>
<b>3.3 Teoria dei giochi e meccanica quantistica .....</b>	<b>42</b>
<b>3.4 Il calcolatore quantistico: principi e algoritmi fondamentali .....</b>	<b>44</b>
3.4.1 Il parallelismo quantistico .....	44
3.4.2 Algoritmi quantistici: Shor e Grover.....	46
<b>3.5 Requisiti da rispettare e sfide da superare .....</b>	<b>47</b>
3.5.1 Decoerenza .....	48
3.5.2 Ioni intrappolati.....	48
3.5.3 Superconduttori .....	49
3.5.4 Atomi di Rydberg.....	50
3.5.5 Simulazioni quantistiche .....	51
<b>3.6 Stato attuale della tecnologia: panorama internazionale e italiano .....</b>	<b>52</b>
<b><i>Capitolo 4 – Quantum Finance: applicazioni e prospettive .....</i></b>	<b><i>54</i></b>
<b>Premessa .....</b>	<b>54</b>
<b>4.1 Applicazioni potenziali .....</b>	<b>54</b>
4.1.1 Ottimizzazione di portafoglio .....	55
4.1.2 Gestione del rischio e <i>pricing</i> dei derivati .....	57
4.1.3 <i>Quantum Machine Learning</i> e finanza predittiva .....	58
<b>4.2 Sicurezza e crittografia: la sfida per il sistema finanziario.....</b>	<b>60</b>
4.2.1 La minaccia quantistica alla crittografia .....	60
4.2.1 Strategie nazionali e internazionali .....	61
4.2.2 Ruolo della vigilanza e resilienza del sistema.....	61
<b>4.3 Benefici attesi, limiti tecnologici e barriere all'adozione.....</b>	<b>62</b>
<b><i>Conclusione .....</i></b>	<b><i>64</i></b>
<b><i>Bibliografia e sitografia .....</i></b>	<b><i>65</i></b>

# Introduzione

Il tema della costruzione del portafoglio ottimo rappresenta uno dei nodi centrali della finanza moderna, in quanto strettamente connesso alla gestione dei rischi finanziari e alla massimizzazione del rendimento. Dalla formulazione pionieristica di Harry Markowitz, nota come *Modern Portfolio Theory (MPT)*, emerge l'idea che la scelta allocativa di un investitore razionale debba basarsi su misure statistiche di rendimento e rischio, seguendo il principio della diversificazione.

La presente tesi si pone l'obiettivo di coniugare questo impianto teorico consolidato con le prospettive offerte dalle recenti innovazioni computazionali, in particolare dal *quantum computing*, valutandone limiti, potenzialità e applicazioni pratiche nella finanza quantitativa. Il lavoro è articolato in due parti distinte ma complementari, ciascuna delle quali comprende due capitoli.

Il primo capitolo fornisce i fondamenti teorici della teoria moderna del portafoglio. Vengono introdotte le nozioni di rendimento e rischio, distinguendo tra rischio sistematico e rischio specifico, e si evidenzia come la diversificazione possa ridurre l'incertezza complessiva degli investimenti. Si presenta il modello media-varianza di Markowitz e la costruzione della frontiera efficiente, insieme alle curve di indifferenza dell'investitore. Infine, viene discussa l'estensione tramite la *Capital Market Line (CML)*, che permette di integrare un'attività priva di rischio e di ampliare le opportunità di scelta disponibili all'investitore.

Il secondo capitolo traduce questi presupposti teorici in un'applicazione empirica. A tal fine, è stato selezionato un paniere di otto titoli rappresentativi del mercato italiano, appartenenti a settori eterogenei, per verificare la validità del modello in un contesto reale. L'analisi dei rendimenti storici e delle correlazioni tra i titoli ha reso possibile la costruzione della frontiera efficiente e la valutazione delle differenze derivanti dall'imposizione o meno di vincoli operativi, quali il divieto di *short selling*. L'inclusione di un'attività priva di rischio ha infine permesso di estendere l'analisi alla *Capital Market Line*, evidenziando la superiorità delle combinazioni efficienti che essa consente di individuare.

Il terzo capitolo introduce i concetti fondamentali del calcolo quantistico (*qubit*, sovrapposizione ed *entanglement*) e ne evidenzia le differenze rispetto al paradigma classico. Viene discusso il legame con la teoria dei giochi e i principi alla base dei principali algoritmi

quantistici, come quelli di Shor e Grover, mostrando il parallelismo quantistico e le sue implicazioni per problemi complessi di ottimizzazione e simulazione. Infine, il capitolo presenta le principali architetture *hardware* attuali – ioni intrappolati, superconduttori e atomi di Rydberg – le sfide tecnologiche da superare, come la decoerenza, e fornisce una panoramica dello stato della ricerca internazionale e italiana, evidenziando investimenti, progetti e applicazioni emergenti.

Il quarto capitolo esplora le applicazioni e le prospettive della *quantum finance*, collegando le basi del calcolo quantistico ai problemi complessi della finanza moderna. Vengono descritti tre ambiti principali: l'ottimizzazione di portafoglio tramite algoritmi quantistici come il *Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)* e il *quantum annealing*; la gestione del rischio e il *pricing* dei derivati, con particolare riferimento a simulazioni Monte Carlo accelerate dalla *Quantum Amplitude Estimation*; e il *quantum machine learning*, che permette di individuare *pattern* complessi e predire eventi rari attraverso circuiti parametrici e *quantum kernel*. Il capitolo approfondisce inoltre le implicazioni sulla sicurezza informatica e la crittografia, sottolineando la necessità di protocolli *post-quantum* e strategie di vigilanza per garantire la resilienza del sistema finanziario. Infine, vengono discussi benefici, limiti tecnologici e barriere all'adozione, evidenziando come l'integrazione di *workflow* ibridi classico-quantistici possa trasformare il potenziale teorico della *quantum finance* in vantaggi concreti e sostenibili per mercati e istituzioni.

La tesi si colloca dunque all'incrocio tra la teoria classica e le prospettive future della finanza, proponendo un percorso che parte dalle basi consolidate della *Modern Portfolio Theory (MPT)*, passa attraverso l'analisi empirica di tale modello e giunge fino alle innovazioni più recenti legate al *quantum computing*. In questo modo, intende offrire non solo una ricostruzione critica dei modelli tradizionali, ma anche una visione prospettica capace di cogliere le sfide e le opportunità che attendono il settore finanziario nell'era della rivoluzione quantistica.

# Parte I – Approccio classico alla scelta di portafoglio

## Capitolo 1 – Fondamenti teorici della diversificazione finanziaria

### Premessa

L'obiettivo della teoria del portafoglio<sup>1</sup> è quello di spiegare le decisioni degli investitori alla base della costruzione del portafoglio ottimo. In condizioni di incertezza, un investitore razionale tende a distribuire strategicamente il proprio capitale tra diverse attività finanziarie, anziché concentrarlo su un singolo investimento. Da qui la celebre frase “*not put all your eggs in one basket*”. Questo approccio, noto come diversificazione, nasce dall'esigenza di contenere il rischio complessivo senza rinunciare ad un rendimento soddisfacente.

La parte centrale della teoria risiede appunto nella relazione tra rendimento atteso e rischio, rappresentata graficamente dalla frontiera efficiente, una curva concava che racchiude tutte le combinazioni ottime possibili di rischio-rendimento, ottenibili investendo in strumenti finanziari. La concavità riflette un principio fondamentale: è possibile, grazie alla diversificazione, ridurre il rischio preservando lo stesso rendimento di un portafoglio meno diversificato. Il vantaggio è ancora più evidente quando i titoli inclusi nel portafoglio presentano una bassa correlazione tra di loro.

Comprendere il significato e le implicazioni di queste due variabili – rischio e rendimento – è fondamentale per qualsiasi processo decisionale finanziario.

A partire da queste premesse, il presente capitolo analizzerà i fondamenti teorici della moderna teoria del portafoglio, fornendo le definizioni necessarie e introducendo i meccanismi che regolano la selezione e combinazione degli investimenti.

---

<sup>1</sup> (Markowitz, 1952)

## 1.1 Rendimento e rischio

### 1.1.1 Il rendimento

Quando un investitore decide di investire in un titolo si pone l'obiettivo di ricevere in futuro un *cash flow* che sia maggiore rispetto a quello versato al momento dell'acquisto; quindi, egli si pone l'obiettivo di ricevere un rendimento positivo.

Il rendimento misura la variazione percentuale del valore di un investimento in un dato intervallo temporale. Questo valore può derivare sia dalla differenza del valore dell'attività (*capital gain*), sia dai flussi periodici generati dalla stessa (es. dividendi per le azioni, cedole per le obbligazioni). Dal punto di vista matematico, il rendimento  $r_t$  di un'attività può essere definito come:

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + d_t}{P_{t-1}} \rightarrow \text{valutazione ex-post}$$

dove:

- $P_t$  è il prezzo dell'attività al tempo  $t$ ;
- $P_{t-1}$  è il prezzo iniziale;
- $d_t$  è il flusso cedolare (dividendi, cedole) percepito nell'intervallo<sup>2</sup>.

Oltre al rendimento realizzato (ex-post), esiste il rendimento atteso (ex-ante), definito come il valore medio che è possibile attendersi da un titolo. Quest'ultimo è dato dalla sommatoria del prodotto dei possibili valori che la variabile causale (rendimento) assume per le corrispondenti probabilità di accadimento<sup>3</sup>. L'importanza del rendimento atteso è dovuta al fatto che l'investitore conosce a priori solo la variabile prezzo di acquisto, mentre non ha certezze sulle altre variabili (prezzo di vendita e pagamenti periodici). L'impossibilità di conoscere a priori l'entità di queste variabili, porta a dedurre che gli investitori compiano le loro scelte proprio sulla base del rendimento atteso del titolo, la cui formula matematica è:

$$R_e = \sum_{i=1}^n p_i R_i \rightarrow \text{valutazione ex-ante dei flussi di cassa attesi dall'investimento}$$

---

<sup>2</sup> (CFA Institute, 2020)

<sup>3</sup> (Bocchialini, Capizzi, Chiesi, Arcuri, & Montoux, 2018)

dove:

- $n$  numero di possibili risultati futuri;
- $R_i$  sono i singoli risultati possibili;
- $p_i$  le probabilità associate<sup>4</sup>.

### 1.1.2 Il rischio

Il rischio rappresenta l'incertezza relativa al rendimento futuro di un'attività finanziaria, fa riferimento al concetto di volatilità, cioè di dispersione della distribuzione di una variabile casuale intorno al suo valore atteso. Le statistiche adatte a rappresentare il rischio sotto questa accezione sono due, la varianza e la deviazione standard dei rendimenti:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i (R_i - \bar{R})^2; \sigma = \sqrt{\sigma^2} \rightarrow \text{valutazione ex-ante}$$

dove:

- $(R_i - \bar{R})^2$  rappresenta lo scarto del rendimento  $i$ -esimo rispetto al suo valore medio, il tutto elevato al quadrato al fine di evitare compensazioni di segno;
- $p_i$  è la probabilità del rendimento  $i$ -esimo.

La deviazione standard, data dalla radice quadrata della varianza, fornisce una misura della volatilità e, a differenza della varianza, è espressa nella stessa unità di misura del rendimento e pertanto maggiormente interpretabile. Si tratta dell'indicatore più adottato per misurare il rischio finanziario di un investimento: maggiore è la sua ampiezza, maggiore è il rischio.

### 1.1.3 Il rischio sistematico

Il rischio sistematico è definito come quella parte del rischio totale di un'attività finanziaria che non può essere eliminata attraverso la diversificazione. Esso dipende da fattori macroeconomici che influenzano l'intero sistema economico-finanziario, come la politica monetaria, l'inflazione, i tassi di interesse, le crisi geopolitiche e le pandemie globali. Per questo motivo è anche detto non diversificabile o di mercato.

---

<sup>4</sup> (Luenberger, 1998)

Dal punto di vista operativo, il rischio sistematico può essere quantificato attraverso il coefficiente beta ( $\beta$ ) che troviamo all'interno del *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*<sup>5</sup>. Questo parametro misura la sensibilità del rendimento di un titolo rispetto al rendimento del mercato:

$$R_e = r_f + \beta(R_m - r_f)$$

dove:

- $R_e$  è il rendimento atteso del titolo;
- $r_f$  è il tasso privo di rischio;
- $R_m$  è il rendimento atteso del mercato;
- $\beta$  è il coefficiente beta del titolo.

Un beta maggiore di 1 implica che il titolo è più volatile rispetto al mercato, mentre un beta con un valore inferiore ad 1 indica minore volatilità. Il beta di mercato è per definizione pari a 1. In presenza di mercati efficienti, il rendimento atteso di un'attività finanziaria dipende unicamente dalla sua esposizione al rischio sistematico.

#### 1.1.4 Il rischio specifico

Il rischio specifico, invece, è legato a fattori propri dell'impresa o del settore in cui opera. Può derivare da cambiamenti nella governance aziendale, errori strategici, eventi straordinari (fusioni, scandali, default) o da performance inferiori a quelle attese. A differenza del rischio sistematico, quello specifico può essere eliminato attraverso un'adeguata diversificazione del portafoglio<sup>6</sup>. In altre parole, man mano che si aggiungono titoli non perfettamente correlati in portafoglio, il peso del rischio specifico tende a decrescere.

La scomposizione del rischio totale è sintetizzata nella seguente relazione<sup>7</sup>:

$$\sigma^2(R_p) = \sigma^2(R_{sistematico}) + \sigma^2(R_{specifico})$$

dove la varianza del rendimento del portafoglio è la somma della varianza dovuta ai fattori sistemici e di quella dovuta a fattori idiosincratici.

---

<sup>5</sup> (Sharpe, 1964)

<sup>6</sup> (Bocchialini, Capizzi, Chiesi, Arcuri, & Monteux, 2018)

<sup>7</sup> (CFA Institute, 2020)

Comprendere quella che è la natura e la struttura del rischio è quindi fondamentale per poterlo gestire in modo consapevole. Se il rischio sistematico non può essere eliminato, ma solo remunerato, quello specifico può essere neutralizzato attraverso una strategia di portafoglio ben costruita.

Dopo aver definito brevemente le nozioni base di rischio e rendimento di un titolo procediamo, nei paragrafi successivi, ad analizzare i fondamenti teorici alla base della costruzione di un portafoglio ottimo.

## **1.2 La relazione tra rischio e rendimento: *trade-off* e utilità attesa**

La finanza si fonda su una constatazione empirica fondamentale: esiste un *trade-off* positivo tra rischio e rendimento. In altre parole, ad un rischio maggiore deve corrispondere un rendimento atteso superiore. Ciò deriva dal fatto che mediamente gli investitori razionali mostrano avversione al rischio, preferendo portafogli caratterizzati da minore volatilità a parità di rendimento atteso. Essi sono disposti ad assumersi un rischio maggiore solo in cambio di una congrua compensazione sotto forma di rendimento superiore.

In questo contesto, modelli come la *Mean-Variance Optimization* di Markowitz diventano strumenti cruciali per adattare la scelta del portafoglio al contesto soggettivo e agli obiettivi specifici dell'investitore, tenendo conto del profilo psicologico e finanziario dello stesso.

## **1.3 Il modello media-varianza di Markowitz**

Il modello sviluppato da Harry Markowitz nel 1952<sup>8</sup>, noto come *Modern Portfolio Theory*, si fonda sull'idea che l'investitore razionale debba valutare un portafoglio non in base alle performance dei singoli titoli, ma sulla base del rendimento atteso complessivo e del rischio aggregato, rappresentato dalla deviazione standard del rendimento del portafoglio.

Il modello consente quindi di identificare combinazioni di attività finanziarie tali da ottimizzare il *trade-off* tra rischio e rendimento, attraverso un uso razionale della diversificazione.

---

<sup>8</sup> (Markowitz, 1952)

### 1.3.1 Allocazione ottima degli asset

Considerando un portafoglio costituito da  $n$  titoli, ciascuno caratterizzato da un certo rendimento atteso e rischio, è possibile definire<sup>9</sup>:

- il rendimento atteso del portafoglio:

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i$$

dove:

- $\omega_i$  è il peso del titolo  $i$  nel portafoglio, con  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ;
- $R_i$  è il rendimento atteso del titolo  $i$ ;
- la varianza del rendimento del portafoglio, che misura il rischio complessivo:

$$\sigma_p^2 = \omega_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \omega_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2 \cdot \omega_i \cdot \omega_j \cdot Cov(R_i, R_j)$$

dove:

- $Cov(R_i, R_j)$  è la covarianza tra i rendimenti dei titoli  $i$  e  $j$ .

L'efficacia della diversificazione emerge chiaramente da questa formulazione: se i titoli non sono perfettamente correlati tra loro, è possibile costruire un portafoglio con rischio inferiore alla media ponderata dei rischi dei singoli asset. Tale vantaggio è tanto più evidente quanto minore è la correlazione tra i titoli.

---

<sup>9</sup> (CFA Institute, 2020) (Luenberger, 1998)

### 1.3.2 La frontiera efficiente

Un concetto centrale della *Modern Portfolio Theory* è quello della frontiera efficiente, ovvero l'insieme di tutti i portafogli che massimizzano il rendimento atteso per un dato livello di rischio (o, simmetricamente, minimizzano il rischio per un determinato livello di rendimento atteso). Graficamente, essa è rappresentata da una curva concava nel piano rischio-rendimento.

Per determinare tale frontiera è necessario risolvere un problema di ottimizzazione vincolata, in cui l'obiettivo è minimizzare la varianza del portafoglio per un determinato livello di rendimento atteso:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

soggetto ai vincoli

$$\sum_{i=1}^n \omega_i R_i = \mu_p$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

dove  $\mu_p$  rappresenta il rendimento atteso desiderato del portafoglio<sup>10</sup>.

La risoluzione di questo sistema, al variare di  $\mu_p$ , consente di tracciare la frontiera efficiente nel piano rischio-rendimento (fig. 1, linea blu). I portafogli che si collocano sulla frontiera sono quelli che offrono la migliore combinazione possibile tra rischio e rendimento, mentre quelli al di sotto della stessa (linea arancione e pallino verde) sono da considerarsi inefficienti<sup>11</sup>. Nel punto iniziale della frontiera efficiente si trova il portafoglio a varianza minima (*GMVP*, *Global Minimum Variance Portfolio*; pallino rosso), ovvero quello che ha la varianza più bassa tra tutti i portafogli possibili.

---

<sup>10</sup> (Luenberger, 1998)

<sup>11</sup> (CFA Institute, 2020)

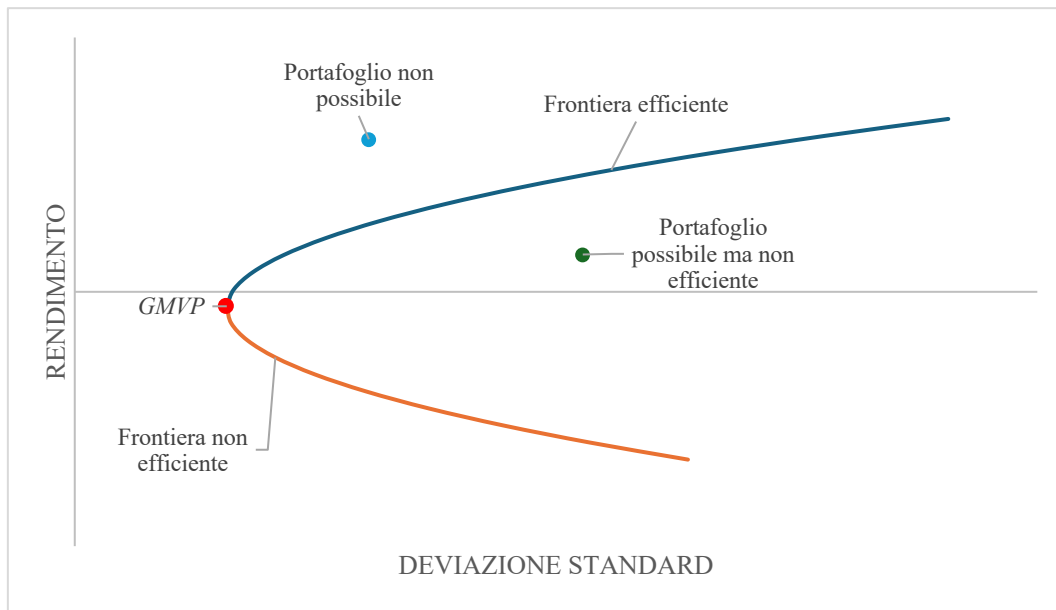


Figura 1 – Frontiera

### 1.3.3 Le curve di indifferenza

Dopo aver tracciato la frontiera efficiente attraverso l'ottimizzazione media-varianza, è necessario definire quale portafoglio sulla frontiera sia ottimo per uno specifico investitore. In altri termini, occorre integrare le caratteristiche oggettive dei portafogli (rendimento e rischio) con le preferenze soggettive dell'investitore, modellate mediante la teoria dell'utilità attesa<sup>12</sup>.

In quest'ottica, ogni investitore è rappresentato da una funzione di utilità quadratica  $U_p$ , che misura il grado di soddisfazione atteso in funzione del rendimento e del rischio associato al portafoglio:

$$U_p = R_p - \lambda \sigma_p^2$$

dove:

- $R_p$  è il rendimento atteso del portafoglio;
- $\sigma_p^2$  è la varianza del rendimento del portafoglio (ossia il rischio);
- $\lambda > 0$  è il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore.

Nel piano rischio-rendimento, tale funzione genera curve di indifferenza rappresentate da parabole convesse. Ogni curva collega combinazioni  $(R_p, \sigma_p)$  che offrono lo stesso livello di

<sup>12</sup> (Luenberger, 1998)

utilità. L'investitore razionale sceglierà il portafoglio che si colloca nel punto di tangenza tra la curva di indifferenza più alta raggiungibile (fig. 2, curva U2) e la frontiera efficiente. In quel punto, viene massimizzata l'utilità attesa, compatibilmente con le opportunità offerte dal mercato.

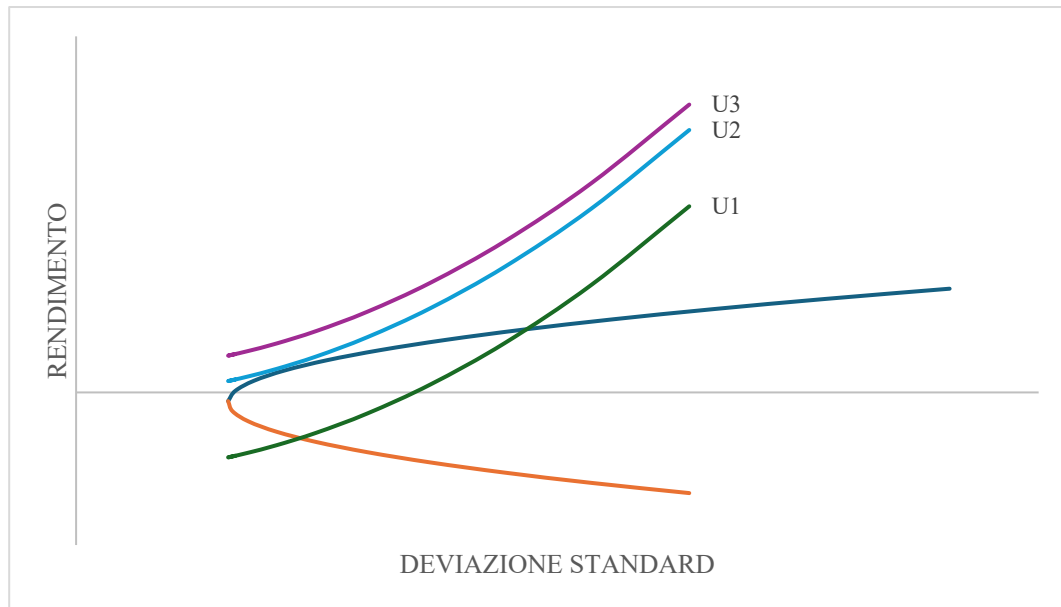


Figura 2 – Frontiera e curve di indifferenza

### 1.3.4 Estensione con il titolo privo di rischio: la *Capital Market Line*

Il modello di Markowitz può essere esteso considerando la possibilità di investire in un'attività priva di rischio caratterizzata da un rendimento certo e costante denotato con  $r_f$  (es. titoli di Stato), indipendente dall'andamento del mercato<sup>13</sup>. In termini statistici, tale attività presenta deviazione standard pari a zero e covarianza nulla con qualunque attività rischiosa:

$$\sigma_{r_f} = 0$$

$$Cov(r_f, R_i) = 0$$

Queste caratteristiche implicano che, in un portafoglio combinato, il titolo privo di rischio incida solo sul rendimento atteso, senza contribuire alla varianza complessiva.

<sup>13</sup> (CFA Institute, 2020)

Per derivare la forma analitica della *CML*, verrà introdotta la cosiddetta ipotesi di omogeneità delle aspettative, secondo la quale tutti gli investitori valutano i titoli nello stesso modo e giungono, pertanto, ad individuare lo stesso portafoglio rischioso ottimo.

Se si assume che tale portafoglio sia costituito da tutte le attività rischiose esistenti sul mercato, ponderate per il rispettivo valore, esso coinciderà con il portafoglio di mercato  $m$ , la cui ponderazione per ciascun titolo è definita come:

$$m_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

dove  $V_i$  è il valore di mercato dell'attività rischiosa  $i$  e  $n$  è il numero di tutte le attività che compongono il mercato.

In termini teorici, il portafoglio di mercato può essere identificato come la soluzione del problema di ottimizzazione di Markowitz nel caso in cui la costante  $c$  coincida con il tasso privo di rischio  $r_f$ . Il portafoglio di mercato, così come definito in senso teorico, non è replicabile nella realtà, poiché richiederebbe di detenere tutte le attività rischiose esistenti a livello globale. Nella pratica si ricorre quindi ad una *proxy* del portafoglio di mercato, rappresentato da indici di borsa ampi e diversificati, come lo S&P 500 per gli Stati Uniti, l'Euro Stoxx 600 per l'Europa o il Topix per il Giappone.

In un contesto teorico ideale in cui gli investitori hanno accesso a tutte le attività rischiose esistenti (portafoglio di mercato  $m$ ) e ad un titolo privo di rischio, la combinazione convessa di queste due componenti permette di costruire portafogli caratterizzati da profili rischio-rendimento superiori rispetto a quelli ottenibili dalla sola frontiera efficiente. La *CML* rappresenta graficamente l'insieme di tali combinazioni efficienti ed è formalmente espressa come:

$$R_p = r_f + \frac{R_m - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p$$

dove:

- $R_p$  è il rendimento atteso di un portafoglio situato sulla *CML*;
- $\sigma_p$  è la deviazione standard del rendimento del portafoglio;
- $\frac{R_m - r_f}{\sigma_m}$  rappresenta la pendenza della retta ed è noto come *Sharpe Ratio*, ossia il rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio per unità di rischio assunto;
- $r_m - r_f$  rappresenta il *market price of risk*, ossia la pendenza della retta tangente alla frontiera efficiente nel punto  $m$  (portafoglio di mercato).

Dal punto di vista grafico (fig. 3), la *CML* parte dal punto  $(0, r_f)$ , dove il rischio è nullo, ed è tangente alla frontiera efficiente nel punto  $m$  (portafoglio di mercato). Secondo il teorema della separazione di Tobin, ogni investitore può costruire il proprio portafoglio ottimo scegliendo una combinazione lineare tra l'attività priva di rischio e il portafoglio di mercato  $m$ <sup>14</sup>, variando le proporzioni in base alla propria avversione al rischio.

In particolare:

- gli investitori più prudenti (alta  $\lambda$ ) investiranno una quota maggiore in  $r_f$ ;
- quelli più propensi al rischio (bassa  $\lambda$ ) concentreranno le risorse in  $m$ .

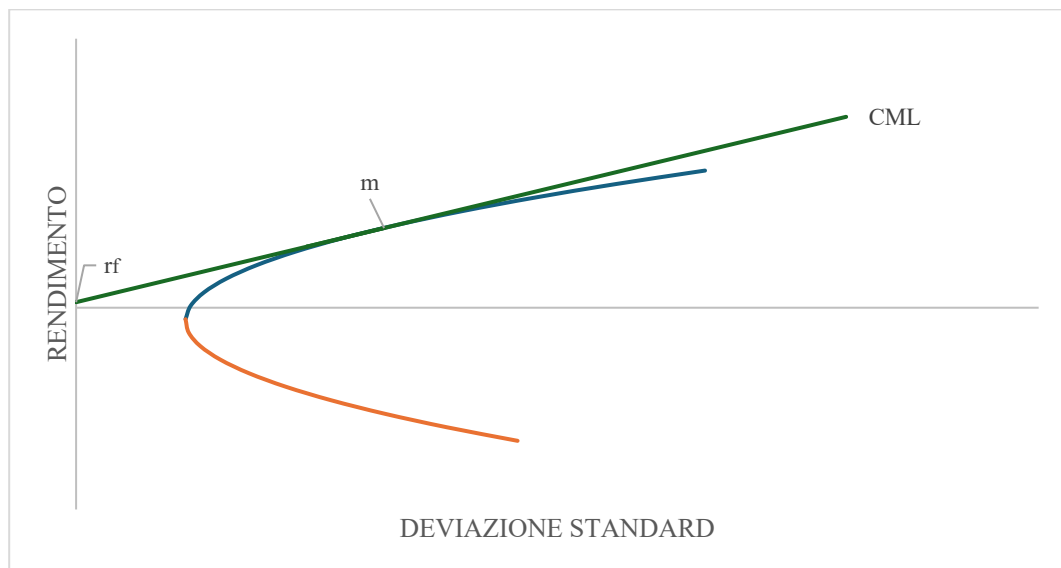


Figura 3 – Frontiera e CML

<sup>14</sup> Per portafoglio di mercato si intende un portafoglio teorico che comprende tutte le attività finanziarie esistenti, rappresentando il massimo livello di diversificazione possibile; nella pratica, viene spesso rappresentato da un indice azionario ampiamente diversificato.

# Capitolo 2 – Applicazione

## Premessa

Il presente capitolo si propone di tradurre in pratica i fondamenti teorici della diversificazione finanziaria, trattati nel primo capitolo, attraverso un'analisi empirica del modello media-varianza di Markowitz. L'obiettivo è quello di verificare la validità di quest'ultimo in un contesto reale, esaminando come la combinazione di titoli con caratteristiche diverse possa condurre alla costruzione di portafogli efficienti.

La logica sottostante questa applicazione empirica poggia su tre pilastri fondamentali già discussi in sede teorica:

1. la diversificazione come strumento di riduzione del rischio specifico, che si realizza combinando titoli non perfettamente correlati tra loro;
2. la possibilità di rappresentare graficamente le scelte ottime dell'investitore mediante la frontiera efficiente, ossia l'insieme dei portafogli che, a parità di rischio, massimizzano il rendimento o, viceversa, minimizzano il rischio a parità di rendimento;
3. l'introduzione di un'attività priva di rischio, che consente di estendere l'analisi al modello della *Capital Market Line (CML)*, per spiegare il comportamento degli investitori razionali nel contesto dell'equilibrio di mercato.

## 2.1 Metodologia e *dataset*

L'intero processo sarà condotto attraverso l'utilizzo del *software Microsoft Excel*. Verrà selezionato un *dataset* composto da otto titoli azionari rappresentativi del mercato italiano, appartenenti a settori economici eterogenei e caratterizzati da diversi livelli di rischio, rendimento e correlazione. Questa selezione non è casuale: si basa sulla necessità di testare concretamente l'efficacia della diversificazione nella riduzione del rischio, uno dei capisaldi della teoria di Markowitz.

I titoli oggetto di analisi saranno scelti all'interno del FTSE MIB, l'indice azionario di riferimento della Borsa Italiana, operativo dal 1° giugno 2009 in seguito alla fusione tra Borsa Italiana e il *London Stock Exchange Group*<sup>15</sup>. Il FTSE MIB (acronimo di *Financial Times Stock*

---

<sup>15</sup> (Moneyfarm, s.d.)

*Exchange* Milano Indice di Borsa) rappresenta circa l'80% della capitalizzazione di mercato complessiva ed è composto da 40 società a maggiore capitalizzazione e liquidità quotate sul mercato *Euronext Milan*, appartenenti a settori quali bancario, industriale, assicurativo, energetico, dei beni di consumo e delle telecomunicazioni<sup>16</sup>.

In particolare, i titoli selezionati sono:

1. ENI S.p.A. (ENI.MI) – settore energia (petrolio e gas naturale) → caratterizzato da alta ciclicità, forte esposizione all'andamento delle materie prime e notevole volatilità legata a dinamiche geopolitiche, macroeconomiche e ambientali;
2. ENEL S.p.A. (ENEL.MI) – settore *utility* (energia elettrica) → considerato un titolo difensivo, particolarmente adatto a portafogli con profilo di rischio contenuto che offrono rendimenti relativamente stabili e una bassa esposizione alla ciclicità economica;
3. Intesa Sanpaolo S.p.A. (ISP.MI) – settore finanziario → fortemente sensibile all'evoluzione dei tassi di interesse, alla regolamentazione bancaria europea e alla congiuntura economica;
4. Stellantis N.V. (STLA.MI) – settore industriale/*automotive* → grande gruppo automobilistico con esposizione internazionale, risente del ciclo economico globale e presenta un'elevata volatilità, amplificata dalla transizione energetica in atto nel settore;
5. Leonardo S.p.A. (LDO.MI) – settore difesa e aerospazio → gruppo industriale strategico con un modello di business esposto sia al ciclo industriale sia a dinamiche politico-militari, caratterizzato da una volatilità medio-alta e da un'elevata rilevanza nei piani industriali pubblici;
6. Campari Group S.p.A. (CPR.MI) – settore beni di consumo → multinazionale attiva nel segmento delle bevande alcoliche, presenta una volatilità contenuta e una minore correlazione rispetto ai titoli ciclici, rendendola interessante ai fini della diversificazione;
7. Nexi S.p.A. (NEXI.MI) – settore tecnologia/*fintech* → azienda leader nei servizi di pagamento digitali in Italia e in Europa, caratterizzata da un'elevata componente innovativa e da una volatilità significativa, utile per arricchire l'analisi empirica della diversificazione in portafoglio;

---

<sup>16</sup> (Borsa Italiana, s.d.)

8. Moncler S.p.A. (MONC.MI) – settore moda/lusso → azienda simbolo del made in Italy, caratterizzata da alta marginalità e da una forte componente ciclica legata ai consumi discrezionali e alla domanda internazionale, in particolare nei mercati asiatici.

L’approccio metodologico adottato in questo studio si articolerà in diverse fasi:

- calcolo dei rendimenti attesi e delle principali misure di rischio dei singoli titoli;
- costruzione della frontiera efficiente con e senza possibilità di vendite allo scoperto (*short selling*);
- introduzione di un’attività priva di rischio per estendere l’analisi alla *Capital Market Line (CML)*.

## 2.2 Misure di rischio-rendimento dei singoli titoli

Per l’analisi empirica sono stati utilizzati i prezzi “*adjusted close*” forniti da *Yahoo Finance*, i quali tengono conto delle principali operazioni societarie come la distribuzione di dividendi, frazionamenti azionari o fusioni. Questo accorgimento consente di ottenere una misura più accurata della performance effettiva percepita dall’investitore, evitando distorsioni nei rendimenti calcolati.

I dati riguardano i prezzi di chiusura rettificati mensili per ciascun titolo, relativi al periodo compreso tra luglio 2019 e giugno 2025 (72 osservazioni). L’utilizzo di una frequenza mensile, anziché giornaliera, consente di ridurre la componente di rumore e rendere l’analisi più robusta sul piano statistico, mantenendo al contempo un numero sufficiente di osservazioni per stimare in modo affidabile le principali misure di rischio e rendimento.

Successivamente si è effettuato il calcolo dei rendimenti logaritmici mensili ( $r_t$ ), mediante la seguente formula:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

dove:

- $P_t$  è il prezzo al tempo  $t$ ;
- $P_{t-1}$  è il prezzo al tempo  $t - 1$ .

L'adozione dei rendimenti logaritmici, rispetto a quelli semplici, si giustifica per due motivi fondamentali: da un lato, garantiscono l'additività temporale dei rendimenti, facilitando analisi su intervalli diversi; dall'altro, tendono ad approssimare meglio la normalità della distribuzione, assunzione centrale nei modelli media-varianza trattati nel primo capitolo.

Per ciascun titolo si è quindi calcolato:

- il rendimento medio atteso mensile<sup>17</sup>  $\bar{R}$ , ottenuto come media aritmetica dei rendimenti logaritmi osservati in una serie storica di lunghezza  $N$ ;
- il livello di rischio  $\sigma$ , rappresentato dalla deviazione standard dei medesimi rendimenti, utilizzata come *proxy* della volatilità (tab. 1).

Le formule utilizzate sono le seguenti:

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_t$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_t - \bar{R})^2}$$

---

<sup>17</sup> L'approccio storico prevede che la media dei rendimenti passati sia la migliore approssimazione del rendimento atteso.

	<b>Rendimento medio</b>	<b>Deviazione standard</b>
ENI.MI	0,52%	8,26%
ENEL.MI	0,84%	6,53%
ISP.MI	1,81%	9,55%
STLA.MI	0,03%	12,21%
LDO.MI	2,15%	11,58%
CPR.MI	-0,49%	6,65%
NEXI.MI	-0,84%	9,55%
MONC.MI	0,49%	8,53%

Tabella 1 – Misure rischio-rendimento dei singoli titoli azionari

Per una prima analisi comparativa, i titoli selezionati vengono rappresentati su un piano rendimento-deviazione standard (fig. 4). Questo consente di visualizzare graficamente le loro caratteristiche e fornire un'intuizione preliminare sulle opportunità di diversificazione.

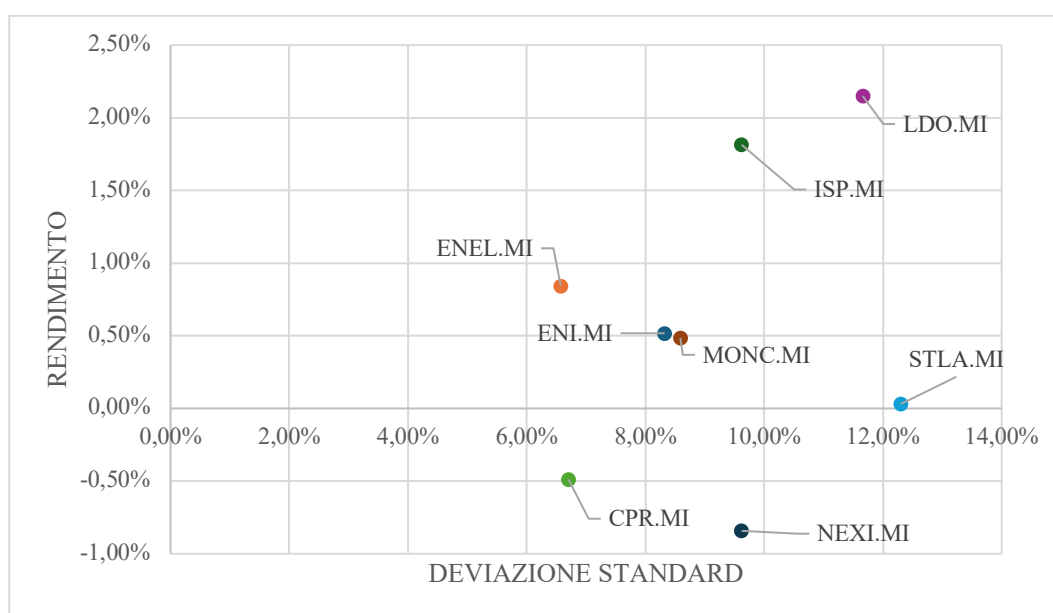


Figura 4 – Piano rischio-rendimento dei singoli titoli azionari

Si nota come Leonardo e Intesa Sanpaolo si distinguono per i rendimenti più elevati, a fronte però di una volatilità medio-alta, riflesso della loro esposizione rispettivamente a dinamiche geopolitiche e al ciclo finanziario.

Enel mostra invece un profilo relativamente difensivo, con un rendimento soddisfacente e rischio limitato, coerente con la natura del settore di *utility*.

Diverso il caso di Eni, che si colloca in prossimità di Moncler. Entrambi presentano un profilo rischio-rendimento intermedio, ma per ragioni differenti: nel caso di Eni, il posizionamento riflette la ciclicità del settore energia; per Moncler, invece, l'andamento dipende maggiormente dalla domanda discrezionale.

Stellantis si posiziona tra i titoli a volatilità più alta, con un rendimento prossimo allo zero, in linea con le caratteristiche del comparto automotive e la forte esposizione internazionale.

Campari mostra un rendimento negativo a fronte di rischio contenuto, collocandosi in una zona meno efficiente ma potenzialmente utile in ottica diversificazione.

Nexi, infine, si distingue per elevata volatilità senza un rendimento proporzionato, riflettendo le incertezze del settore *fintech*.

## 2.3 Il profilo di rischio-rendimento del portafoglio

Assumiamo di voler costruire due differenti portafogli, ciascuno definito da un proprio vettore di pesi (tab. 2).

<i>Proporzioni</i>	Portafoglio x	Portafoglio y
ENI.MI	14%	8%
ENEL.MI	18%	11%
ISP.MI	6%	16%
STLA.MI	9%	20%
LDO.MI	22%	5%
CPR.MI	12%	22%
NEXI.MI	8%	6%
MONC.MI	11%	12%
<i>Somma</i>	100%	100%

Tabella 2 – Portafogli x e y

I pesi stessi, il rendimento medio dei singoli titoli e la matrice varianze-covarianze costituiscono gli elementi necessari per calcolare il rendimento medio, la varianza e la deviazione standard dei due portafogli.

Il rendimento atteso del portafoglio (tab. 3) corrisponde alla media ponderata dei rendimenti azionari medi, dove i pesi rappresentano le proporzioni investite in ciascun titolo. Questa formula, espressa in forma estesa come:

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i F$$

può essere scritta in modo più compatto utilizzando la notazione matriciale:

$$R_p = R_i^T \cdot \omega_i$$

dove:

- $\omega_i$  è il vettore colonna dei pesi  $\omega_i = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$  con  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ;
- $R_i^T$  è il vettore riga dei rendimenti medi attesi  $R_i^T = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_n]$ .

	Portafoglio x	Portafoglio y
<b>Rendimento medio atteso</b>	0,74%	0,44%

Tabella 3 – Rendimento atteso dei portafogli x e y

Per il calcolo della varianza del portafoglio  $\sigma_p^2$ , si costruisce la matrice varianze-covarianze  $S$ , i cui elementi sulla diagonale principale ( $\sigma_{ii}$ ) rappresentano le varianze dei singoli titoli, mentre quelle fuori la diagonale ( $\sigma_{ij}$ ) rappresentano le covarianze tra le coppie di titoli  $i$  e  $j$ :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

La formula matriciale per la varianza del portafoglio (tab. 4) è data da:

$$\sigma_p^2 = \omega^T \cdot S \cdot \omega$$

dove  $\omega^T$  e  $\omega$  rappresentano rispettivamente il vettore trasposto e il vettore colonna dei pesi dei titoli nel portafoglio.

La deviazione standard (tab. 4) si ottiene invece effettuando la radice quadrata della varianza:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\omega^T \cdot S \cdot \omega}$$

	Portafoglio x	Portafoglio y
<b>Varianza</b>	0,32%	0,36%
<b>Deviazione standard</b>	5,69%	6,02%

*Tabella 4 – Profilo di rischio dei portafogli x e y*

Un ulteriore elemento chiave dell'ottimizzazione è la correlazione. La correlazione deriva dalla covarianza, una misura che descrive il grado e la direzione della relazione lineare tra i rendimenti di due attività finanziarie. Essa consente di valutare se i rendimenti tendono a muoversi nello stesso verso o in direzioni opposte. Un valore positivo indica che i due rendimenti tendono in media ad aumentare o diminuire contemporaneamente, mentre un valore negativo segnala che, quando il rendimento di una delle due attività cresce, quello dell'altra tende in media a ridursi. Valori prossimi allo zero denotano l'assenza di una relazione lineare significativa.

Poiché la covarianza non è una misura standardizzata, il suo valore assoluto dipende sia dall'unità di misura dei rendimenti sia dalla volatilità delle singole attività. Questo rende difficile confrontare direttamente covarianze riferite a coppie di titoli diversi. Per superare questa limitazione, si utilizza il coefficiente di correlazione (tab. 5), che normalizza la covarianza dividendo per il prodotto delle deviazioni standard dei due titoli:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

La normalizzazione rende la misura adimensionale e la vincola a valori compresi tra -1 e +1, indipendentemente dalle unità di misura dei rendimenti. Ciò consente di interpretare facilmente il grado e la direzione della relazione: un valore pari a +1 indica correlazione perfetta positiva, -1 indica correlazione perfetta negativa e 0 assenza di relazione lineare.

Nell'ambito della teoria di Markowitz, la correlazione tra attività è un elemento cruciale per determinare il rischio complessivo del portafoglio e i benefici derivanti dalla diversificazione. In presenza di correlazione perfetta positiva ( $\rho = +1$ ), la deviazione standard del portafoglio è pari alla media ponderata delle deviazioni standard dei singoli titoli e non si ottiene alcuna

riduzione del rischio. Quando la correlazione è inferiore a +1 la combinazione di più attività può ridurre la volatilità complessiva; in particolare, con correlazione perfetta negativa ( $\rho = -1$ ), è teoricamente possibile eliminare completamente il rischio specifico.

	ENI.MI	ENEL.MI	ISP.MI	STLA.MI	LDO.MI	CPR.MI	NEXI.MI	MONC.MI
ENI.MI	1							
ENEL.MI	0,48	1						
ISP.MI	0,67	0,54	1					
STLA.MI	0,43	0,34	0,55	1				
LDO.MI	0,45	0,28	0,34	0,12	1			
CPR.MI	0,04	0,26	0,12	0,32	-0,03	1		
NEXI.MI	0,19	0,46	0,33	0,46	-0,01	0,26	1	
MONC.MI	0,25	0,25	0,32	0,42	0,19	0,44	0,32	1

Tabella 5 – Correlazione tra i titoli azionari

## 2.4 Combinazioni sub-ottimali

I portafogli  $x$  e  $y$  possono essere considerati come due ulteriori attività, ottenute da una combinazione lineare degli otto titoli originari.

A loro volta, tali portafogli possono essere combinati per ottenere un terzo portafoglio, denominato  $xy$ , caratterizzato da un'allocazione del 70% in  $x$  e del 30% in  $y$ .

Il portafoglio  $xy$  presenta un rendimento medio mensile dello 0,65% e una deviazione standard del 5,67%.

A partire da questa configurazione, variando il peso di  $x$  in un intervallo compreso tra il -100% e il +300%, è stato possibile calcolare altre combinazioni dei portafogli  $x$  e  $y$  (tab. 6), dove la combinazione corrispondente al 70% in  $x$  viene evidenziata in grigio.

Il peso di  $y$  è stato determinato dalla relazione:

$$\omega_y = 1 - \omega_x$$

<b>% Portafoglio x</b>	<b>Deviazione standard portafoglio xy</b>	<b>Rendimento portafoglio xy</b>
-100%	7,34%	0,14%
-80%	7,02%	0,20%
-60%	6,72%	0,26%
-40%	6,46%	0,32%
-20%	6,22%	0,38%
0%	6,02%	0,44%
20%	5,87%	0,50%
40%	5,75%	0,56%
60%	5,68%	0,62%
70%	5,67%	0,65%
80%	5,66%	0,68%
100%	5,69%	0,74%
120%	5,77%	0,80%
140%	5,89%	0,86%
160%	6,06%	0,91%
180%	6,26%	0,97%
200%	6,51%	1,03%
220%	6,78%	1,09%
240%	7,08%	1,15%
260%	7,41%	1,21%
280%	7,76%	1,27%
300%	8,13%	1,33%

Tabella 6 – Combinazioni dei portafogli x e y

Le combinazioni in cui entrambi i pesi soddisfano la condizione  $0 \leq \omega_x, \omega_y \leq 1$  rappresentano casi di combinazioni convesse, prive dunque di vendite allo scoperto e leva finanziaria. Diversamente, quando uno dei due pesi assume valori negativi o superiori al 100%, si parla di combinazioni non convesse, che implicano necessariamente la presenza di *short selling* e/o leva finanziaria.

Questa distinzione è particolarmente rilevante poiché l'analisi verrà condotta considerando due ipotesi distinte, che si differenziano appunto per la presenza o meno del vincolo di *short selling*:

1. portafoglio con vendite allo scoperto → i pesi associati ai titoli possono assumere valori negativi, permettendo di assumere posizioni corte<sup>18</sup>. Questo offre una maggiore flessibilità nella costruzione del portafoglio, migliorando la frontiera efficiente grazie a combinazioni di titoli più varie che ottimizzano il profilo rischio-rendimento;
2. portafoglio con divieto di *short selling* → i pesi sono vincolati a valori non negativi, permettendo di detenere solo posizioni lunghe<sup>19</sup>. Si tratta di un vincolo operativo realistico e comune, soprattutto per investitori privati e istituzionali soggetti a rigide limitazioni normative. Tale restrizione limita l'insieme dei portafogli efficienti che è possibile costruire, riducendo le possibilità di ottimizzazione.

Questa differenziazione è cruciale per comprendere l'impatto pratico dei vincoli operativi sulle scelte di portafoglio: mentre la teoria classica presuppone piena libertà nelle scelte di investimento, l'inclusione del divieto di *short selling* rende il modello più aderente alle condizioni reali dei mercati finanziari.

La rappresentazione grafica di queste combinazioni (fig. 5) mostra chiaramente come il portafoglio  $xy$  e le combinazioni ottenute da esso non coincidano con la frontiera efficiente, poiché esistono allocazioni alternative tra le otto attività originarie – come ad esempio ISP.MI e LDO.MI – in grado di offrire un rendimento maggiore a parità di rischio oppure un rischio inferiore a parità di rendimento.

---

<sup>18</sup> Assumere una posizione corta (*short*) significa vendere un titolo preso in prestito, con l'aspettativa che il suo prezzo diminuisca.

<sup>19</sup> Assumere una posizione lunga (*long*) significa acquistare un titolo con l'aspettativa che il suo prezzo aumenti nel tempo.

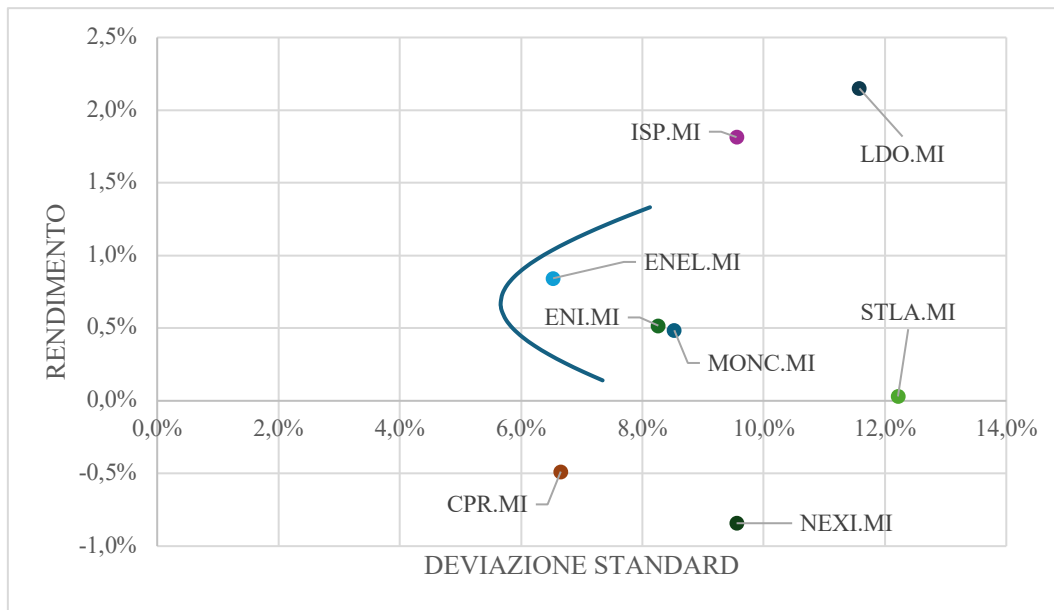


Figura 5 – Combinazioni sub-ottimali e singoli titoli

## 2.5 La frontiera efficiente

Per individuare le allocazioni ottime è necessario risolvere il problema di minimizzazione della varianza vincolata a un rendimento atteso prefissato, imponendo che la somma dei pesi dei titoli sia pari a 1. Questo approccio consente di tracciare la frontiera efficiente, ossia l'insieme di portafogli che, per ciascun livello di rendimento atteso, presentano la deviazione standard minima possibile. In tal modo, diventa possibile confrontare le soluzioni ottime con i portafogli sub-ottimali analizzati nel paragrafo precedente.

Il problema di ottimizzazione può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\min \sigma_p^2 = \omega^\top \cdot S \cdot \omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n] \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

soggetto a

$$R_p = R_i^\top \cdot \omega_i = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_n] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \mu$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

dove  $\mu$  è il rendimento obiettivo prefissato.

La soluzione di tale problema richiede di calcolare il vettore  $z$  che soddisfi la seguente equazione:

$$z = S^{-1} \cdot (R_i - c)$$

dove  $c$  è una costante arbitraria generalmente scelta in prossimità del valore medio dei rendimenti attesi. I pesi ottimi si ottengono normalizzando:

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n z_j}$$

Questo risultato, noto come proposizione 1, fu originariamente formulato da Merton nel 1972<sup>20</sup>.

Per applicare concretamente il modello, scegliamo due diverse costanti,  $c_a$  e  $c_b$  (ad esempio 2% e 3%), che dovranno essere poi sottratte dai vettori dei rendimenti attesi dei titoli. Si potranno successivamente trovare i vettori  $z_a$  e  $z_b$ .

Dividendo ogni membro dei vettori  $z_a$  e  $z_b$  per la somma di tutti i membri degli stessi, si individuano i vettori dei pesi ottimi, ovvero due portafogli ottimi, che chiameremo rispettivamente portafoglio  $a$  e portafoglio  $b$  (tab. 7).

<i>Proporzioni</i>	Portafoglio $a$	Portafoglio $b$
ENI.MI	55,76%	43,32%
ENEL.MI	-5,29%	4,59%
ISP.MI	-38,29%	-25,54%
STLA.MI	-5,41%	-6,37%
LDO.MI	-5,01%	-0,40%
CPR.MI	66,06%	57,35%
NEXI.MI	36,10%	27,00%
MONC.MI	-3,93%	0,05%
<i>Somma</i>	100%	100%

Tabella 7 – I portafogli ottimi  $a$  e  $b$

<sup>20</sup> (Merton, 1972)

A questo punto entra in gioco la proposizione 2, formulata da Black nel 1972<sup>21</sup>, secondo la quale è sufficiente disporre di due portafogli appartenenti alla frontiera per generare, tramite combinazioni lineari degli stessi, l'intero insieme dei portafogli di frontiera. In altri termini, se  $a$  e  $b$  sono portafogli di frontiera, qualsiasi combinazione convessa tra di essi dà origine ad altri portafogli efficienti. Per rappresentare graficamente la frontiera è quindi necessario innanzitutto calcolare il rendimento atteso, la deviazione standard e la covarianza del portafoglio  $a$  e del portafoglio  $b$  (tab. 8).

	Portafoglio $a$	Portafoglio $b$
<b>Rendimento medio</b>	-1,21%	-0,72%
<b>Deviazione standard</b>	6,28%	5,44%
<b>Covarianza</b>	0,33%	

*Tabella 8 – Profilo di rischio dei portafogli  $a$  e  $b$*

Variando progressivamente le proporzioni dei portafogli  $a$  e  $b$  dal -1000% al +1000%, si ottiene un insieme di portafogli che costituisce la frontiera (fig. 6).

Essa raccoglie tutti i portafogli ottenibili dagli otto titoli azionari che garantiscono il minor rischio possibile per determinati livelli di rendimenti attesi. Ciò significa che qualsiasi altra combinazione convessa delle attività sarà collocata al di sotto o a destra della frontiera, configurandosi come inefficiente. Possiamo dimostrare ciò rappresentando la frontiera e gli otto titoli in uno stesso grafico.

---

<sup>21</sup> (Black, 1972)

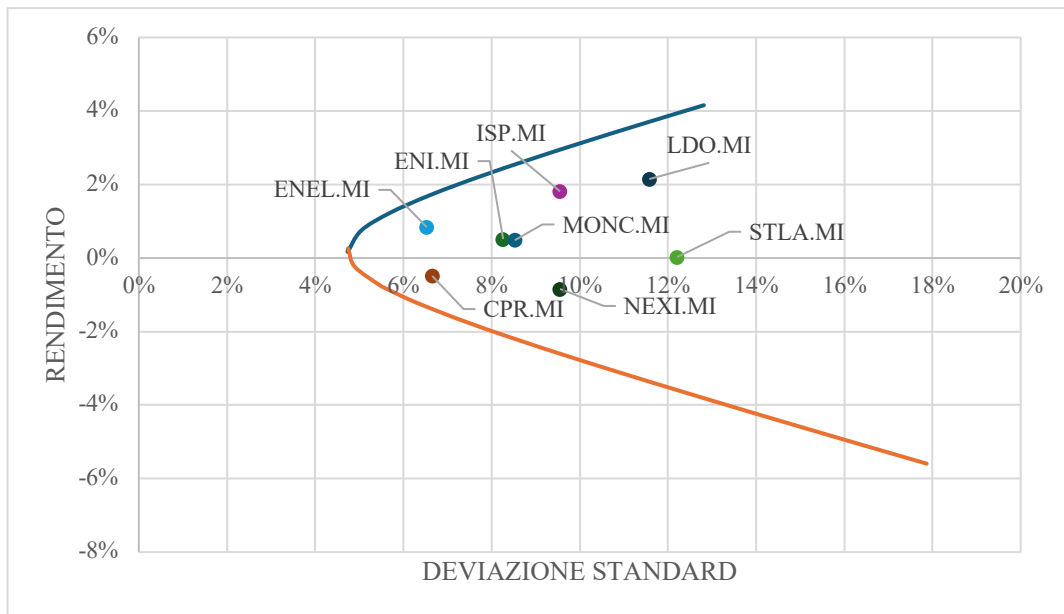


Figura 6 – Frontiera e singoli titoli

La sezione della frontiera inclinata verso il basso (fig. 7, linea arancione) è sempre dominata dalla corrispondente sezione inclinata verso l'alto (fig. 7, linea blu), detta frontiera efficiente. Quest'ultima offre le migliori combinazioni rischio-rendimento e quindi è ovviamente preferibile anche alle combinazioni sub-ottimali ottenute nel par. 2.4 (fig. 7, linea verde). La frontiera efficiente ha inizio nel *Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)*, ossia il portafoglio con la varianza minima ottenibile (fig. 7, pallino azzurro). Da quel punto in avanti, sia rischio che rendimento crescono insieme, delineando lo spazio delle scelte razionali per un investitore avverso al rischio.

La selezione finale dipenderà dalle preferenze individuali: un investitore molto avverso al rischio tenderà a scegliere portafogli prossimi al *GMVP*, mentre uno meno avverso al rischio preferirà portafogli posizionati più in alto sulla frontiera.

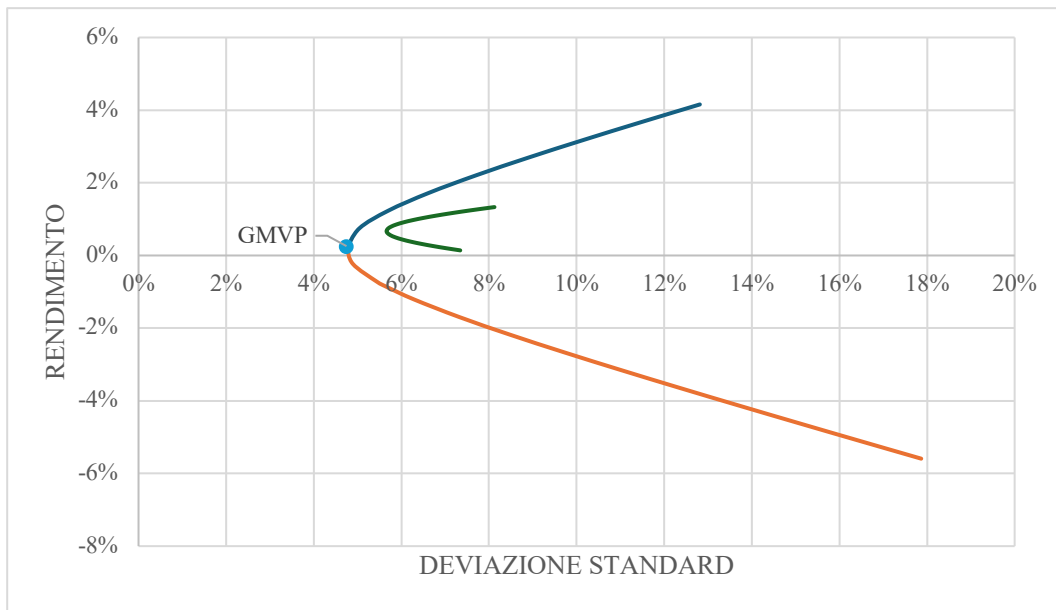


Figura 7 – Frontiera, GMVP e combinazioni sub-ottimali

Ipotizziamo che, sulla base delle preferenze rischio-rendimento, l'investitore selezioni il portafoglio *k*, che si colloca sulla frontiera efficiente. Tale portafoglio è caratterizzato da una posizione *short* del 500% sul portafoglio *a* e una posizione *long* del 600% sul portafoglio *b*.

Nella rappresentazione rischio-rendimento, il portafoglio *k* si colloca in corrispondenza di un rendimento atteso pari all'1,72% e una deviazione standard del 6,62%, risultando più redditizio ma anche più rischioso del portafoglio *a* a minima varianza globale (fig. 8).

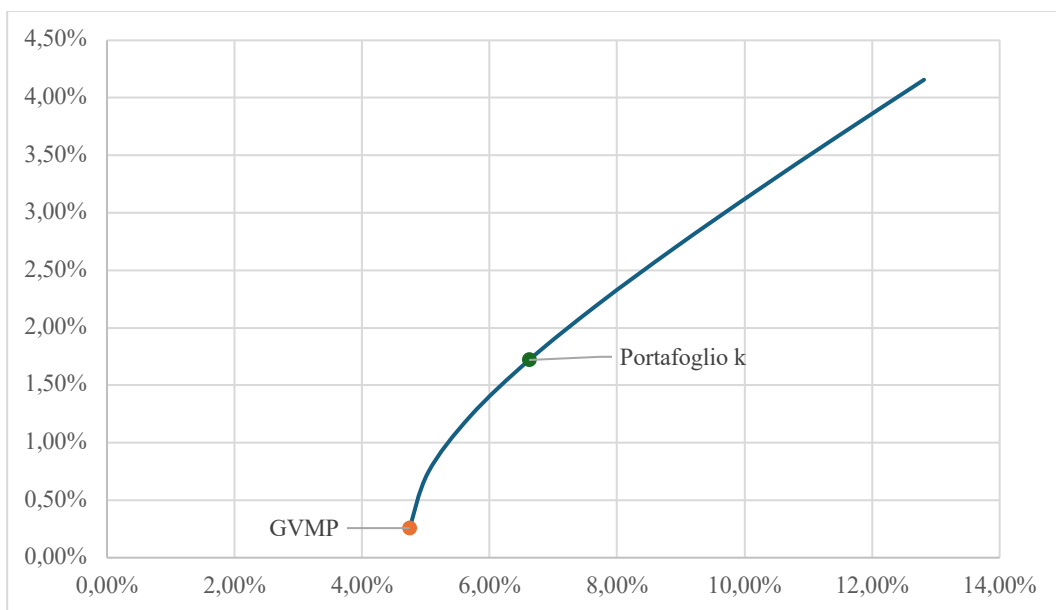


Figura 8 – Frontiera efficiente, GMVP e portafoglio selezionato

In conclusione, l'investimento nel portafoglio  $k$  comporta un rendimento atteso positivo accompagnato da un livello di rischio coerente con la posizione assunta lungo la frontiera efficiente. Poiché i dati si basano su serie storiche mensili, la previsione si riferisce al mese successivo, ossia luglio 2025.

Questo esempio dimostra come l'approccio media-varianza consenta di individuare portafogli ottimi coerenti con le preferenze dell'investitore. Inoltre, l'aggiunta di nuovi titoli all'universo investibile non garantisce che essi si collochino sulla stessa frontiera: al contrario, potrebbero consentire di spostarla ulteriormente verso configurazioni rischio-rendimento più favorevoli, ridefinendo così il set di scelte efficienti.

### **2.5.1 Divieto di short selling**

In questo paragrafo viene introdotto il vincolo di non negatività dei pesi, che impedisce all'investitore di assumere posizioni corte. Questo vincolo riduce lo spazio delle combinazioni possibili e comporta una frontiera efficiente più ristretta rispetto a quella ottenibile nel caso di vendite allo scoperto consentite.

I portafogli proposti sono discretamente diversificati, con pesi distribuiti soprattutto su ENI, ENEL e Campari (fig. 9). Tuttavia, al crescere del rendimento obiettivo, la composizione del portafoglio tende progressivamente a ridursi a pochi titoli. Già per valori intermedi di  $c$ , l'ottimizzazione concentra i pesi quasi esclusivamente su Intesa Sanpaolo e Leonardo, mentre per  $c$  superiori al 2% l'intera allocazione converge su Leonardo, il titolo con rendimento atteso più elevato.

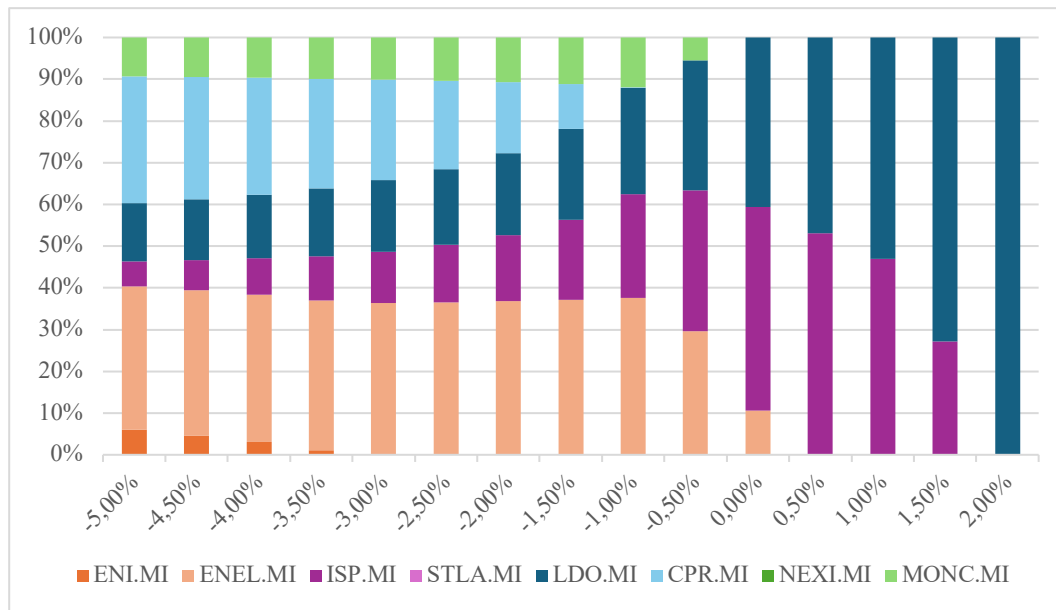


Figura 9 – Portafogli ottimi con vendite allo scoperto non consentite

Questo risultato merita una riflessione. Secondo la teoria di Markowitz, la diversificazione riduce il rischio aggregato combinando titoli non perfettamente correlati tra di loro. Nel nostro campione, però, le correlazioni tra i titoli risultano prevalentemente positive, nonostante l'appartenenza a settori differenti. In un contesto simile, la possibilità di utilizzare posizioni corte diventa cruciale: grazie a pesi negativi sarebbe infatti possibile bilanciare meglio i rischi specifici e ottenere combinazioni più efficienti. Laddove tale possibilità viene esclusa, come nel caso di divieto di vendite allo scoperto, l'ottimizzazione è costretta ad eliminare progressivamente i titoli con minore capacità di diversificazione.

Il confronto grafico tra le due frontiere (fig. 10) mette in evidenza con immediatezza queste dinamiche. La curva con *short selling* (linea blu), che parte dal punto a varianza minima indicato dal pallino arancione, si colloca sistematicamente a sinistra e al di sopra di quella senza *short selling* (linea verde), offrendo migliori combinazioni rischio-rendimento. La frontiera con vincolo di non negatività, invece, è più corta e meno inclinata: parte da un *GMVP* (pallino azzurro) ben diversificato, ma si interrompe rapidamente in corrispondenza di portafogli molto concentrati, che incorporano livelli di rischio relativamente elevati rispetto al rendimento ottenibile.

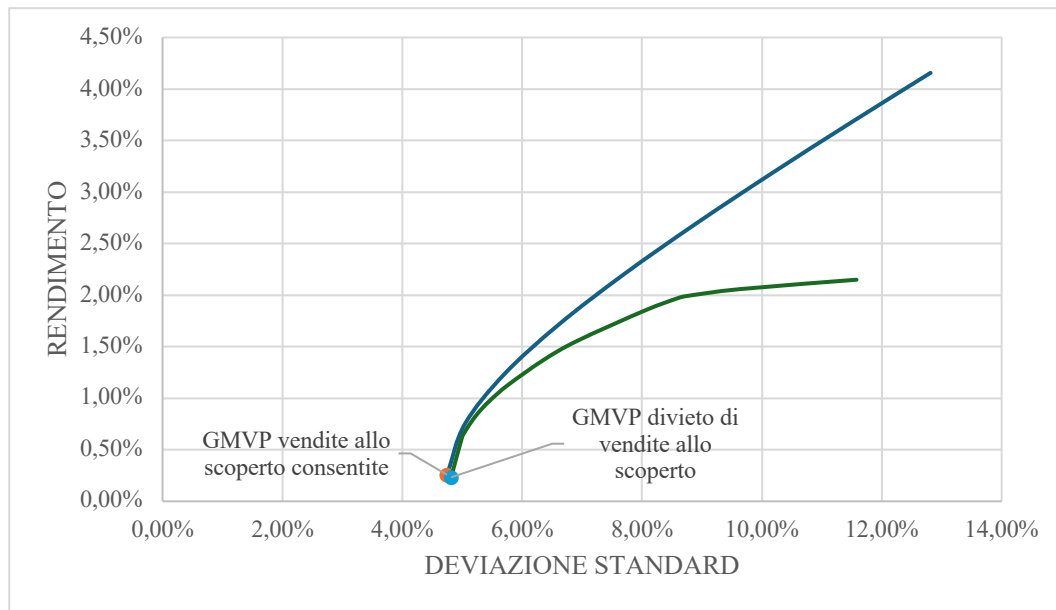


Figura 10 – Frontiere efficienti con e senza vendite allo scoperto

Il divieto di *short selling* riduce quindi l'efficienza complessiva del portafoglio, limitando la possibilità di sfruttare pienamente i benefici della diversificazione. Se da un lato questa restrizione riflette condizioni operative realistiche e protegge l'investitore dal rischio di perdite illimitate, dall'altro riduce le opportunità di costruire combinazioni ottime. L'evidenza empirica conferma che la frontiera con divieto di *short selling* rappresenta un sottoinsieme dominato della frontiera con vendite allo scoperto consentite e che la diversificazione tende a diminuire al crescere del rendimento obiettivo proprio a causa dei vincoli imposti.

## 2.6 La Capital Market Line (CML)

L'introduzione di un'attività priva di rischio amplia in modo significativo l'insieme delle scelte a disposizione dell'investitore, permettendo di ottenere combinazioni rischio-rendimento più vantaggiose rispetto a quelle collocate sulla frontiera efficiente. Tali combinazioni formano la cosiddetta *Capital Market Line (CML)*.

Consideriamo il portafoglio  $p$ , formato investendo la quota  $\omega$  nell'attività priva di rischio e la quota residua  $1 - \omega$  in un portafoglio rischioso  $i$ . Il rendimento atteso e la volatilità (approssimata dalla deviazione standard) del portafoglio risultano così definiti:

$$R_p = \omega r_f + (1 - \omega)R_i$$

$$\sigma_p = \sqrt{(1 - \omega)^2 \cdot \sigma_i^2}$$

A titolo esemplificativo, si ipotizzi un'attività *risk-free* con rendimento atteso pari al 2,5% e il portafoglio rischioso *b* (tab. 9).

	Attività <i>risk-free</i>	Portafoglio <i>b</i>
<b>Rendimento</b>	2,50%	-0,72%
<b>Deviazione standard</b>	0%	5,44%
<b>Covarianza</b>	0%	

Tabella 9 – Profilo rischio-rendimento dell'attività priva di rischio e del portafoglio *b*

Combinandoli, è possibile ottenere un nuovo portafoglio, che indichiamo con *d*, il cui rendimento atteso e la cui deviazione standard dipendono dalla quota allocata in ciascuna attività. Supponendo di investire il 30% nell'attività *risk-free* e il 70% nel portafoglio rischioso, il portafoglio *d* presenterà un rendimento atteso dello 0,25% e una deviazione standard del 3,81% (tab. 10).

<b>Proporzioni</b>	Portafoglio <i>d</i>
Attività <i>risk-free</i>	0,3
Portafoglio <i>b</i>	0,7
<b>Misure rischio-rendimento</b>	
Rendimento	0,25%
Deviazione standard	3,81%

Tabella 10 – Il portafoglio *d*

Supponiamo, per semplicità, che l'universo investibile sia costituito unicamente dai titoli azionari selezionati nella nostra analisi (tab. 1) e da un'attività priva di rischio con rendimento pari al -3%.

Per ottenere la *Capital Market Line (CML)* occorre combinare il portafoglio di mercato e il tasso di rendimento dell'attività priva di rischio, modificando la proporzione investita in quest'ultima (fig. 11).

La *CML* (linea arancione) si colloca sistematicamente al di sopra della frontiera (linea blu), evidenziando come, per qualsiasi livello di rischio, i portafogli situati sulla *CML* garantiscano un rendimento maggiore rispetto a quelli della frontiera. Dal punto di vista interpretativo, ciò

implica che, in presenza di un'attività priva di rischio, tutti gli investitori razionali sceglieranno un portafoglio situato sulla *CML*. La selezione dipenderà esclusivamente dal grado di avversione al rischio:

- gli investitori più prudenti investiranno in larga parte nell'attività *risk-free*, accettando un rendimento inferiore ma privo di rischio;
- gli investitori meno avversi aumenteranno progressivamente la quota destinata al portafoglio di mercato *m* (pallino azzurro), fino a ricorrere anche all'indebitamento (posizioni a leva), per collocarsi oltre il punto di tangenza.

In ogni caso, nessun investitore razionale sceglierà un portafoglio al di sotto della *CML*, poiché dominato in termini di rischio-rendimento.

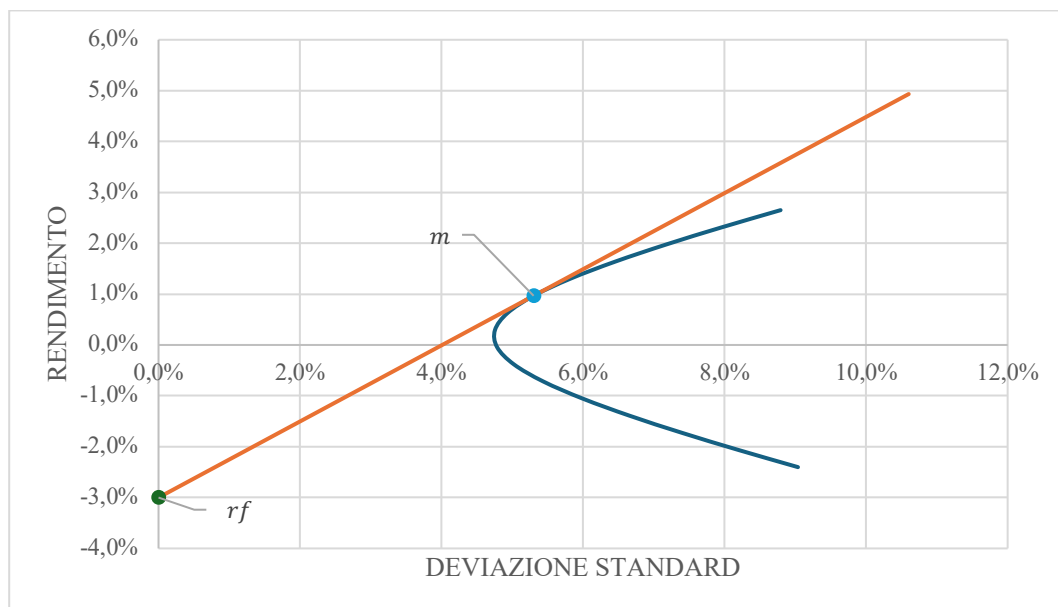


Figura 11 – Frontiera e CML

## Parte II – Innovazioni computazionali e *Quantum Finance*

### Capitolo 3 – Introduzione al *Quantum Computing*

#### Premessa

Nei capitoli precedenti abbiamo analizzato i fondamenti teorici della diversificazione finanziaria, a partire dalla teoria di Markowitz fino agli strumenti di ottimizzazione della frontiera efficiente. Abbiamo visto – anche tramite l'applicazione empirica – come la gestione di portafoglio si basi su correlazioni statistiche e distribuzioni probabilistiche e come la complessità dei mercati richieda modelli sempre più sofisticati per affrontare l'incertezza.

Nonostante i progressi raggiunti, il paradigma classico presenta limiti strutturali dovuti alla crescita esponenziale degli spazi combinatori e al rapido aumento dei tempi di calcolo, tanto che persino i più potenti supercomputer non riescono a risolvere certi problemi in tempi ragionevoli. Questo divario tra complessità teorica e capacità computazionale ha spinto la ricerca verso nuovi orizzonti.

È in questo contesto che si colloca il *quantum computing*. Basato sui principi della meccanica quantistica, introduce strumenti diversi rispetto a quelli classici: *qubit* in sovrapposizione, stati *entangled*, logiche probabilistiche che consentono di elaborare informazioni in modi inaccessibili al calcolo tradizionale. Queste proprietà non sono semplici curiosità fisiche, ma si traducono in potenzialità concrete per la risoluzione di problemi combinatori, di ottimizzazione e di simulazione, con implicazioni dirette anche nel campo finanziario.

Il presente capitolo ha l'obiettivo di introdurre i concetti fondamentali del calcolo quantistico, di evidenziare le differenze con il paradigma classico e di accennare alle potenzialità della sua applicazione nel campo finanziario. Dopo aver definito i mattoni di base (*qubit*, sovrapposizione ed *entanglement*), analizzeremo le conseguenze teoriche di queste proprietà, il legame con la teoria dei giochi e i principi che stanno alla base degli algoritmi quantistici più celebri. Infine, discuteremo le architetture *hardware* oggi disponibili e lo stato della ricerca, con particolare attenzione al panorama italiano ed europeo.

### 3.1 Cos'è un *qubit*: sovrapposizione ed *entanglement*<sup>22</sup>

Il *bit* rappresenta l'unità fondamentale di informazione su cui si basa ogni sistema di elaborazione classico. La sua importanza risiede nella capacità di rappresentare qualsiasi numero, parola o messaggio attraverso una semplice sequenza di 0 e 1, nota come codifica binaria.

In un calcolatore classico, questo *bit* è rappresentato da una corrente elettrica che può scorrere attraverso un filo o venire bloccata. Al centro di questo processo c'è un *transistor*, un minuscolo dispositivo che agisce come un interruttore controllando se la corrente fluisce o si interrompe. L'interazione di miliardi di questi *transistor* consente di risolvere problemi, elaborare dati e far funzionare l'intero ecosistema digitale in cui viviamo.

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come l'informazione finanziaria venga trattata attraverso modelli classici basati su distribuzioni probabilistiche e correlazioni statistiche tra titoli. Allo stesso modo, il *bit* classico rappresenta la base del calcolo tradizionale. Tuttavia, così come la finanza contemporanea richiede strumenti capaci di gestire complessità e incertezza crescenti, anche l'informatica si è spinta oltre il paradigma binario, aprendo la strada al *bit* quantistico.

Il *bit* quantistico, o *qubit*, è un oggetto molto più sofisticato e potente rispetto al *bit* classico. Mentre quest'ultimo può esistere solo in due stati (0 oppure 1), il *qubit* può trovarsi contemporaneamente in entrambi, grazie al fenomeno noto come sovrapposizione.

Per illustrare questa differenza, si può ricorrere all'analogia della sfera di Bloch<sup>23</sup>: mentre il *bit* classico corrisponde a un punto fisso, identificabile con i poli Nord (0) e Sud (1) di un globo, un *qubit* può essere rappresentato da qualunque punto sulla superficie della sfera, offrendo un'infinità di posizioni intermedie. La posizione scelta determina le probabilità con cui, in seguito ad una misurazione, il *qubit* verrà osservato nello stato 0 oppure nello stato 1.

Ad esempio, un *qubit* situato all'equatore della sfera avrà una probabilità del 50% di essere misurato in 0 e del 50% in 1; un punto più vicino al Polo Nord indicherà una probabilità maggiore di ottenere 0, mentre uno più vicino al Polo Sud renderà più probabile il risultato 1.

---

<sup>22</sup> (Benenti, Casati, & Montangero, 2025)

<sup>23</sup> (Bloch, 1946)

Solo nei poli le osservazioni restituiranno sempre lo stesso valore: 100% di 0 al Polo Nord, 100% di 1 al Polo Sud.

Ciò significa che il risultato di una misura in meccanica quantistica è probabilistico, non sappiamo in anticipo se otterremo 0 oppure 1. Di conseguenza, prima di procedere con la misurazione, occorre tener presente che lo stato del *qubit* non corrisponderà ad un unico valore definito bensì ad una combinazione (sovrapposizione) di entrambi. È la misurazione stessa a forzare il sistema a “collassare” in uno dei due stati possibili.

Questa caratteristica distingue radicalmente il *bit* classico dal *qubit*: nel primo caso, l'informazione esiste già indipendentemente dall'osservatore; nel secondo, il processo di osservazione contribuisce a definire lo stato finale. Il *qubit* opera quindi in un universo di possibilità molto più vasto, dove ogni punto sulla sfera è un potenziale stato dell'informazione. Tale ricchezza, quando si lavora con molti *qubit* contemporaneamente, promette di rivoluzionare il modo in cui affrontiamo il calcolo. Problemi che oggi sfidano i limiti dei più potenti computer classici potranno essere risolti da algoritmi quantistici, capaci di sfruttare il vasto potenziale nascosto in questi minuscoli, ma incredibilmente complessi, mattoni dell'informazione.

La sovrapposizione riguarda i singoli *qubit*, ma il potenziale più innovativo del calcolo quantistico emerge quando più *qubit* interagiscono tra loro. In questo contesto entra in gioco il fenomeno dell'*entanglement* (intreccio quantistico), uno degli aspetti più affascinanti della meccanica quantistica, un mondo in cui le connessioni tra particelle vanno oltre ogni immaginazione e creano possibilità che sfidano ulteriormente la nostra comprensione della realtà.

Per rendere questo concetto più concreto, consideriamo due *bit* classici: i possibili stati che possono assumere sono quattro – 00, 01, 10 e 11 – e, in ogni istante, il sistema si trova in uno di questi stati ben definiti. Con i *qubit*, invece, entriamo in un mondo completamente diverso. Poiché governati dalle leggi della meccanica quantistica, due *qubit* non sono confinati ad uno solo dei quattro stati classici ma, analogamente a quanto accade per il singolo *qubit*, possono esistere in una sovrapposizione di tutti questi stati, come se abbracciassero ogni possibilità simultaneamente.

Questa caratteristica comporta che, una volta *entangled*, i *qubit* si comportino come se fossero intensamente correlati tra loro, anche se separati da grandi distanze: la misurazione di uno

determina istantaneamente lo stato dell'altro, a prescindere dallo spazio che li separa. Tale fenomeno, definito da Einstein come “*spooky action at a distance*” (azione spettrale a distanza), è stato ampiamente verificato sperimentalmente ed è oggi alla base di applicazioni emergenti come la crittografia quantistica, le reti quantistiche e il calcolo quantistico parallelo.

Sul piano finanziario, l'*entanglement* può essere interpretato come un'estensione della correlazione statistica tra titoli, concetto cardine della costruzione della frontiera efficiente (cap.2, par. 2.5). Nei mercati tradizionali, la diversificazione nasce dal combinare titoli non perfettamente correlati tra loro per ridurre il rischio complessivo. In un contesto quantistico, invece, emergono strutture di dipendenza più profonde e complesse rispetto a quelle lineari classiche. Questo apre la strada ad algoritmi capaci di sfruttare tali interdipendenze per ottimizzare i portafogli in maniera più efficiente rispetto ai metodi tradizionali.

### **3.2 Principio di realtà, paradosso EPR e disuguaglianze di Bell**

Le correlazioni quantistiche conducono a conseguenze che sfidano la nostra intuizione e mettono in discussione concetti apparentemente intoccabili della fisica classica. Un esempio emblematico è il celebre paradosso EPR, ideato nel 1935 da Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen<sup>24</sup>. Con questo esperimento mentale, Einstein intendeva dimostrare che la meccanica quantistica fosse incompleta, poiché conduceva a conclusioni incompatibili con il cosiddetto principio di realtà: l'idea che la realtà esista indipendentemente dal fatto che noi la osserviamo.

Se il risultato di una misura può essere previsto con certezza, allora tale risultato deve corrispondere a un elemento di realtà oggettiva, esistente prima della misurazione stessa. Tuttavia, le implicazioni della meccanica quantistica sembrano incompatibili con questa visione. Per Einstein la fisica doveva descrivere un mondo oggettivo e non un gioco di probabilità governato dall'osservatore. Percepiva infatti la meccanica quantistica come incompleta, una strada che offriva risposte pratiche ma non rivelava le verità ultime dell'universo.

A questa interpretazione si oppose l'orientamento di Niels Bohr<sup>25</sup> e dei sostenitori dell'interpretazione di Copenaghen, secondo i quali la realtà a livello microscopico non può

---

<sup>24</sup> (Einstein, Podolsky, & Rosen, 1935)

<sup>25</sup> (Bohr, 1935)

essere descritta in modo oggettivo e indipendente dall'osservazione. La contrapposizione tra queste due visioni ha alimentato un dibattito filosofico e scientifico che ha segnato in maniera profonda lo sviluppo della fisica del XX secolo.

Un passo decisivo verso la risoluzione di tale disputa fu compiuto nel 1964 dal fisico irlandese John Bell, il quale formulò le celebri disuguaglianze che portano il suo cognome<sup>26</sup>. Tali relazioni matematiche permettono di verificare sperimentalmente se la natura obbedisca al principio di realtà o se, al contrario, segua le previsioni della meccanica quantistica. La loro violazione avrebbe significato rinunciare al principio di realtà, rivelando come il mondo microscopico non si comporti secondo le nostre aspettative, portando le particelle *entangled* ad agire in modi che sfidano la logica classica.

Negli anni successivi, esperimenti cruciali – tra cui quelli pionieristici condotti da Alain Aspect negli anni Ottanta – hanno dimostrato inequivocabilmente la violazione delle disuguaglianze di Bell. Tali risultati, confermati in più occasioni e in diversi laboratori, hanno sancito la validità delle previsioni quantistiche: il mondo microscopico non può essere descritto mediante un modello deterministico classico, ma obbedisce a regole intrinsecamente probabilistiche, dove lo stato delle particelle *entangled* è correlato in modo non-classico.

Dal punto di vista finanziario, oltre all'ottimizzazione di portafoglio, le correlazioni quantistiche assumono un significato più ampio. Se nei mercati classici la gestione del rischio si fonda sulle correlazioni statistiche, nella finanza quantistica l'*entanglement* introduce una vera e propria forma di interdipendenza informativa tra strumenti finanziari. Questa struttura arricchita può essere sfruttata non solo per affinare le strategie di diversificazione, ma anche per sviluppare nuovi modelli di *pricing* e valutazione dei derivati, capaci di integrare dinamiche complesse che i modelli classici non riescono a catturare.

### **3.3 Teoria dei giochi e meccanica quantistica**

Nel capitolo precedente abbiamo osservato come la finanza classica si fondi su correlazioni statistiche e sull'ottimizzazione di portafoglio, mentre nel capitolo corrente abbiamo introdotto il ruolo della sovrapposizione e dell'*entanglement* come nuovi strumenti concettuali. Tuttavia, i mercati finanziari non sono costituiti solo da strumenti e distribuzioni di probabilità, ma sono popolati da agenti che interagiscono strategicamente, prendendo decisioni che influenzano

---

<sup>26</sup> (Bell, 1964)

reciprocamente i propri guadagni e perdite. La teoria dei giochi rappresenta il linguaggio matematico per modellare queste interazioni.

A questo punto, è naturale chiedersi cosa accadrebbe se applicassimo i principi della meccanica quantistica alle strategie dei giocatori. È così che nasce la teoria dei giochi quantistica, un campo che estende i concetti classici per includere scenari in cui le scelte strategiche non sono più limitate a mosse definite, ma possono consistere in combinazioni sovrapposte di decisioni, con correlazioni più profonde tra i giocatori.

Un esempio paradigmatico è il dilemma del prigioniero. Nel contesto classico, due sospetti (A e B) devono scegliere se cooperare (restare silenti) o tradire (accusare l'altro); la strategia razionale, ovvero quella in cui i sospetti confessano entrambi, porta all'equilibrio di Nash, che però è sub-ottimale rispetto all'equilibrio di Pareto cooperativo. Nella versione quantistica del gioco, introdotta da Eisert, Wilkens e Lewenstein (1999)<sup>27</sup>, ciascun prigioniero possiede un *qubit entangled* con quello dell'altro. Le loro mosse non sono più semplici decisioni binarie (confessare o tacere), ma trasformazioni quantistiche applicate al proprio *qubit*. Alla fine, la misura degli stati determina l'esito del gioco.

Il risultato sorprendente è che l'*entanglement* modifica radicalmente la struttura strategica:

- se solo uno dei due giocatori adotta strategie quantistiche, può ottenere un vantaggio rispetto all'altro;
- se entrambi utilizzano strategie quantistiche, l'equilibrio di Nash coincide con l'equilibrio di Pareto, eliminando il dilemma classico e consentendo una cooperazione ottimale senza necessità di comunicazione o fiducia reciproca.

Questo esempio mette in luce un principio chiave: la meccanica quantistica non si limita a modificare le regole del gioco, ma può risolvere conflitti apparentemente irrisolvibili nella logica classica. Le correlazioni quantistiche diventano dunque risorse strategiche che trasformano gli scenari competitivi e cooperativi.

Trasposta nel contesto finanziario, la teoria dei giochi quantistica apre prospettive di grande interesse. Le interazioni tra investitori, banche e operatori di mercato possono essere viste come giochi strategici, in cui *payoff*, rischio e cooperazione hanno un ruolo centrale. Applicare

---

<sup>27</sup> (Eisert, Wilkens, & Lewenstein, 1999)

strumenti quantistici a questi modelli significa introdurre nuove forme di correlazione e strategie cooperative che potrebbero migliorare l'efficienza dei mercati, ridurre comportamenti opportunistici e favorire strutture di collaborazione che oggi la teoria classica non è in grado di catturare.

In prospettiva, giochi quantistici multi-agente potrebbero diventare un laboratorio teorico per sviluppare algoritmi destinati ai computer quantistici, capaci di simulare scenari finanziari complessi in cui l'interazione strategica è tanto importante quanto la dinamica dei prezzi e dei portafogli.

### **3.4 Il calcolatore quantistico: principi e algoritmi fondamentali**

Il brillante fisico che, nel 1981, lanciò l'idea della costruzione di un computer quantistico fu Richard Feynman<sup>28</sup>. Oggi, quella che una volta sembrava pura fantascienza, è diventata una delle più grandi sfide scientifiche e tecnologiche del nostro tempo.

Come funziona davvero un calcolatore quantistico? Il principio base resta lo stesso: un calcolatore, sia classico che quantistico, prende un'informazione in ingresso (*input*) e, attraverso un algoritmo<sup>29</sup>, elabora un risultato (*output*). I calcolatori quantistici si distinguono però per la modalità con cui eseguono questa elaborazione.

Per comprendere il significato di questa differenza è utile richiamare il teorema di Gödel<sup>30</sup>, il quale implica che non tutte le affermazioni matematiche possono essere risolte con un algoritmo, ponendo limiti a qualsiasi computer, classico o quantistico che sia. In altre parole, un calcolatore quantistico non può risolvere problemi che sono per loro natura irrisolvibili. Il suo vantaggio consiste dunque nel risolvere alcuni problemi molto più velocemente rispetto ad un calcolatore classico, utilizzando meno risorse in termini di memoria, tempo di calcolo ed energia.

#### **3.4.1 Il parallelismo quantistico**

La proprietà di sovrapposizione dei *qubit* costituisce il fondamento del cosiddetto parallelismo quantistico, dal quale discende gran parte della potenzialità del calcolo quantistico. Nei

---

<sup>28</sup> (Feynman, 1982)

<sup>29</sup> Procedura (sequenza finita di istruzioni) per risolvere un problema specifico.

<sup>30</sup> (Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2025)

computer classici, il parallelismo si ottiene suddividendo un problema complesso in sottoproblemi da assegnare a processori distinti. La scalabilità, tuttavia, rimane vincolata alle risorse fisiche disponibili: per quanto si possano aumentare i processori, non sarà mai possibile eguagliare la crescita esponenziale del numero di combinazioni che certi problemi richiedono di esplorare.

Un esempio paradigmatico è il problema del commesso viaggiatore, in cui un agente deve visitare un insieme di città diverse e ritornare al punto di partenza percorrendo la distanza minima. Il numero di possibili percorsi cresce in maniera fattoriale con il numero di città: con 6 città vi sono 720 possibili itinerari, con 10 città si superano i tre milioni, e con 15 città le configurazioni possibili superano il migliaio di miliardi. Anche un supercalcolatore che impiegasse un processore per ciascun itinerario sarebbe rapidamente sopraffatto dalla crescita combinatoria.

In un calcolatore quantistico, invece, un registro di  $n$  *qubit* può rappresentare contemporaneamente  $2^n$  configurazioni di *input* grazie alla sovrapposizione degli stati. Un'operazione quantistica ben progettata agisce simultaneamente su tutte le configurazioni codificate nel registro, permettendo di esplorare in parallelo spazi di soluzioni che nei computer classici risultano proibitivi. È in questo contesto che il parallelismo quantistico rivela la sua forza, soprattutto nell'ambito di problemi di natura combinatoria e di ottimizzazione, estremamente rilevanti anche nelle applicazioni finanziarie.

Tuttavia, il parallelismo non equivale ad un accesso diretto ed immediato a tutte le soluzioni. Al termine del calcolo, infatti, è necessario misurare lo stato del registro. La misura, in meccanica quantistica, restituisce una sequenza classica di 0 e 1, secondo distribuzioni di probabilità fissate dall'algoritmo. Se ci limitassimo a misurare senza criterio, la gran parte dell'informazione quantistica andrebbe persa. La vera sfida – e il principale progresso della ricerca recente – consiste nello sviluppo di algoritmi quantistici capaci di orchestrare interferenze costruttive sulle soluzioni corrette e distruttive su quelle errate, così da amplificare la probabilità di leggere, al momento della misura, l'esito desiderato. In pratica, il parallelismo quantistico diventa realmente utile solo quando l'algoritmo riesce a convogliare l'ampiezza di probabilità verso le risposte corrette.

Rimane infine un aspetto operativo: la natura probabilistica della misura rende spesso necessaria la ripetizione dell'algoritmo più volte, finché la probabilità di errore diventa

trascurabile. Questa logica non è estranea al contesto finanziario: come nelle simulazioni Monte Carlo<sup>31</sup> si eseguono numerose iterazioni per ridurre l'incertezza e ottenere stime robuste, così negli algoritmi quantistici la ripetizione controllata dell'esperimento consente di consolidare l'affidabilità del risultato.

Nel prosieguo vedremo come questi principi siano concretamente implementati in alcuni algoritmi fondamentali, come quelli di Shor e Grover, e quale rilevanza essi assumano nella risoluzione di problemi complessi legati alla finanza quantitativa.

### 3.4.2 Algoritmi quantistici: Shor e Grover

Per molti anni, dopo la proposta originaria di Richard Feynman, il computer quantistico rimase un'idea affascinante ma solo teorica. Questo fino al 1994, quando Peter Shor pubblicò un algoritmo capace di affrontare un problema apparentemente distante dalla fisica quantistica: la fattorizzazione di numeri interi. L'algoritmo di Shor<sup>32</sup>, eseguibile su un computer quantistico, individua i fattori primi di un numero con un'efficienza impossibile per un calcolatore classico, sfruttando il parallelismo quantistico per valutare simultaneamente un gran numero di *input*. L'idea centrale consiste nel trasformare il problema della fattorizzazione in quello della ricerca del periodo  $r$  di una funzione periodica. Una volta individuato tale periodo, il problema dei fattori primi può essere risolto rapidamente con un computer classico.

Questo risultato ha cambiato la percezione delle potenzialità del calcolo quantistico: un computer con qualche migliaio di *qubit* potrebbe un giorno compromettere i codici crittografici attuali, basati proprio sulla difficoltà della fattorizzazione. Sebbene oggi si sia riusciti a fattorizzare solo numeri piccoli in laboratorio, la prospettiva futura pone serie sfide alla sicurezza delle informazioni, alle quali la meccanica quantistica offre già soluzioni alternative, come vedremo in seguito (cfr. par. 4.2).

Un altro algoritmo fondamentale è quello di Grover<sup>33</sup>, sviluppato nel 1996 da Lov Kumar Grover, pensato per la ricerca di un elemento specifico all'interno di un database senza una struttura definita. Nel caso classico, la ricerca richiede un tempo proporzionale al numero di elementi; grazie al parallelismo quantistico, l'algoritmo di Grover riduce drasticamente questo

---

<sup>31</sup> (IBM, s.d.) (Ricco, 2019)

<sup>32</sup> (Shor, 1994)

<sup>33</sup> (Grover, 1996)

tempo, proporzionandolo alla radice quadrata del numero di elementi. Questo vantaggio aumenta con la dimensione dei dati, rendendo l'algoritmo particolarmente utile nell'era dei *big data*, dove ogni giorno si generano quasi uno *zettabyte*<sup>34</sup> di informazioni.

### 3.5 Requisiti da rispettare e sfide da superare

Negli ultimi anni, i progressi tecnologici hanno permesso di esplorare il mondo microscopico in modi che fino a pochi decenni fa erano impensabili, aprendo la strada alla realizzazione dell'*hardware* necessario per i calcolatori quantistici.

Tuttavia, sussistono requisiti da rispettare e sfide da superare:

1. costruzione dei *qubit* → il *qubit* deve essere idealmente isolato dall'ambiente esterno e possedere caratteristiche ben definite, quali stabilità e riproducibilità. La natura offre un'infinità di atomi identici, ma questi sono estremamente sensibili alle variazioni dell'ambiente circostante. Anche piccole fluttuazioni possono alterare le proprietà di un *qubit* rispetto ad un altro. Dunque, ogni minima imprecisione nella fabbricazione può introdurre errori, compromettendo l'affidabilità dell'intero sistema. Tutti i *qubit* devono quindi funzionare in modo coordinato e privo di errori, nonostante le difficoltà costruttive;
2. inizializzazione del computer quantistico → per garantire che ciascun *qubit* inizi il calcolo nello stato corretto, è necessario ridurre al minimo l'agitazione termica degli atomi, che potrebbe causare transizioni indesiderate verso stati eccitati. Per questo motivo, i computer quantistici vengono raffreddati a temperature prossime allo zero assoluto. Solo in queste condizioni estreme è possibile preparare i *qubit* in uno stato stabile e coerente, pronto per eseguire calcoli complessi;
3. implementazione di un set universale di porte logiche quantistiche che, se concatenate correttamente, permettano di eseguire qualsiasi algoritmo;
4. lettura dei risultati non immediata;
5. protezione dalla decoerenza (par. 3.5.1).

Nonostante la complessità e la serie di requisiti stringenti, i progressi compiuti negli ultimi anni sono stati straordinari e hanno superato ogni aspettativa.

---

<sup>34</sup> Uno *zettabyte* è l'equivalente di un 1 seguito da 21 zeri di *byte*, dove 1 *byte* è formato da 8 *bit*.

### 3.5.1 Decoerenza

Uno dei principali ostacoli allo sviluppo dei calcolatori quantistici è il fenomeno della decoerenza, ossia la perdita di coerenza quantistica del sistema a causa dell'interazione involontaria con l'ambiente esterno (campi elettrici o magnetici, vibrazioni o radiazioni termiche). Quando ciò accade, la sovrapposizione degli stati quantistici può degradarsi, causando errori nell'elaborazione delle informazioni. In altre parole, l'ambiente misura involontariamente il sistema, facendo collassare gli stati sovrapposti prima del momento previsto dall'algoritmo.

La sfida consiste quindi nel manipolare i *qubit* con precisione estrema, coordinando le interazioni e isolando il sistema da ogni interferenza esterna, così da preservare le sovrapposizioni e le correlazioni *entangled* necessarie per l'algoritmo.

Ci si potrebbe domandare quali siano le dimensioni che un oggetto deve possedere per mostrare comportamenti tipicamente quantistici. Esiste un confine tra il mondo quantistico e quello classico oltre il quale le leggi della fisica macroscopica prendono il sopravvento? Esperimenti pionieristici hanno dimostrato che fenomeni quantistici come interferenza ed *entanglement* possono manifestarsi anche in sistemi mesoscopici<sup>35</sup>.

Un calcolatore quantistico rientra esattamente in questa categoria: è un sistema mesoscopico in cui centinaia o migliaia di *qubit* devono essere controllati simultaneamente. Il successo di questi dispositivi dipende dalla capacità di vincere la decoerenza, mantenendo gli stati quantistici coerenti per tempi sufficientemente lunghi da completare algoritmi complessi.

### 3.5.2 Ioni intrappolati

Peter Zoller e il suo giovane collaboratore Ignacio Cirac, alla stessa conferenza internazionale di fisica atomica durante la quale Peter Shor presentò il suo rivoluzionario algoritmo per la fattorizzazione di numeri interi, proposero un'idea destinata a stimolare una competizione globale nella costruzione dei computer quantistici<sup>36</sup>. Tale idea consisteva nell'utilizzare ioni (atomi elettricamente carichi), intrappolandoli all'interno di regioni in cui si crea il vuoto e raffreddandoli a temperature estremamente basse. I due livelli energetici di uno ione,

---

<sup>35</sup> Sistemi composti da un numero di particelle maggiore rispetto ai singoli *qubit*, ma non ancora macroscopici.

<sup>36</sup> (Cirac & Zoller, 1995)

corrispondenti a orbite elettroniche differenti, possono rappresentare i due stati fondamentali di un *qubit*, 0 e 1. La chiave del metodo è che, essendo carichi, gli ioni interagiscono tra loro tramite forze elettrostatiche, generando l'*entanglement*. Tuttavia, la stessa carica fa sì che gli ioni si respingano tra loro. La soluzione consiste nell'utilizzo di campi elettrici generati da elettrodi che costituiscono la trappola e permettono di controllare e manipolare gli ioni.

Gli ioni intrappolati si dispongono in configurazioni ordinate chiamate cristalli di ioni, in cui ogni ione rappresenta un *qubit*. Le porte logiche vengono realizzate tramite impulsi laser opportunamente sequenziati. Grazie all'interazione elettrica tra gli ioni, è possibile eseguire operazioni a due *qubit* e concatenando sequenze di impulsi si possono implementare algoritmi quantistici completi.

Poiché le tecnologie di intrappolamento e raffreddamento degli ioni erano già consolidate, nel 1995 i ricercatori del gruppo di David Wineland al NIST di Boulder riuscirono a realizzare la prima porta logica CNOT<sup>37</sup> con ioni di berillio, segnando un passo fondamentale nella storia del calcolo quantistico<sup>38</sup>.

Da allora, i progressi sono stati straordinari. Molti degli ostacoli ingegneristici iniziali sono stati superati, permettendo la costruzione di prototipi funzionanti. Tuttavia, il numero di *qubit* intrappolabili rimane limitato, così come la sequenza di operazioni possibili prima che la decoerenza comprometta il calcolo.

### 3.5.3 Superconduttori

Quando una corrente elettrica che scorre in un filo incontra una resistenza, il filo si riscalda. Esistono però materiali speciali, detti superconduttori, che al di sotto di una certa temperatura permettono il passaggio della corrente senza alcuna resistenza. In questi materiali, le correnti possono durare indefinitamente e raggiungere intensità elevate.

La superconduttività è dovuta alla formazione delle cosiddette coppie di Cooper. Infatti, quando la temperatura scende al di sotto di un valore critico, gli elettroni si accoppiano e riescono a

---

<sup>37</sup> La porta CNOT (*Controlled-NOT*) è una porta logica quantistica fondamentale che agisce su due *qubit*. Il primo, detto *qubit* di controllo, determina se il secondo, detto *qubit* bersaglio, subisce un'inversione del suo stato. Questa operazione è essenziale per la creazione di stati *entangled* e per la realizzazione di algoritmi quantistici complessi.

<sup>38</sup> (Monroe, Meekhof, King, Itano, & Wineland, 1995)

muoversi attraverso il materiale senza incontrare resistenza, rendendo possibile il fenomeno della superconduttività.

Nei computer quantistici basati sui superconduttori, questa proprietà viene sfruttata per creare *qubit* artificiali. Alcune sezioni dei circuiti, note come *Cooper Pair Boxes*, possono ospitare coppie di Cooper in modo controllato: la presenza o l'assenza di una coppia all'interno della scatola definisce lo stato del *qubit*. Attraverso impulsi elettrici e circuiti appositamente progettati, è possibile preparare, manipolare e leggere questi *qubit*, creando sovrapposizioni ed *entanglement* necessari per il calcolo quantistico.

Attualmente, molte grandi aziende stanno investendo in questa tecnologia. Un esempio significativo è il chip Sycamore<sup>39</sup>, composto da 53 *qubit*, che nel 2019 ha permesso a Google di annunciare il raggiungimento della cosiddetta supremazia quantistica, eseguendo un calcolo impossibile per i supercomputer classici. Parallelamente, IBM ha sviluppato una piattaforma completa per la ricerca e la didattica, consentendo a università e ricercatori di programmare algoritmi quantistici tramite il *cloud*.

Nonostante le promettenti prospettive, i computer quantistici a superconduttori devono ancora affrontare sfide significative. La più evidente è la necessità di mantenere temperature estremamente basse, che rende improbabile l'uso domestico e richiede infrastrutture complesse e costose. Questo vincolo aumenta la difficoltà ingegneristica e limita la scalabilità, ovvero l'aumento del numero di *qubit* operativi. Tuttavia, le aziende sono ottimiste: prevedono di raggiungere nei prossimi anni sistemi con migliaia di *qubit*, aprendo la strada a una rivoluzione quantistica che potrebbe entrare nella vita quotidiana molto prima di quanto si immagina.

### 3.5.4 Atomi di Rydberg

Concludiamo questa panoramica sulle diverse architetture per i computer quantistici parlando dei *qubit* a base di atomi neutri. In questo approccio, gli atomi non possiedono carica elettrica e vengono portati in stati di eccitazione estremi, generando i cosiddetti atomi di Rydberg, dal nome del fisico svedese Johannes Rydberg, che studiò il comportamento degli elettroni quando si trovano su orbite molto lontane dal nucleo<sup>40</sup>.

---

<sup>39</sup> (Google Research, 2019)

<sup>40</sup> (Gallagher, 1994)

La particolarità degli atomi di Rydberg è la loro dimensione: mentre un tipico atomo misura l'ordine di un nanometro (un milionesimo di millimetro), un atomo di Rydberg raggiunge l'ordine del micron (un millesimo di millimetro), diventando quindi circa mille volte più grande. Pur essendo più grandi, questi atomi conservano tutte le proprietà necessarie per il calcolo quantistico, risultando più facili da manipolare e controllare. Per esempio, possono essere intrappolati e spostati con grande precisione grazie a strumenti noti come pinzette ottiche. La tecnica è così precisa che in alcuni laboratori è stato possibile disporre gli atomi come se fossero *pixel*, formando figure riconoscibili.

I sistemi basati sugli atomi di Rydberg si stanno rivelando all'avanguardia anche in un'altra applicazione cruciale della fisica quantistica: le simulazioni quantistiche, che permettono di studiare sistemi complessi che sarebbero irraggiungibili con i metodi tradizionali.

### **3.5.5 Simulazioni quantistiche**

La maggior parte dei fenomeni scientifici, sociali ed economici sono intrinsecamente complessi e la loro evoluzione nel tempo è difficile da prevedere. I calcoli necessari per anticiparne il comportamento richiedono strumenti raffinati e computer potenti. Anche i supercomputer, però, dipendono da algoritmi specifici e, in molti casi, i tempi di calcolo diventano talmente lunghi da superare le capacità dei sistemi più avanzati.

In alcune situazioni, è possibile creare un simulatore del sistema di interesse e osservare il suo comportamento in un ambiente controllato. L'idea di sviluppare simulatori trova applicazione anche nel mondo quantistico.

Nel 2020, usando simulatori basati su atomi di Rydberg, è stato ottenuto uno stato *entangled* di venti *qubit*, una pietra miliare nella corsa alla creazione di grandi sovrapposizioni quantistiche. Questi risultati segnano l'inizio di una nuova era, in cui la capacità di generare stati quantistici sempre più complessi sarà fondamentale per realizzare calcoli avanzati e, infine, dimostrare la supremazia quantistica: la chiara superiorità dei computer quantistici rispetto a quelli classici.

### 3.6 Stato attuale della tecnologia: panorama internazionale e italiano<sup>41</sup>

Il *quantum computing*, pur essendo ancora in una fase sperimentale, ha ormai assunto un ruolo centrale nelle strategie scientifiche e industriali a livello globale, coinvolgendo istituzioni di ricerca, aziende e governi.

I principali attori internazionali degli Stati Uniti – tra cui IBM, Google, Microsoft e Amazon Web Services – stanno già rendendo disponibili processori quantistici attraverso piattaforme *cloud*, permettendo a ricercatori e imprese di sperimentare algoritmi quantistici reali. Un esempio significativo è il recente *chip* “Ocelot” di AWS<sup>42</sup>, progettato per migliorare la correzione degli errori e ridurre i costi di produzione dei *qubit*, fattori cruciali per la scalabilità della tecnologia.

L’Europa promuove programmi coordinati come la *Quantum Flagship* della Commissione Europea<sup>43</sup>, pensati per rafforzare la filiera industriale e favorire collaborazioni tra università e imprese.

In questo contesto, gli investimenti nazionali mostrano un impegno crescente: la Germania ha previsto circa 2,65 miliardi di euro di investimenti entro il 2030, mentre la Francia ha allocato 1,8 miliardi nello stesso orizzonte temporale. In Italia il percorso è più recente, ma non privo di iniziative significative. Nel febbraio 2025 il Ministero dell’Istruzione e del Merito ha avviato una consultazione pubblica per definire la strategia nazionale sul *quantum computing*, con l’obiettivo di tracciare linee guida e priorità di sviluppo. Parallelamente, il programma *Quantum Italia*, promosso da *Scientifica Venture Capital* insieme a *Unitary Fund*, punta a sostenere *startup* e ricercatori locali, favorendo la crescita di un ecosistema digitale nazionale e il rientro di competenze dall’estero. Secondo l’Osservatorio del Politecnico di Milano, nel triennio 2022-2025 l’Italia ha stanziato circa 320 milioni di euro, una cifra inferiore rispetto a Germania e Francia, ma che rappresenta comunque un segnale di consolidamento della direzione intrapresa.

Un ulteriore tassello è costituito dal progetto *Quid*, parte del programma europeo *EuroQCI*, che mira a sviluppare una rete nazionale di comunicazione basata sulla crittografia quantistica.

---

<sup>41</sup> (Villa, 2025) (Carnelos, 2024)

<sup>42</sup> (Chen, 2025)

<sup>43</sup> (Quantum Flagship, s.d.)

L'obiettivo è quello di garantire comunicazioni sicure e resilienti, elemento strategico anche per le applicazioni nei mercati finanziari, dove la protezione dei dati rappresenta una condizione imprescindibile.

A livello industriale, aziende come ENI e Leonardo stanno già sperimentando applicazioni concrete, in collaborazione con *player* internazionali, che spaziano dalla modellizzazione molecolare alla simulazione di scenari complessi. Questi casi dimostrano come il *quantum computing* non riguardi un singolo settore ma offra potenzialità trasversali. La capacità di esplorare simultaneamente spazi di soluzioni enormi apre prospettive rivoluzionarie, richiedendo nuove architetture algoritmiche e un approccio interdisciplinare che coinvolga fisici, informatici, matematici ed economisti.

La corsa al *quantum computing* si configura quindi come una sfida multilivello. Gli esperimenti di laboratorio si stanno gradualmente trasformando in prototipi accessibili e le nazioni competono per garantirsi i vantaggi strategici offerti da queste tecnologie. Anche l'Italia sta consolidando competenze e infrastrutture, con l'obiettivo di ritagliarsi un ruolo significativo in questo panorama internazionale.

## Capitolo 4 – *Quantum Finance*: applicazioni e prospettive

### Premessa

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto sia le basi teoriche del calcolo quantistico (cap. 3) – dalle proprietà dei *qubit* alla loro implementazione fisica – sia i principi fondamentali della moderna teoria del portafoglio e la loro applicazione (cap. 1 e cap. 2). Questo doppio percorso è servito a chiarire, da un lato, perché il *quantum computing* rappresenti un paradigma computazionale radicalmente nuovo e, dall'altro, quali siano i problemi tipici della finanza quantitativa che richiedono strumenti più potenti: ottimizzazione di portafogli complessi, gestione del rischio in scenari estremi, valutazione di derivati strutturati, sicurezza dei dati e delle transazioni.

Il presente capitolo prende le mosse da queste premesse per analizzare come il calcolo quantistico stia già iniziando a entrare nei mercati finanziari e quali prospettive apra per i prossimi anni.

Nei paragrafi 4.1 e 4.2 vengono illustrati i principali ambiti applicativi – ottimizzazione, gestione del rischio, *pricing*, finanza predittiva – e la sfida che il *quantum* pone ai sistemi di sicurezza e vigilanza. La sezione conclusiva (par. 4.3) traccia invece un bilancio dei benefici e dei limiti attuali, delineando il quadro entro cui la *quantum finance* può passare dalla fase esplorativa a quella operativa.

In questo senso, il capitolo non è soltanto un elenco di applicazioni ma una riflessione integrata su opportunità e rischi. Come nella gestione di portafoglio, dove il rendimento atteso va sempre ponderato rispetto al rischio, così anche nella finanza quantistica il potenziale di velocità, scalabilità e accuratezza deve essere valutato insieme alle barriere tecnologiche, organizzative e regolamentari.

### 4.1 Applicazioni potenziali

Dopo aver analizzato nei capitoli precedenti le basi teoriche del *quantum computing* (cap. 3) e i concetti fondamentali della moderna teoria di portafoglio e del rischio (cap. 1 e cap. 2),

possiamo ora delineare come questa nuova tecnologia possa incidere su problemi finanziari ad alta complessità<sup>44</sup>.

Il tratto comune alle applicazioni emergenti è l'impiego di *workflow* ibridi, ossia procedure che combinano calcolo classico e calcolo quantistico. Nella pratica, gli algoritmi quantistici vengono usati come acceleratori specializzati per compiti particolarmente onerosi (ricerca combinatoria, stime probabilistiche o campionamento di distribuzioni molto complesse), mentre le fasi di preparazione dei dati, la validazione dei risultati e l'integrazione dei vincoli operativi rimangono affidate ai modelli tradizionali. Questo approccio riflette correttamente lo stato attuale dell'*hardware* quantistico (parr. 3.5 e 3.6), che consente già sperimentazioni concrete pur non essendo ancora un sostituto universale dei sistemi classici.

Nei paragrafi che seguono analizzeremo tre sfere applicative di maggiore rilievo:

1. ottimizzazione di portafoglio;
2. gestione del rischio e *pricing* dei derivati;
3. *quantum machine learning* e finanza predittiva.

#### **4.1.1 Ottimizzazione di portafoglio**

Uno degli ambiti più naturali per l'applicazione del calcolo quantistico è l'ottimizzazione di portafoglio. Nel quadro classico di Markowitz, come già discusso nel paragrafo 1.3.2, la costruzione di portafogli efficienti implica il dover risolvere un problema di programmazione quadratica vincolata, in cui il *trade-off* tra rendimento atteso e rischio è governato dalla matrice di varianze-covarianze  $S$  dei titoli. All'aumentare del numero di strumenti finanziari e dei vincoli pratici, tale problema cresce in modo combinatorio: le possibili allocazioni diventano esponenzialmente numerose e i metodi tradizionali devono ricorrere ad approssimazioni o euristiche.

Gli algoritmi quantistici possono affrontare questi scenari in modo diverso. Un esempio è il *Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)*<sup>45</sup>, che rappresenta lo spazio delle possibili combinazioni di *asset* mediante stati quantistici in sovrapposizione e cerca la soluzione ottimale sfruttando le proprietà dell'*entanglement*. In termini intuitivi, è come se il calcolatore

---

<sup>44</sup> (Rivista.AI, 2025) (Cybermag, 2024)

<sup>45</sup> (Farhi, 2014)

quantistico esplorasse simultaneamente numerose configurazioni del portafoglio, invece di valutarle una per volta, come invece avviene in un algoritmo classico.

Per comprendere come avvenga questa traduzione, è utile introdurre il concetto di Hamiltoniano. In meccanica quantistica l'Hamiltoniano è l'operatore che descrive l'energia totale del sistema; in un algoritmo di ottimizzazione quantistica diventa una funzione di costo codificata come energia, che il sistema tenderà a minimizzare. Nel caso della selezione di portafoglio (par. 1.3.2) possiamo definire un Hamiltoniano di costo come<sup>46</sup>:

$$C(z) = \lambda z^T S z - (1 - \lambda) \mu^T z + \text{penalità}(z)$$

dove:

- $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]$  è il vettore binario che indica se l'*asset*  $i$  è incluso ( $z_i = 1$ ) o escluso ( $z_i = 0$ ) dal portafoglio;
- $S$  è la matrice di covarianza dei rendimenti, che misura il rischio complessivo e le correlazioni fra *asset*;
- $\mu$  è il vettore dei rendimenti attesi;
- $\lambda \in [0,1]$  è il parametro che pondera l'importanza relativa del rischio rispetto al rendimento atteso;
- $\text{penalità}(z)$  incorpora i vincoli pratici (limiti di concentrazione, requisiti di liquidità, vincoli ESG...).

Ogni configurazione del portafoglio corrisponde ad un livello di energia dell'Hamiltoniano. Lo stato fondamentale (energia minima) rappresenta la combinazione di *asset* che massimizza il compromesso rischio-rendimento dato  $\lambda$ . L'algoritmo *QAOA* prepara inizialmente una sovrapposizione di tutti i possibili portafogli, applica sequenze di operazioni basate su questo Hamiltoniano e guida lo stato quantistico verso il minimo. Alla fine, la misura dei *qubit* fornisce con probabilità elevata le configurazioni più vicine alla soluzione ottimale.

In termini figurativi, è come avere una mappa tridimensionale del rischio-rendimento di tutte le possibili allocazioni, in cui ciascun punto rappresenta una specifica combinazione di portafoglio. Un calcolatore classico deve analizzare ogni regione separatamente per valutarne le caratteristiche, mentre il calcolatore quantistico può considerare simultaneamente l'intero

---

<sup>46</sup> (QuAir Group, 2023)

paesaggio e tende naturalmente a identificare la soluzione ottimale. Questo approccio può ridurre i tempi di calcolo per portafogli molto ampi o con vincoli complessi, offrendo una stima più rapida e accurata della frontiera efficiente (parr. 1.3.2 e 2.5), anche in presenza di correlazioni non lineari tra gli *asset*.

Un esempio concreto è 1QBit, *startup* canadese pioniera nello sviluppo di algoritmi quantistici per l'ottimizzazione dei portafogli finanziari. L'azienda ha applicato tecniche come il *QAOA* e il *quantum annealing*<sup>47</sup> all'ottimizzazione dei portafogli, collaborando con istituzioni come NatWest e Dow Chemical, e ha creato la piattaforma 1Qloud per rendere accessibili questi strumenti avanzati.

#### 4.1.2 Gestione del rischio e *pricing* dei derivati

Una seconda applicazione riguarda la misurazione e la gestione del rischio, nonché il *pricing* di strumenti derivati. In questo contesto, l'obiettivo non è tanto individuare un portafoglio ottimale, come nel modello di Markowitz, quanto stimare con precisione l'esposizione a scenari avversi e valutare contratti complessi la cui dinamica dipende da molte variabili.

Due indicatori ampiamente utilizzati in finanza sono:

- *Value at Risk (VaR)* → misura la perdita massima attesa su un portafoglio entro un determinato orizzonte temporale e ad un certo livello di confidenza (“con probabilità 99% la perdita non supererà  $x$ ”);
- *Expected Shortfall (ES)*, o *Conditional Value at Risk (CVaR)* → rappresenta la perdita media condizionata al superamento del *VaR*, fornendo una stima dell'intensità degli eventi estremi e risultando più sensibile ai rischi *tail* rispetto al *VaR*.

Come discusso nel paragrafo 1.1.4, è utile distinguere tra rischio sistematico e specifico. Strumenti come *VaR* ed *ES* servono a quantificare l'esposizione alle code della distribuzione dei rendimenti, tenendo conto anche di correlazioni dinamiche tra *asset* (par. 2.3).

---

<sup>47</sup> Il *quantum annealing* (ricottura quantistica) è una tecnica di calcolo quantistico utilizzata per risolvere problemi di ottimizzazione, trovando il minimo globale di una funzione complessa. Si basa sull'esplorazione dello spazio delle soluzioni attraverso il comportamento quantistico di un sistema, che tende naturalmente a raggiungere il suo stato di minima energia, corrispondente alla soluzione ottimale del problema.

La stima di queste grandezze richiede tradizionalmente simulazioni Monte Carlo. In questo approccio, si generano  $M$  scenari  $x_i$  equiprobabili e si calcola il payoff  $f_{x_i}$  (ad esempio il valore di un derivato) per stimare il valore atteso

$$R_f = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_{x_i}$$

L'errore standard di questa stima decresce come  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . Per derivati complessi  $M$  può diventare molto grande, portando a tempi di calcolo lunghissimi anche su supercomputer.

Gli algoritmi quantistici, in particolare la *Quantum Amplitude Estimation (QAE)*<sup>48</sup>, promettono di cambiare radicalmente questo scenario. *QAE* sfrutta stati quantistici in sovrapposizione per rappresentare simultaneamente molti scenari e stima l'ampiezza (cioè la probabilità) associata ad un evento con errore che decresce come  $\frac{1}{M}$  invece che  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . In termini intuitivi, è come passare da una fotocamera che scatta milioni di foto per ricostruire un'immagine sfocata ad un sensore capace di vedere più *pixel* contemporaneamente.

Questa capacità può accelerare la valutazione delle misure di rischio e il *pricing* di derivati strutturati, strumenti il cui valore dipende dall'andamento di uno o più sottostanti, ossia *asset* finanziari come azioni, obbligazioni, tassi di interesse o materie prime sui quali il derivato è basato. La dipendenza dal percorso temporale dei sottostanti e le correlazioni tra diversi mercati rendono complesse le analisi tradizionali. In prospettiva, l'utilizzo di algoritmi quantistici per la simulazione potrebbe consentire *stress test* più realistici e frequenti, migliorando la gestione sia del rischio sistematico sia di quello specifico e rafforzando la resilienza delle istituzioni finanziarie.

### 4.1.3 *Quantum Machine Learning* e finanza predittiva

Il terzo ambito riguarda l'integrazione tra algoritmi quantistici e tecniche di apprendimento automatico (*machine learning*), ormai centrali per l'analisi predittiva in finanza<sup>49</sup>.

Nel capitolo 2 (parr. 2.1 e 2.3) abbiamo visto come l'uso dei dati storici, dei rendimenti logaritmici e delle correlazioni tra titoli sia fondamentale per stimare rischio e rendimento.

---

<sup>48</sup> (Brassard, 2002)

<sup>49</sup> (Schuld & Petruccione, 2018)

Questi dati vengono oggi trattati con reti neurali, alberi decisionali e altre tecniche classiche di *machine learning*, al fine di identificare *pattern* nascosti nei prezzi, nei volumi e in altre variabili di mercato. Eppure, tali modelli soffrono spesso di limiti di scalabilità e incontrano difficoltà nel rappresentare strutture di dipendenza complesse o altamente non lineari.

Il *quantum machine learning (QML)* apre nuove possibilità: i *qubit* possono codificare in sovrapposizione spazi di caratteristiche ad altissima dimensione e manipolarli in parallelo<sup>50</sup>.

Tra gli strumenti principali troviamo i *Variational Quantum Circuits (VQC)*, cioè circuiti quantistici parametrici in cui le rotazioni dei *qubit* dipendono da parametri che possono essere addestrati, proprio come i pesi di una rete neurale<sup>51</sup>. L'addestramento è ibrido: un ottimizzatore classico calcola come modificare questi parametri per minimizzare l'errore di previsione del modello, mentre il circuito quantistico elabora i dati. In questo modo, si combinano la potenza dei calcoli quantistici con l'efficienza degli algoritmi di ottimizzazione classici.

Un altro approccio fondamentale sono i *quantum kernel*, che sono funzioni progettate per trasformare i dati in spazi di caratteristiche molto più ricchi di quelli classici. In pratica, un *quantum kernel* calcola quanto due osservazioni siano simili in uno spazio generato da un circuito quantistico, sfruttando le proprietà della sovrapposizione e dell'*entanglement*. Questo è simile ai *kernel* usati negli *SVM* classici<sup>52</sup>, ma con una differenza chiave: grazie alla natura quantistica, questi spazi possono avere dimensioni esponenzialmente più grandi, permettendo di catturare *pattern* nei dati che sarebbero difficili o impossibili da rilevare con metodi classici.

In termini intuitivi, se la correlazione classica tra titoli misura l'inclinazione di una strada, i *kernel* quantistici forniscono una mappa tridimensionale del paesaggio, evidenziando percorsi e relazioni altrimenti invisibili con strumenti tradizionali. Questo permette, ad esempio, di classificare eventi rari come *default* o *crash* improvvisi in grandi *dataset* finanziari, prevedere movimenti di prezzo in contesti di elevata incertezza e costruire segnali di *trading* o indicatori di rischio in spazi informativi molto più ampi di quelli gestibili con tecniche convenzionali.

---

<sup>50</sup> (Havlíček, 2019)

<sup>51</sup> Una rete neurale è un modello computazionale composto da unità (neuroni artificiali) organizzate in strati, che elaborano dati in ingresso tramite pesi e funzioni di attivazione per produrre un output, imparando dai dati stessi attraverso un processo di addestramento.

<sup>52</sup> Gli *SVM (Support Vector Machine)* classici sono algoritmi di apprendimento supervisionato che cercano l'iperpiano ottimale per separare dati di classi diverse, utilizzando eventualmente *kernel* per gestire dati non linearmente separabili.

Questo approccio ibrido (preparazione e validazione dei dati in ambiente classico, calcolo del nucleo o del circuito in ambiente quantistico) è coerente con lo stato attuale dell'*hardware* descritto nel capitolo 3: dispositivi *NISQ*<sup>53</sup> che, pur non essendo ancora universali, possono già funzionare come acceleratori specializzati su compiti particolarmente onerosi.

## 4.2 Sicurezza e crittografia: la sfida per il sistema finanziario

L'arrivo del calcolo quantistico non apre soltanto nuove possibilità per l'ottimizzazione, la simulazione o l'analisi predittiva, ma costituisce anche una minaccia diretta ai meccanismi di sicurezza digitale su cui poggia l'intera infrastruttura finanziaria. Se nei capitoli 1 e 2 abbiamo visto come la diversificazione riduca l'esposizione al rischio sistematico, qui l'analogia è con la "diversificazione" dei protocolli di sicurezza: occorre rafforzarli prima che un nuovo tipo di rischio, quello computazionale quantistico, possa materializzarsi.

### 4.2.1 La minaccia quantistica alla crittografia

La maggior parte dei protocolli crittografici oggi in uso si fonda su problemi matematici ritenuti intrattabili per i computer classici, come la fattorizzazione di numeri molto grandi o il calcolo del logaritmo discreto. La robustezza di questi algoritmi si basa sulla cosiddetta complessità computazionale: il tempo necessario per risolverli cresce in modo esponenziale con la dimensione del problema.

Gli algoritmi quantistici cambiano radicalmente questo scenario. In particolare, l'algoritmo di Shor (par. 3.4.2) permette di fattorizzare grandi numeri primi in tempo polinomiale su un computer quantistico sufficientemente potente. Se applicato a chiavi RSA standard, ciò consentirebbe di ricavare la chiave privata a partire da quella pubblica, compromettendo la riservatezza delle comunicazioni bancarie, delle transazioni e dei dati dei clienti. Allo stesso modo, protocolli basati su logaritmi discreti o curve ellittiche verrebbero resi vulnerabili.

Questa minaccia non è teorica: sebbene i computer quantistici universali su larga scala non siano ancora disponibili, la migrazione verso nuove tecnologie richiede tempi lunghi. Da qui

---

<sup>53</sup> I dispositivi *NISQ* (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*) sono computer quantistici con un numero moderato di *qubit*, soggetti a rumore, utilizzabili come acceleratori per compiti specifici prima dell'avvento di computer quantistici universali.

l'urgenza di progettare e adottare algoritmi “*quantum-resistant*” (*post-quantum cryptography*) per proteggere comunicazione, autenticazione e archiviazione di dati sensibili.

#### **4.2.1 Strategie nazionali e internazionali**

La transizione verso un sistema finanziario *quantum-safe* non è solo un problema tecnico, ma anche organizzativo e geopolitico. La Banca d'Italia<sup>54</sup> evidenzia la necessità di standard interoperabili e diffusi, questo perché soluzioni frammentarie o proprietarie rischiano di creare vulnerabilità e incompatibilità, proprio come in un portafoglio troppo concentrato.

La cooperazione internazionale è indispensabile: autorità di vigilanza, operatori finanziari e mondo accademico devono condividere *roadmap* e strumenti per garantire una migrazione ordinata. Un esempio è il *workshop* del G7 “*Building a quantum-safe financial system*”, che ha riunito *policy-maker* e tecnici per discutere rischi, standard e soluzioni comuni.

#### **4.2.2 Ruolo della vigilanza e resilienza del sistema**

Come autorità di vigilanza, la Banca d'Italia raccomanda un approccio prudente ma proattivo, ciò significa non limitarsi ad attendere l'avvento delle minacce quantistiche, ma integrare già oggi misure di resilienza nei sistemi di sicurezza, nelle infrastrutture di pagamento e nei protocolli di gestione del rischio.

Tra le linee guida proposte rientrano:

- mappare le infrastrutture critiche e le dipendenze da protocolli vulnerabili;
- avviare progetti pilota di cifratura *post-quantum* e di distribuzione di chiavi quantistiche;
- aggiornare periodicamente le valutazioni di rischio in funzione dei progressi dell'*hardware* quantistico.

Così come nel capitolo 2 la diversificazione del portafoglio è strumento di stabilità, qui la diversificazione e l'aggiornamento dei protocolli crittografici sono strumenti di resilienza. Prepararsi significa anticipare il *quantum*, non inseguirlo: costruire un sistema finanziario sicuro nel prossimo decennio richiede aggiornamento, cooperazione e capacità di adattamento

---

<sup>54</sup> (Andriani, et al., 2024)

continuo, gli stessi principi che sostengono la solidità dei mercati finanziari di fronte a nuove forme di rischio.

### **4.3 Benefici attesi, limiti tecnologici e barriere all'adozione**

L'analisi condotta nei paragrafi precedenti mostra come il calcolo quantistico non rappresenti soltanto un miglioramento incrementale dei metodi tradizionali, ma un cambiamento strutturale del modo in cui i problemi finanziari possono essere formulati e risolti. Le tre dimensioni del potenziale – velocità, scalabilità e accuratezza – non vanno intese come vantaggi separati ma come aspetti complementari di un unico paradigma.

La velocità non significa soltanto tempi di risposta più brevi, ma la possibilità di esplorare in parallelo spazi di stato vastissimi; la scalabilità consente di integrare più *asset*, più vincoli e più scenari senza che il problema diventi intrattabile; la maggiore accuratezza deriva da stime più stabili e meno rumorose dei parametri di *input* (volatilità, correlazioni, probabilità di *default*) che alimentano i modelli di rischio e valutazione. Combinati in *workflow ibridi* classico-quantistici, questi fattori possono tradursi in vantaggi concreti per la gestione di portafogli complessi, il *pricing* dei derivati e la finanza predittiva, aprendo la strada a strumenti più rapidi, più estesi e più affidabili rispetto agli attuali standard.

Accanto a questi benefici, però, il quadro tracciato nei capitoli 3 e 4 mette in evidenza limiti tecnologici e barriere all'adozione che non possono essere sottovalutati. Gli attuali dispositivi *NISQ* sono ancora fragili: il numero di *qubit* utilizzabili è limitato, i tempi di coerenza sono brevi e gli errori per porta restano elevati. A ciò si aggiungono problemi ingegneristici – criogenia, cablaggi, elettronica di controllo – che rendono costosa la scalabilità e confinano l'*hardware* in pochi centri specializzati, accessibili solo via *cloud*. Esistono poi ostacoli non propriamente tecnici: la scarsità di competenze specialistiche, la necessità di nuovi linguaggi e strumenti *software*, l'incertezza normativa e l'inerzia organizzativa degli intermediari finanziari, che devono valutare rischi operativi e ritorni su investimenti ancora sperimentali. In altre parole, mentre i benefici promessi sono sistemici, le risorse richieste e i rischi di transizione sono significativi e concentrati.

In questo senso, il calcolo quantistico per la finanza si presenta oggi come un orizzonte di possibilità, non come una tecnologia “chiavi in mano”. Il vantaggio quantistico sarà tanto più

credibile quanto più riusciremo a bilanciare l'entusiasmo per le prospettive con una strategia realistica di superamento delle barriere tecniche e organizzative.

Il quadro che emerge è simile a quello discusso nel capitolo 2 per la diversificazione di portafoglio: solo distribuendo e graduando gli investimenti tra progetti, competenze e standard di sicurezza si potrà costruire un ecosistema quantistico robusto. Il vero beneficio, quindi, non è solo nell'accelerazione dei singoli calcoli, ma nella capacità dell'intero sistema finanziario di prepararsi a un'infrastruttura più potente e, al tempo stesso, più resiliente.

## Conclusione

Il lavoro svolto ha permesso di osservare come la teoria classica del portafoglio continui a rappresentare un riferimento fondamentale per la gestione degli investimenti ma, al tempo stesso, riveli limiti significativi quando messa alla prova dai mercati reali e dalle sfide computazionali contemporanee.

Dal punto di vista empirico, l'analisi condotta ha confermato la validità del principio di diversificazione, pur mostrando che correlazioni positive e vincoli operativi riducono la portata ottimizzante del modello media-varianza. La frontiera efficiente resta uno strumento utile per visualizzare le scelte razionali dell'investitore, ma non esaurisce la complessità delle dinamiche di mercato, che richiedono flessibilità interpretativa e un'attenta considerazione dei vincoli pratici.

Sul piano teorico e prospettico, l'apertura al calcolo quantistico ha mostrato come la finanza stia progressivamente entrando in un terreno nuovo. Fenomeni come *entanglement* e sovrapposizione offrono strumenti matematici e computazionali capaci di affrontare problemi di ottimizzazione che il calcolo classico non riesce a gestire in tempi ragionevoli. Si tratta di un cambio di paradigma ancora agli inizi, ma che già oggi solleva interrogativi importanti non solo su come gestire portafogli più complessi, ma anche su come garantire la sicurezza delle transazioni e ripensare modelli di interazione strategica fra operatori.

Il percorso compiuto mette quindi in evidenza un doppio livello di consapevolezza: da un lato, la robustezza di modelli che, a oltre settant'anni dalla loro formulazione, continuano a guidare la prassi finanziaria; dall'altro, la necessità di guardare oltre, integrando tali modelli con strumenti innovativi in grado di cogliere le sfide di mercati globali, digitalizzati e in continua evoluzione.

Sul lungo periodo, la ricerca dovrà muoversi in due direzioni complementari: migliorare la capacità di adattare i modelli classici ai contesti reali e approfondire il potenziale della *Quantum Finance*, con l'obiettivo di unire rigore teorico, efficacia empirica e potenza computazionale.

## Bibliografia e sitografia

- Andriani, C., Bencivelli, L., Castellucci, A., De Santis, M., Marchetti, S., & Piantanida, G. (2024, Ottobre). La sfida quantistica: implicazioni e strategie per un sistema finanziario sicuro. *Banca d'Italia – Questioni di Economia e Finanza (QEF)*(877).
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique, I*(3), 195-200.
- Benenti, G., Casati, G., & Montangero, S. (2025). *Il computer impossibile. Dal bit al qubit*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
- Black, F. (1972). Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The Journal of Business, XLV*(3), 444-455.
- Bloch, F. (1946). Nuclear Induction. *Physical Review, LXX*(7-8), 460-474.
- Bocchialini, E., Capizzi, V., Chiesi, G. M., Arcuri, M. C., & Monteux, M. (2018). *Scelta e gestione degli investimenti finanziari*. (G. Gandolfi, A cura di) Roma: Bancaria Editrice.
- Bohr, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review, XLVIII*(8), 696-702.
- Borsa Italiana. (s.d.). *FTSE MIB*. Tratto da Borsa Italiana: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/indici/indici-in-continua/dettaglio.html?indexCode=FTSEMIB>
- Brassard, G. (2002). *Quantum Amplitude Amplification and Estimation*. Tratto da <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055>
- Carnelos, M. (2024, Novembre 22). *Quantum Computing: una rivoluzione che investe tutti*. Tratto da MIT Technology Review Italia: <https://www.technologyreview.it/quantum-computing-una-rivoluzione-che-investe-tutti/>
- CFA Institute. (2020). *CFA Program Curriculum Level I* (Vol. VI).
- Chen, S. (2025, Febbraio 27). *Debutta il primo chip di calcolo quantistico di Amazon*. Tratto da MIT Technology Review Italia: <https://www.technologyreview.it/debutta-il-primo-chip-di-calcolo-quantistico-di-amazon/>

- Cirac, J. I., & Zoller, P. (1995). Quantum Computations with Cold Trapped Ions. *Physical Review Letters*, 4091-4094.
- Cybermag. (2024, Giugno 4). *Quantum Computing e le sue Applicazioni nell'Intelligenza Artificiale*. Tratto da <https://cybermag.it/2024/06/04/quantum-computing-e-le-sue-applicazioni-nellintelligenza-artificiale/>
- Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, XLVII(10), 777-780.
- Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999). Quantum Games and Quantum Strategies. *Physical Review Letters*, LXXXIII(15), 3077-3080.
- Farhi, E. (2014). *A Quantum Approximate Optimization Algorithm*. Tratto da <https://arxiv.org/pdf/1411.4028>
- Feynman, R. P. (1982). Simulating Physics with Computers. *International Journal of Theoretical Physics*, XXI(6-7), 467-488.
- Gallagher, T. F. (1994). *Rydberg Atoms*. Cambridge University Press.
- Google Research. (2019, Ottobre 23). Quantum supremacy using a programmable superconducting processor.
- Grover, L. K. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, (p. 212-219).
- Havlíček, V. (2019). Supervised learning with quantum-enhanced feature spaces. *Nature*.
- IBM. (s.d.). *Cos'è la simulazione Monte Carlo?* Tratto da <https://www.ibm.com/it-it/topics/monte-carlo-simulation>
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. New York: Oxford University Press.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, VII(1), 77-91.
- Merton, R. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, VII(4), 1851-1872.

- Moneyfarm. (s.d.). *FTSE MIB*. Tratto da Moneyfarm:  
<https://www.moneyfarm.com/it/glossario-finanza/ftse-mib/>
- Monroe, C., Meekhof, D. M., King, B. E., Itano, W. M., & Wineland, D. J. (1995). Dimostrazione di una porta logica quantistica fondamentale. *Physical Review Letters*, *LXXV*(25), 4714-4717.
- QuAir Group. (2023). *Portfolio Optimization Tutorial*. Tratto da  
[https://www.quair.group/software/pq/tutorials/combinatorial\\_optimization/portfoliooptimization\\_en](https://www.quair.group/software/pq/tutorials/combinatorial_optimization/portfoliooptimization_en)
- Quantum Flagship. (s.d.). *Introduzione al Quantum Flagship*. Tratto da <https://qt.eu/about-quantum-flagship/>
- Ricco, E. (2019, Luglio 15). *I metodi Monte Carlo in finanza*. Tratto da Starting Finance:  
<https://startingfinance.com/approfondimenti/metodi-monte-carlo-finanza/>
- Rivista.AI. (2025, Febbraio 3). *Quantum Computing: È Già Qui, e Ce Ne Stiamo Perdendo Tutti un Pezzo*. Tratto da <https://www.rivista.ai/2025/02/03/quantum-computing-e-gia-qui-e-ce-ne-stiamo-perdendo-tutti-un-pezzo/>
- Schuld, A., & Petruccione, F. (2018). *Supervised Learning with Quantum Computers*. Springer.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, *XIX*(3), 425-442.
- Shor, P. W. (1994). Algoritmi a tempo polinomiale per la fattorizzazione di numeri primi e i logaritmi discreti su un computer quantistico. *Proceedings of the 35th Annual ACM Symposium on Foundations of Computer Science*, (p. 124-134). Santa Fe, New Mexico.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2025). *Gödel's Incompleteness Theorems*. Tratto da <https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/>
- Villa, E. (2025, Febbraio 28). *Quantum Computing: cos'è, perché è rivoluzionario e a che punto siamo in Italia*. Tratto da <https://www.economyup.it/innovazione/quantum-computing-cose-perche-e-rivoluzionario-e-a-che-punto-siamo-in-italia/>