

LUISS 

Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

**Teorie e metodi di immunizzazione finanziaria per
la gestione del rischio di tasso**

Prof.ssa Paola Fersini

RELATORE

Federico Papa

CANDIDATO

Anno Accademico 2024/2025

A mio nonno Carlo

Indice

Introduzione	3
Capitolo 1: Concetti di base	
1.1 I titoli obbligazionari.....	5
1.2 I titoli di stato ZCB e CB.....	8
1.3 Calcolo del prezzo di un titolo.....	10
1.4 La curva dei rendimenti.....	12
1.5 Il TIR e il rischio di tasso di interesse.....	15
1.6 Il rischio di credito.....	18
Capitolo 2: Gli indicatori di rischio temporale	
2.1 Introduzione agli indicatori di rischio temporali.....	20
2.2 La <i>duration</i> di Macaulay.....	22
2.3 La <i>duration</i> modificata: <i>volatility</i>	26
2.4 La <i>convexity</i>	32
2.5 La duration come “epoca ottima di smobilizzo”	37
Capitolo 3: L’immunizzazione finanziaria	
3.1 L’immunizzazione finanziaria di stampo classico.....	41
3.2 Il teorema di Fisher e Weil.....	46
3.3 Le implicazioni del teorema di Fisher e Weil.....	50
3.4 Il teorema di Redington.....	54
3.5 Teorema generale dell’immunizzazione.....	57
3.6 L’immunizzazione per <i>shift</i> qualsiasi.....	62
3.7 L’immunizzazione a minimo rischio di Fong e Vasicek.....	63
Conclusione	67
Bibliografia	68

Introduzione

La gestione del rischio di tasso di interesse rappresenta oggi un tema centrale nella finanza, in particolare per gli operatori che detengono portafogli di investimenti. Anche variazioni apparentemente modeste dei rendimenti di mercato possono produrre oscillazioni di prezzo significative, incidendo in modo diretto sul valore di portafoglio e sulla performance complessiva di investitori istituzionali e privati. Comprendere a fondo la relazione tra prezzo e tasso di interesse non è quindi un esercizio puramente teorico, ma un'esigenza pratica per costruire strategie di investimento e di copertura più consapevoli. In quest'ottica, l'elaborato si colloca come un'indagine approfondita sugli strumenti quantitativi che permettono di misurare e gestire tale sensibilità, ponendo particolare enfasi sul ruolo della *duration* e della *convexity* e sulle loro applicazioni alle tecniche di immunizzazione.

L'elaborato si apre con un'analisi dei fondamenti della valutazione obbligazionaria, chiarendo la determinazione del prezzo di un titolo, la struttura a termine dei tassi e la definizione di rendimento effettivo. Questo passaggio è propedeutico a identificare le principali fonti di rischio che gravano su un investitore: il rischio di realizzo, legato alla possibilità che il titolo debba essere liquidato prima della scadenza, e il rischio di reinvestimento, legato all'incertezza circa il tasso a cui potranno essere reinvestite le cedole intermedie. Stabilire questi concetti di base consente di motivare la necessità di strumenti capaci di riassumere in un unico parametro la sensibilità del prezzo alle variazioni dei tassi di interesse.

A questo scopo, nel secondo capitolo viene introdotta la *duration* di Macaulay, che rappresenta il baricentro temporale dei flussi di cassa e si rivela una misura di primaria importanza per stimare la variazione di prezzo di un'obbligazione a fronte di piccoli spostamenti dei rendimenti. Nel regime discreto, la *duration* viene opportunamente trasformata nella cosiddetta *duration modificata (volatility)* per ottenere una relazione diretta con la variazione percentuale del prezzo rispetto a uno spostamento del tasso. L'analisi è poi arricchita dall'introduzione della *convexity*, che consente di affinare l'approssimazione lineare offerta dalla sola *duration*, rendendo l'espressione più accurata anche per variazioni di tasso di maggiore ampiezza.

Il cuore del lavoro è tuttavia rappresentato dal terzo capitolo, che sviluppa in modo organico il tema dell'immunizzazione. Dopo aver discusso il modello classico, si passa all'immunizzazione di Fisher & Weil, in grado di tenere conto di variazioni non uniformi della

curva dei rendimenti, e a quella di Redington, che aggiunge condizioni di convessità per rendere la protezione più robusta. L'analisi si estende alle generalizzazioni che permettono di coprire *shift* di forma arbitraria, con un riferimento particolare al modello di Fong & Vasicek, il quale rappresenta una soluzione in ottica di minimizzazione della varianza.

Il principale contributo di questo lavoro consiste nel mettere in relazione i concetti fondamentali della valutazione obbligazionaria con le metodologie di immunizzazione, traducendoli in applicazioni concrete su titoli di Stato italiani, con l'obiettivo di offrire un quadro metodologico al tempo stesso rigoroso e operativo, utile per stimare con precisione le variazioni di prezzo e per progettare strategie di copertura efficaci.

Capitolo 1: Concetti di base

1.1 I titoli obbligazionari

In ambito finanziario, le esigenze di approvvigionamento di capitale da parte di imprese o istituzioni pubbliche rappresentano una costante. Quando l'entità del fabbisogno risulta elevata, rivolgersi a un unico creditore non è solo difficile, ma spesso anche inefficiente e poco conveniente. Da qui nasce la necessità di forme di finanziamento più articolate e diffuse¹.

Proprio per questo, in tale situazione, si fa ricorso a un prestito obbligazionario, con il vantaggio di poter suddividere l'importo del finanziamento in tanti piccoli lotti destinati a diverse controparti.

Come già accennato, le obbligazioni (*bond*) possono essere emesse dallo Stato Sovrano, prendendo il nome di obbligazioni governative, dalle istituzioni finanziarie, con l'appellativo di obbligazioni bancarie, ovvero da società private, note come obbligazioni corporate².

Ai fini di questo elaborato ci concentreremo prevalentemente sui titoli obbligazionari emessi dallo Stato.

Tra le varie tipologie di titoli obbligazionari che lo Stato emette troviamo, in ordine di durata³:

- I BOT (Buoni Ordinari del Tesoro)
- I CTZ (Certificati del Tesoro Zero Coupon)
- I CCT (Certificati di Credito del Tesoro)
- I BTP (Buoni del Tesoro Poliennali)

L'emissione dei bond, in Italia, avviene sul mercato primario MTS (Mercato Telematico dei Titoli di Stato), dove le obbligazioni vengono collocate tramite un meccanismo d'asta.

¹ Le motivazioni economiche che spingono imprese e governi a ricorrere al finanziamento obbligazionario, piuttosto che a prestiti tradizionali, sono approfondite in: Brealey, R.A., Myers, S.C. and Allen, F., 2022. *Principles of Corporate Finance*. 14th ed. New York: McGraw-Hill. Si veda in particolare il capitolo 15 "How Corporations Issue Securities".

² Il seguente riepilogo delle tipologie principali di emittenti obbligazionari si basa su: Investopedia, 2006. *Who Are the Key Players in the Bond Market?* [online] Available at: <https://www.investopedia.com/ask/answers/06/keyplayersbondmarket.asp> [Accessed 20 Aug. 2025].

³ Le caratteristiche dettagliate dei Titoli di Stato, tra cui durata, assenza di cedole e modalità di collocamento, sono descritte in: Dipartimento del Tesoro, n.d. *Cosa sono i Titoli di Stato?* [online]. Available at: https://www.dt.mef.gov.it/modules/documenti_it/debito_publico/servizi_cittadino/COSA_SONO_I_TITOLI_DI_STATO.pdf [Accessed 20 Aug. 2025].

Non è difficile intuire che la partecipazione a questa fase d'asta sia riservata solo a intermediari autorizzati, tra i quali le banche, che talvolta operano per conto dei loro clienti.

Nel momento in cui un titolo obbligazionario viene collocato sul mercato primario, il creditore prende il nome di sottoscrittore, mentre il debitore, ad esempio lo Stato, viene chiamato emittente.

A questo punto viene spontaneo chiedersi: quali sono le opzioni del sottoscrittore?

Una volta sottoscritto il titolo, il creditore può alternativamente:

- Detenere il titolo fino a scadenza, beneficiando della totalità degli introiti legati al *bond*.
- Rivendere il titolo in un mercato secondario.

I titoli obbligazionari, infatti, dopo la loro emissione e sottoscrizione, possono essere compravenduti sui mercati secondari, accessibili a chiunque, che presentano quotazioni costantemente aggiornate.

Il mercato secondario nel quale vengono scambiati i titoli di Stato è il MOT (Mercato Telematico delle Obbligazioni e dei Titoli di Stato), anche se, per operazioni di importo superiore a 2,5 milioni di euro, bisogna operare nel già citato MTS. Il soggetto che acquista un titolo in un mercato secondario ne diventa portatore.

I mercati secondari si distinguono in due categorie:

- Altamente regolamentati, come nel caso del MOT, in modo da assicurare piena trasparenza delle compravendite e costante liquidità⁴.
- Mercati OTC (*over the counter*), nei quali la liquidità dei titoli non è generalmente garantita a causa della mancanza di quotazioni ufficiali. In questi mercati la compravendita dei titoli avviene per contrattazione bilaterale.

Le obbligazioni sono strumenti finanziari a reddito fisso⁵ che garantiscono al sottoscrittore il rimborso del capitale prestato a scadenze prefissate.

I titoli obbligazionari, a seconda della loro scadenza (*maturity*), sono classificabili in:

- *Bond* a breve termine, con *maturity* inferiore a 18 mesi

⁴ La liquidità è la capacità di un'attività finanziaria di essere trasformata rapidamente in contante, con costi di transazione contenuti e senza influenzarne significativamente il prezzo di mercato.

⁵ Il termine "reddito fisso" indica che l'investitore conosce a priori l'ammontare delle cedole, la frequenza dei pagamenti e il valore nominale rimborsato a scadenza. Questa prevedibilità distingue le obbligazioni dalle azioni.

- *Bond* a medio termine, con *maturity* compresa tra 18 mesi e 10 anni
- *Bond* a lungo termine, con *maturity* superiore a 10 anni

Il rimborso del capitale avviene tramite il pagamento del valore nominale (*face value*) e la corresponsione di cedole, se previste, proporzionate al valore di quest'ultimo.

Il valore nominale è l'importo, fisso o variabile, che l'emittente del titolo rimborsa a scadenza. In alcuni casi, tuttavia, esso può essere distribuito su più scadenze (obbligazioni a rimborso graduale) oppure pagato in una data successiva alla sottoscrizione stabilita dall'emittente (obbligazioni callable⁶).

In base alla presenza o all'assenza di cedole, i titoli obbligazionari si suddividono in:

- *Coupon Bond* (CB), che prevedono il pagamento di cedole intermedie (*coupon*). Tali cedole possono avere un ammontare fisso basato su un tasso di interesse predeterminato in fase di sottoscrizione (cedole a tasso fisso)⁷ oppure variabile, in quanto indicizzate a tassi di interesse che mutano nel tempo (cedole a tasso variabile)⁸.
- *Zero Coupon Bond* (ZCB), quando il rimborso del capitale avviene in un'unica scadenza, mediante il pagamento del valore nominale.

⁶ Le obbligazioni callable sono titoli di debito che danno all'emittente il diritto, ma non l'obbligo, di rimborsare anticipatamente il capitale prima della scadenza prefissata. Questa clausola protegge l'emittente in caso di calo dei tassi d'interesse, ma espone l'investitore al rischio di reinvestimento.

⁷ I titoli a cedola fissa possono essere, a loro volta, classificati come titoli *step-up*, quando l'importo delle cedole cresce, o titoli *step-down*, quando tale importo decresce.

⁸ I titoli indicizzati in modo diretto sono detti *floater*, quelli indicizzati in modo inverso *reverse floater*. In quest'ultimo caso, la crescita del parametro di indicizzazione determina la discesa della cedola. I tassi di riferimento più comuni sono l'Euribor, il tasso BCE o il rendimento di altri titoli di Stato.

1.2 I titoli di Stato ZCB e CB

Come già anticipato, i titoli obbligazionari *Zero Coupon Bond* prevedono il rimborso del capitale investito in un'unica scadenza prestabilita, momento in cui viene corrisposto il valore nominale (*face value*).

In Italia, il governo, attraverso il Dipartimento del Tesoro, emette diverse tipologie di titoli. Le due principali forme di *Zero Coupon Bond* emesse dal governo italiano sono i BOT e i CTZ⁹.

Un *bond* senza cedole, come un BOT, è caratterizzato dai seguenti elementi:

- 1) La data di emissione, generalmente coincidente con l'asta.
- 2) Il prezzo di emissione P_0
- 3) La scadenza, che per i BOT può essere di 3, 6 o 12 mesi, e per questo sono considerati titoli a breve termine.
- 4) Il valore nominale VN , pagato al sottoscrittore (o al portatore se il titolo viene venduto). Di norma, il valore nominale è un multiplo di un importo minimo (taglio), che nei BOT è pari a 1.000 euro.
- 5) Un codice ISIN (International Securities Identification Number), tramite il quale il *bond* viene identificato.

Dal momento che gli ZCB non prevedono il pagamento di cedole, è naturale chiedersi da dove derivi la remunerazione per l'investitore.

Nel caso degli ZCB, la remunerazione corrisponde esattamente alla differenza tra il valore faciale e il prezzo di emissione: $VN - P_0$, dove $VN > P_0$

In particolare, in relazione a tutti i titoli (ZCB e CB), distinguiamo:

- Titoli emessi sotto la pari, quando $P_0 < VN$ (lo scarto è chiamato premio o disaggio)
- Titoli emessi alla pari, quando $P_0 = VN$
- Titoli emessi sopra la pari, quando $P_0 > VN$ (lo scarto è chiamato aggio di emissione)

È facile comprendere che tutti gli ZCB siano titoli emessi sotto la pari (a sconto).

⁹ I CTZ (Certificati del Tesoro Zero Coupon) sono obbligazioni *zero-coupon* strutturate, in quanto non prevedono il pagamento di cedole periodiche ma sono emesse sotto la pari e rimborsate al valore nominale a scadenza. La loro struttura, pur essendo simile a quella dei BOT, si distingue per una durata più lunga (fino a 24 mesi) e per l'emissione a tasso fisso determinato in asta.

In Italia, il governo emette una sola tipologia di obbligazioni a cedola fissa: i BTP (Buoni del Tesoro Poliennali). Questi titoli possono avere *maturity* a 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30 o 50 anni, il che li classifica come titoli a medio-lungo termine.

Si osservi che, al 30 giugno 2025, i Buoni del Tesoro Poliennali rappresentavano il 72,10% del totale dei titoli di Stato italiani in circolazione¹⁰.

Come nel caso dei BOT, i BTP vengono negoziati presso il MOT (o MTS per importi superiori a 2,5 milioni di euro) e il loro valore nominale è, di norma, un multiplo di 1000 euro.

In qualità di *Coupon Bond*, i BTP prevedono il pagamento di un flusso periodico di cedole, il quale, in Italia, avviene con cadenza semestrale.

Rispetto, dunque, agli elementi caratteristici degli ZCB visti nel paragrafo precedente, nei CB introduciamo le cedole (*coupon*).

Indicheremo pertanto con la lettera c le cedole, di importo fisso, pagate semestralmente al sottoscrittore (o all'eventuale portatore) di un BTP.

A scadenza, oltre al rimborso del valore nominale, deve essere aggiunto anche l'ammontare dell'ultimo *coupon*.

A differenza degli ZCB, i BTP possono essere emessi sopra, sotto o alla pari. Nei primi due casi, dal momento che il valore nominale non coincide con l'importo in base al quale sono calcolate le cedole, chiameremo “valore di rimborso” la somma corrisposta a scadenza.

L'importo della cedola c è espresso come percentuale del valore nominale VN , calcolata in base a un tasso cedolare i_c .

In particolare, l'importo della cedola (semestrale) dei BTP è:

$$c = \frac{VNi_c}{2} \quad (\text{Eq. 1.1})$$

Dove VNi_c è l'importo complessivo delle cedole pagate in un anno.

¹⁰ Il dato relativo alla distribuzione percentuale dei titoli di Stato è tratto da: Dipartimento del Tesoro, 2025. Composizione titoli di Stato al 30 giugno 2025. [online]. Available at: https://www.dt.mef.gov.it/it/debito_pubblico/dati_statistici/composizione_titoli_stato/ [Accessed 20 Jul. 2025].

1.3 Calcolo del prezzo di un titolo

Dopo aver introdotto i titoli obbligazionari, spostiamo ora la nostra attenzione su come viene determinato il loro prezzo.

Per rispondere a questa domanda, è fondamentale richiamare il concetto cardine della *Teoria del Valore Temporale del Denaro*¹¹ (*Time value of money*), la quale afferma che “un euro oggi vale più di un euro domani”. Ciò è vero siccome l’euro posseduto oggi ha un potenziale di crescita nel tempo.

Poiché i titoli obbligazionari sono strumenti che generano flussi di cassa futuri, è lecito chiedersi quanto questi flussi valgano oggi.

Introduciamo dunque il concetto di valore attuale (*Present Value*):

$$VA = \frac{M}{(1+i)^t} \quad (\text{Eq. 1.2})^{12}$$

Dove: M , ovvero il montante, è il flusso di cassa futuro che si riceve in data di scadenza o a seguito di un’operazione di disinvestimento.

i , il tasso di sconto (per periodo).

t , il numero di periodi.

In particolare, $(1+i)^t$ è chiamato fattore di attualizzazione e rappresenta il valore attuale di un capitale unitario corrisposto dopo t unità di tempo.

Nel caso dei titoli obbligazionari con cedole, distinguiamo due componenti:

- Il flusso di cassa finale, rappresentato dal pagamento del valore nominale.
- I flussi di cassa intermedi, costituiti dalle cedole.

Il prezzo di un titolo obbligazionario CB è dato dalla somma del valore attuale di tutti i suoi flussi di cassa futuri (cedole e valore nominale).

¹¹ L’idea alla base del valore del denaro nel tempo, secondo cui un euro oggi vale più di un euro domani, è discussa in: Scandolo, G., 2013. *Matematica finanziaria*. Bologna: Amon Edizioni.

¹² La formula di attualizzazione utilizzata per calcolare il valore presente dei flussi futuri è tratta da: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2013. *Elementi di matematica finanziaria*. Milano: Pearson.

$$P = VA_{COUPON BOND} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t} \quad (\text{Eq. 1.3})$$

Dove CF_t è il flusso di cassa (*cash flow*) corrisposto al tempo t .

Poiché i titoli obbligazionari CB prevedono il pagamento di cedole intermedie, il loro prezzo è influenzato anche dalla distanza temporale tra l'ultimo stacco di cedola ed il successivo. In particolare, chiamiamo "rateo di interesse" A_t al tempo t la parte di cedola spettante al venditore.

$$A_t = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} c \quad t \in (t_{n-1}, t_n) \quad (\text{Eq. 1.4})$$

Il rateo di interesse è nullo al momento dello stacco della cedola e cresce linearmente fino all'istante antecedente lo stacco successivo.

Nel caso di un CB, come un BTP, distinguiamo due tipologie di prezzo¹³:

- Prezzo secco: è il prezzo solitamente riportato nei listini, non comprensivo del rateo di interesse A_t . Pur non essendo estremamente accurato, il prezzo secco permette un aumento più regolare del valore di un CB, non essendo esso influenzato dall'avvicinarsi allo stacco delle cedole.
- Prezzo tel-quel¹⁴: è il prezzo effettivo d'acquisto e si ottiene sommando al prezzo secco il rateo di interesse maturato alla data di acquisto.

$$P_t^{tel-quel} = P_t^{secco} + A_t \quad (\text{Eq. 1.5})$$

Si noti che, per determinare se un CB è stato emesso sopra, sotto o alla pari, è corretto confrontare il prezzo secco P_t^{secco} con il valore nominale VN .

Considerando quanto detto in precedenza, risulta facile comprendere che, per obbligazioni del tipo ZCB, come i BOT e i CTZ, il prezzo tel-quel coinciderà con il valore attuale del valore nominale rimborsato a scadenza, poiché non vi sono flussi di cassa intermedi

¹³ I meccanismi di calcolo del rateo di interesse e la distinzione tra prezzo secco e tel-quel sono illustrati in: Scandolo, G., 2013. Matematica finanziaria. Bologna: Amon Edizioni.

¹⁴ Il termine "tel-quel" deriva dal francese e significa "così com'è": nel contesto obbligazionario, include il rateo di interesse maturato.

1.4 La curva dei rendimenti

Immaginiamo ora di voler conoscere i rendimenti dei diversi titoli di debito. In questo caso, consulteremo la curva dei rendimenti¹⁵, la quale mostra la distribuzione dei rendimenti effettivi dei diversi titoli in funzione della loro scadenza.

La curva dei rendimenti può assumere quattro diverse configurazioni principali¹⁶:

- *Normal*, con andamento crescente dei rendimenti all'aumentare della scadenza.
- *Inverted*, nella quale i rendimenti decrescono all'aumentare della scadenza.
- *Humped*, in cui la curva assume un andamento a gobba. In questo caso i rendimenti di medio termine sono maggiori rispetto a quelli di breve e lungo termine.
- *Flat*, quando i rendimenti dei titoli non dipendono dalla *maturity* (scadenza).

È importante ora distinguere due tipologie di tassi: i tassi a pronti e i tassi a termine.

- Il tasso a pronti¹⁷ (o *spot*) è il tasso applicabile a un'operazione che avviene immediatamente o entro un breve periodo.
- Il tasso a termine (o *forward*) è il tasso concordato in data odierna per un'operazione che avrà luogo in epoca futura.

In particolare, i *tassi forward* sono determinati sulla base dei tassi attuali di mercato (*spot*) e delle aspettative sui tassi futuri, e sono utilizzati per due scopi principali:

- Copertura del rischio (*hedging*).
- Speculazione.

La relazione che intercorre tra i tassi di rendimento e le diverse scadenze ha portato allo sviluppo di numerose teorie. Tra queste, le due che hanno ottenuto più successo sono la *Teoria delle Aspettative Pure* e la *Teoria della Preferenza per la Liquidità*.

¹⁵ La forma della curva dei rendimenti è spesso utilizzata come indicatore anticipatore dello stato ciclico dell'economia, ad esempio un'inversione può segnalare una recessione imminente.

¹⁶ Le forme standard della curva dei rendimenti e il loro significato economico sono descritte in: Investopedia, 2025. 'What Is a Yield Curve?', sezione "Types of Yield Curves".

¹⁷ La definizione di tasso a pronti (*spot rate*), applicato a operazioni finanziarie immediate, e il concetto di tasso a termine (*forward rate*), calcolato a partire dai tassi attuali, è ripresa da: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2013. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

In particolare, secondo la *Teoria delle Aspettative Pure*¹⁸, il tasso di rendimento di una operazione di lungo termine è assimilabile alla media dei rendimenti associati ai titoli di breve termine emessi nello stesso arco temporale.

$$f_{t,t+n} = \left(\frac{(1 + s_{t+n})^{t+n}}{(1 + s_t)^t} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (\text{Eq. 1.6})$$

Dove: s_t = tasso *spot* per il periodo t

s_{t+n} = tasso *spot* per il periodo $t + n$

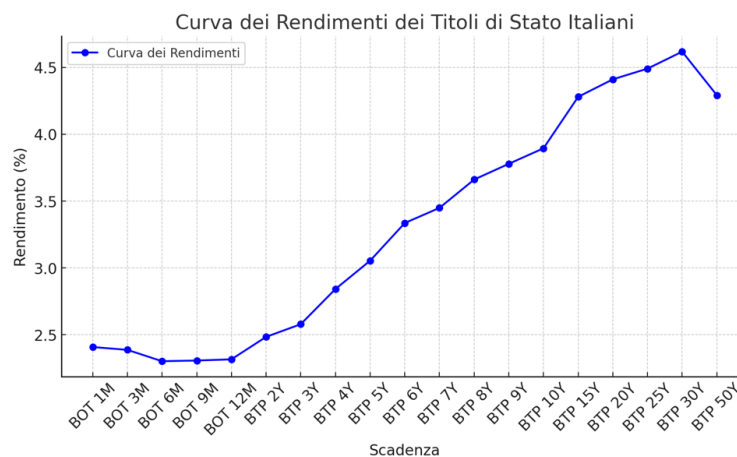
$f_{t,t+n}$ = tasso *forward* tra t e $t + n$

t = periodo iniziale.

n = durata del *forward*.

La *Teoria delle Aspettative Pure*, tuttavia, non spiega la tendenza positiva delle curve dei rendimenti, che spesso presentano un andamento crescente.

Introduciamo, a tal proposito, la *Teoria della Preferenza per la Liquidità*, che si basa sull'idea che gli operatori di mercato richiedano tassi di rendimento più elevati per detenere titoli con maturity più lunga. Questi rendimenti aggiuntivi prendono il nome di “premio per la liquidità”.



Fonte: Elaborazione personale Microsoft Excel¹⁹

¹⁸ La relazione tra rendimenti a diverse scadenze, secondo la teoria delle aspettative pure, è sviluppata nello stesso testo citato in nota n.11 a piè di pagina.

¹⁹ I dati utilizzati per la costruzione del grafico sono stati estratti dalla tabella sui rendimenti dei titoli di Stato italiani visibile sul sito Investing.com, disponibile al seguente link: <https://it.investing.com/rates-bonds/italy-government-bonds>

Il grafico illustra l'andamento dei tassi di rendimento dei titoli di Stato italiani in relazione alla loro scadenza. Si osserva chiaramente una tendenza crescente dei rendimenti all'aumentare della durata del titolo.

Questo scenario è tipico di un contesto economico stabile, in cui gli investitori richiedono un premio aggiuntivo per compensare il maggiore rischio legato agli investimenti a lungo termine.

1.5 Il TIR e il Rischio di Tasso di Interesse

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato della curva dei rendimenti; è dunque naturale chiedersi cosa sia il rendimento di un titolo.

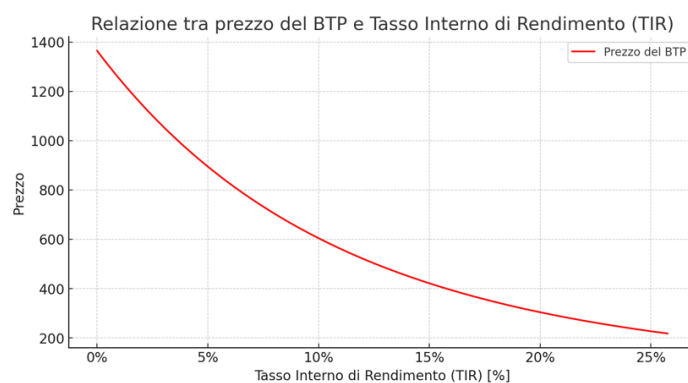
Per quantificare la redditività di un titolo obbligazionario, di norma, si utilizza il Tasso Interno di Rendimento²⁰ (TIR), chiamato in inglese *Internal Rate of Return* (IRR).

Il TIR non è altro che il tasso che rende uguale al prezzo del titolo la somma dei suoi flussi di cassa attualizzati (valore nominale e cedole).

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1 + TIR)^t} + \frac{VN}{(1 + TIR)^t} \quad (\text{Eq. 1.7})$$

In termini matematici, il TIR è l'unico tasso di interesse che annulla, ossia rende pari a zero, la somma dei valori attuali dei flussi di cassa del titolo.

Analizziamo ora come varia il prezzo di un BTP al variare del TIR. Prendiamo ad oggetto il BTP collocato dal MEF il 9 gennaio 2025, con maturity di 10 anni e tasso cedolare annuo del 3,65%, pagato in due cedole semestrali.²¹



Fonte: Elaborazione personale Microsoft Excel

²⁰ Le formule relative al Tasso Interno di Rendimento (TIR), utilizzate per calcolare la redditività di un'obbligazione, sono tratte da: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2013. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

²¹ Fonte: Ministero dell'Economia e delle Finanze (MEF), 2025. Btp a 10 anni e Green: domanda record, richieste per 270 miliardi. [online] Disponibile su: <https://www.mef.gov.it/inevidenza/Btp-a-10-anni-e-Green-domanda-record-richieste-per-270-miliardi/>

Il grafico evidenzia chiaramente la relazione inversa tra il prezzo di un titolo e il suo TIR. Questo fenomeno si verifica perché il rendimento di un titolo, come visto in precedenza, è determinato attualizzando i suoi flussi di cassa futuri.

L'analisi mostra inoltre come il prezzo di un BTP sia particolarmente sensibile alle variazioni dei tassi di mercato, ponendo così le basi per le successive considerazioni di questo elaborato.

È fondamentale ora distinguere due tipologie di tasso di rendimento:

- Il tasso *ex-ante* (TRI), calcolato in fase di sottoscrizione del titolo.
- Il tasso *ex-post*, calcolato a scadenza.

Spesso questi due tassi non coincidono, il che suggerisce che il tasso di rendimento definito in fase di sottoscrizione possa differire dall'effettivo rendimento del titolo osservato a scadenza.

Perché accade questo?

Come già detto in precedenza, non tutti gli elementi di un titolo obbligazionario sono noti con certezza *ex-ante*. I pagamenti intermedi (per titoli a tasso variabile) ed il prezzo di vendita ad un'epoca intermedia sono, infatti, componenti aleatorie di un'obbligazione, essendo influenzati, ad esempio, delle fluttuazioni dei tassi di mercato.

Definiamo "rischio di tasso di interesse" l'eventuale differenza tra il rendimento *ex-ante* e il rendimento *ex-post*.

Negli ZCB, non essendo previsti pagamenti intermedi, l'unica componente aleatoria è, eventualmente, rappresentata dal prezzo di vendita (ossia la quotazione) del titolo.

Nel caso in cui uno ZCB sia detenuto fino a scadenza, rendimento *ex-ante* ed *ex-post* coincidono, non esponendo il sottoscrittore al rischio di tasso di interesse.

Qualora il sottoscrittore (o il portatore) decidesse, invece, di vendere il titolo, il prezzo di quest'ultimo sarà valutato in relazione ai tassi correnti di mercato, i quali, con ogni probabilità, saranno mutati rispetto ai tassi di mercato presenti all'epoca della sottoscrizione. Quanto appena detto viene definito "rischio di realizzo".

Diversamente dagli ZCB, i CB meritano un'analisi più dettagliata, essendo per loro natura caratterizzati da pagamenti intermedi (le cedole).

Il sottoscrittore (o il portatore) di un CB, infatti, è esposto a due tipologie di rischio: il rischio di realizzo, come per gli ZCB, e il rischio di reinvestimento.

In particolare, il rischio di reinvestimento intacca il sottoscrittore di un CB a prescindere dal fatto che esso venda o meno il titolo prima della scadenza.

Dobbiamo infatti considerare che ogni cedola riscossa in epoca intermedia venga reinvestita ai tassi di mercato correnti al momento della riscossione.

È facile intuire che l'unico caso in cui il rendimento *ex-ante* e quello *ex-post* coincidano sia quello in cui tutte le cedole vengano reinvestite al TIR del titolo, situazione altamente improbabile date le costanti oscillazioni dei tassi di mercato.

Ipotizziamo ora un aumento dei tassi di mercato e analizziamone le conseguenze.

\uparrow *Tassi di mercato* \rightarrow \downarrow *Prezzo del titolo*

Il prezzo di un titolo, infatti, coincidendo con l'attualizzazione dei flussi di cassa futuri, diminuirà all'aumentare dei tassi; ciò perché l'attualizzazione sarà effettuata a un tasso maggiore. La diminuzione del prezzo causata dall'aumento dei tassi non è altro che la manifestazione del rischio di realizzo.

Contrariamente a quanto appena detto, il rischio di reinvestimento produce effetto contrario. In particolare, un ipotetico aumento dei tassi aumenterebbe il rendimento delle cedole reinvestite, aumentando di conseguenza il prezzo del titolo.

\uparrow *Tassi di mercato* \rightarrow \uparrow *Prezzo del titolo*

Il rischio di realizzo e il rischio di reinvestimento sono dunque influenzati in modo opposto dalle variazioni dei tassi di mercato, talvolta fino a compensarsi a vicenda.

A tal proposito, saranno in seguito analizzate e approfondite tecniche che permettono la compensazione perfetta di queste due grandezze, annullando così il rischio di tasso di interesse a cui, altrimenti, il creditore sarebbe inevitabilmente esposto.

1.6 Il rischio di credito

I titoli obbligazionari, sebbene garantiscano pagamenti prestabiliti e siano considerati nominalmente certi²², non sono tuttavia completamente privi di rischio.

Concludiamo dunque il primo capitolo dell'elaborato introducendo il concetto di "rischio di credito".










Per quantificare il rischio di credito associato a un titolo obbligazionario si utilizzano generalmente due grandezze:

- La *Probabilità di Default* (PD), ossia la probabilità che l'emittente del titolo possa trovarsi in stato di insolvenza entro la data di scadenza del *bond*.
- La *Loss Given Default* (LGD), ovvero la perdita percentuale, calcolata in relazione al valore nominale, prevista in caso di default dell'emittente. Il valore della LGD dipende principalmente dalla presenza o meno di garanzie associate al titolo.

Ci chiediamo ora: come può un investitore valutare a priori il rischio di credito di un titolo obbligazionario?

A tal proposito esistono le agenzie di rating, che assegnano periodicamente punteggi (*rating*) a società private, enti pubblici e Stati, in base al loro rischio di credito.

In particolare, i punteggi variano dal rating AAA (*tripla A*), assegnato agli emittenti di titoli associati alla più bassa classe di rischio, fino al rating D (*default*).

Nazione	S&Poor's	Moody's	Fitch	Scope
 Italia	BBB	Baa3	BBB	BBB+
 Germania	AAA	Aaa	AAA	AAA
 Francia	AA	Aa2	AA-	AA
 Spagna	A	Baa1	A-	A-
 Portogallo	BBB+	A3	A-	A-
 Stati Uniti d'America	AA+	Aaa	AA+	AA
 Regno Unito	AA	Aa3	AA-	AA
 Giappone	A+	A1	A	A
 Svizzera	AAA	Aaa	AAA	AAA

Fonte: Rating Agenzie, *teleborsa.it* (Apr,2024)

²² Un titolo è considerato nominalmente certo quando il rimborso del capitale e i pagamenti futuri, come le cedole, sono stabiliti contrattualmente al momento dell'emissione e, a meno di circostanze eccezionali, verranno erogati come previsto.

La tabella (aprile, 2024) mostra il rating sovrano di alcuni tra i principali Paesi del mondo assegnato dalle quattro maggiori agenzie di rating: S&P's, Moody's, Fitch e Scope.

Risulta evidente la rischiosità prossima allo zero dei titoli emessi da paesi come la Germania (i *bund*), il Regno Unito (i *gilts*) e gli Stati Uniti d'America (i *treasuries*), caratterizzati da *rating* che non scendono sotto AA.²³

È interessante, infine, citare i *Credit Default Swap (CDS)*²⁴, strumenti finanziari che fungono da assicurazione contro il rischio di credito e che hanno guadagnato crescente popolarità negli ultimi anni. Il detentore di un CDS versa periodicamente un premio a un assicuratore e, in cambio, riceve un pagamento prestabilito in caso di *default* dell'emittente del titolo sottostante. Tale pagamento corrisponde generalmente al valore nominale del titolo.

È importante sottolineare che non è necessario essere possessori dell'obbligazione sottostante per sottoscrivere un CDS, il che lo rende un valido strumento speculativo oltre che di copertura assicurativa.

²³ Il rating del debito sovrano italiano è stato declassato a BBB da Standard & Poor's (S&P) il 13 gennaio 2012, durante la crisi del debito sovrano europeo. Prima di questo declassamento possedeva un rating A.

²⁴ I CDS hanno acquisito notorietà durante la crisi finanziaria del 2008, quando furono coinvolti in numerosi casi di speculazione e instabilità sistemica, in particolare nel fallimento di Lehman Brothers e AIG.

Capitolo 2: Gli indicatori di rischio temporali

Nell'ambito della nostra analisi non è sufficiente valutare un titolo esclusivamente in relazione al suo rendimento. Un aspetto altrettanto rilevante riguarda la collocazione temporale dei suoi flussi di cassa, ovvero il momento in cui l'investitore recupera capitale e interessi.

In merito a questo secondo aspetto, vengono in aiuto gli indicatori di rischio temporali, strumenti che consentono di analizzare in profondità il profilo temporale dell'investimento obbligazionario. Essi permettono di comprendere quando si manifesteranno le entrate associate al titolo, distinguendo tra il recupero del capitale e il pagamento degli interessi. Inoltre, forniscono una misura della sensibilità del prezzo alle variazioni dei tassi di interesse, evidenziando entità e rapidità con cui il valore di mercato dell'obbligazione reagisce a uno *shock* sui tassi. Alcuni di questi indicatori, come la *duration* e *convexity*, aiutano infine a stimare l'impatto di tali variazioni in modo rispettivamente lineare e non lineare, offrendo così un valido supporto alle decisioni di gestione del rischio di tasso e di costruzione di portafogli immunizzati.

2.1 Introduzione agli indicatori di rischio temporali

Osservando un qualunque titolo obbligazionario, la sua scadenza rappresenta il primo e più immediato indicatore temporale. Definiamo *maturity*, indicata con la lettera “*n*“, la naturale scadenza dei *bond*, e calcoliamo come segue la loro vita residua²⁵:

$$\text{Vita Residua} = n - t \quad (\text{Eq. 2.1})$$

Dove: *n* è la *maturity* del titolo.

t rappresenta il tempo trascorso dall'emissione del titolo

²⁵ Formula e concetto di vita residua fanno riferimento al seguente volume: Fabozzi, F. J., Mann, S. V. & Fabozzi, F. A. (2021). *The Handbook of Fixed Income Securities*. 9th ed. New York: McGraw-Hill.

La *maturity*, tuttavia, non tenendo conto di eventuali flussi di cassa intermedi, risulta un indicatore utile solo in relazione a titoli a capitalizzazione integrale²⁶ come gli ZCB.

Introduciamo ora, in ordine di complessità, due ulteriori indicatori. Il primo è la media aritmetica dei tempi²⁷:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n}{n} \quad (\text{Eq. 2.2})^{28}$$

Anche questo indicatore non trova grande applicazione a causa di due principali criticità:

- In primo luogo, non pondera le scadenze con gli importi dei *cash flows*, attribuendo a tutti i flussi, indistintamente, lo stesso peso.
- In secondo luogo, non tiene conto del tasso a cui, via via, i *cash flows* vengono reinvestiti.

Il secondo indicatore, denominato scadenza media aritmetica, risolve la problematica della mancata ponderazione degli importi dei *cash flows* intermedi vista nell'equazione 2.2.

$$\frac{1 \cdot CF_1 + 2 \cdot CF_2 + \dots + (n - 1) \cdot CF_{n-1} + n \cdot CF_n}{CF_1 + CF_2 + \dots + CF_{n-1} + CF_n} = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t}{\sum_{t=1}^n CF_t} \quad (\text{Eq. 2.3})$$

La scadenza media aritmetica, come si osserva nell'equazione 2.3, pondera le scadenze per gli importi delle cedole, restituendo dunque un risultato più utile di quello ottenuto in precedenza. Tuttavia, secondo i principi della logica finanziaria trattati nel primo capitolo, stessi importi disponibili in epoche diverse non hanno lo stesso valore.

A tal proposito, il prossimo paragrafo tratterà della *duration*, e di come tale indicatore riesca a superare le criticità fin qui incontrate.

²⁶ I titoli a capitalizzazione integrale sono titoli che non presentano flussi di cassa intermedi, e che prevedono il rimborso integrale a scadenza.

²⁷ La media aritmetica dei tempi costituisce un indicatore teorico e semplificato, raramente utilizzato nella pratica professionale.

²⁸ Le equazioni 2.2 e 2.3 sono state prese dal seguente volume: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2018. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

2.2 La duration di Macaulay

Il concetto di *duration* fu introdotto negli anni '30 del secolo scorso dall'economista statunitense Frederick Robertson Macaulay²⁹.

Secondo Macaulay, per comprendere le relazioni tra i rendimenti a breve e quelli a lungo termine, risulta necessario disporre di un indicatore in grado di rappresentare la “durata economica” di un titolo, ossia il tempo medio ponderato necessario per il recupero del capitale investito. Tale indicatore sarà definito dall'economista stesso come “*duration*” di un titolo.

Egli osservò che, a parità di tasso di interesse, un *bond* è da considerarsi economicamente più breve quanto più anticipatamente avviene il rimborso del capitale.

Tuttavia, la semplice analisi della *maturity*, sufficiente in relazione agli ZCB, non è in alcun modo esaustiva nel descrivere la reale struttura temporale di un titolo con cedole.

Infatti, in riferimento ai CB, la scadenza contrattuale rappresenta solo uno degli elementi che concorrono a determinarne la *duration*, la quale è anche influenzata dall'entità dei flussi di cassa intermedi e dal tasso di rendimento richiesto dal mercato.

Macaulay propose quindi di interpretare i *cash flows* dei CB come un insieme di operazioni finanziarie distinte, scomponendo, di fatto, i *Coupon Bond* in una serie di “ZCB teorici”³⁰.

In questa prospettiva, un *bond* con cedole può essere assimilato ad una serie di titoli privi di cedola, ognuno con *maturity* pari alla data di ciascun flusso. In particolare, la *duration* rappresenta la media ponderata delle scadenze associate a tali ZCB teorici, dove i pesi della ponderazione sono determinati dal valore attuale di ciascun pagamento, calcolato sulla base del tasso di rendimento effettivo.

La *duration* di Macaulay consente di superare i limiti insiti nell'utilizzo della sola scadenza contrattuale (*maturity*), che non tiene conto della distribuzione temporale dei flussi.

In particolare, essa può essere considerata una misura sintetica che combina:

- La struttura temporale dei pagamenti.
- Il valore finanziario di ciascun pagamento.

²⁹ Fonte: Macaulay, F.R., 1938. *The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. New York: National Bureau of Economic Research.

³⁰ La scomposizione di un titolo cedolare in ZCB teorici rappresenta una tecnica analitica utile per il calcolo della *duration* e la valutazione della sensibilità ai tassi d'interesse.

In presenza di titoli obbligazionari con caratteristiche identiche in termini di scadenza, cedole e rendimento, la *duration* sarà anch'essa coincidente. Tuttavia, non appena uno di questi parametri viene modificato, la *duration* si adatta di conseguenza, assumendo un ruolo centrale nell'analisi della sensibilità dei prezzi obbligazionari rispetto alle variazioni dei tassi d'interesse, come sarà approfondito nei paragrafi successivi.

Procediamo ora ad illustrare la formula matematica della *duration*, anche detta durata media finanziaria, che indicheremo con la lettera D .

$$D(i) = \frac{1 \cdot CF_1 \cdot (1+i)^{-1} + 2 \cdot CF_2 \cdot (1+i)^{-2} + \dots + n \cdot CF_n \cdot (1+i)^{-n}}{CF_1 \cdot (1+i)^{-1} + CF_2 \cdot (1+i)^{-2} + \dots + CF_n \cdot (1+i)^{-n}} \quad (\text{Eq. 2.4})^{31}$$

$$D(i) = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot (1+i)^{-t}}$$

Osservando l'equazione 2.4, è importante precisare che $D(i)$ rappresenta la *duration* espressa in funzione del tasso effettivo di interesse i , il che colloca l'analisi nel regime discreto³², nel quale gli interessi vengono capitalizzati in istanti prefissati ed intervallati.

Al contrario, spostando la nostra attenzione nel regime continuo, ipotizziamo che gli interessi vengano capitalizzati in ogni istante di tempo in modo ininterrotto ad un tasso “ δ ”, che definiamo “tasso istantaneo di interesse”.

In particolare, il tasso istantaneo di interesse³³ misura, in un preciso istante, a che velocità matura l'interesse sul capitale investito. Di seguito la *duration* espressa in funzione di δ :

$$D(\delta) = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}} \quad (\text{Eq. 2.5})$$

³¹ Tutte le formule usate in questo paragrafo fanno riferimento al seguente volume: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2018. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

³² Nel regime discreto la capitalizzazione degli interessi avviene in corrispondenza di istanti prefissati (ad esempio annualmente, semestralmente, trimestralmente), secondo il principio che gli interessi maturati vengono reinvestiti solo in tali momenti. Al contrario, il regime continuo si basa sull'ipotesi che la capitalizzazione degli interessi avvenga in modo istantaneo e ininterrotto, con un flusso continuo di reinvestimento degli interessi maturati. Questa distinzione è fondamentale nella valutazione di strumenti finanziari complessi e nell'analisi di tassi istantanei di interesse, come illustrato in Cresca et al., Elementi di Matematica Finanziaria.

³³ Il tasso istantaneo δ rappresenta la derivata logaritmica del montante rispetto al tempo, fornendo la velocità istantanea di maturazione dell'interesse.

Procediamo ora ad analizzare un caso di applicazione pratica della formula della *duration* tramite l'utilizzo di un foglio di calcolo Excel.

Oggetto dell'analisi sono i seguenti titoli obbligazionari:

- ZCB, *Zero Coupon Bond* con *maturity* a 7 anni.
- CB(1), *Coupon Bond* con *maturity* a 7 anni e tasso cedolare annuo del 5%.
- CB(2), *Coupon Bond* con *maturity* a 7 anni e tasso cedolare annuo del 10%.

Ipotizziamo, infine, che il tasso di mercato sia pari al 5%.

ZCB			CB (1)			CB (2)		
no cedole			Tasso cedolare del 5% (annuo)			Tasso cedolare del 10% (annuo)		
7 anni			7 anni			7 anni		
Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000		
t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow	
0	-710,681		0	-1000		0	-1289,319	
1	0	0	1	50	0,047619048	1	100	0,073866995
2	0	0	2	50	0,090702948	2	100	0,140699037
3	0	0	3	50	0,129575640	3	100	0,200998625
4	0	0	4	50	0,164540495	4	100	0,255236349
5	0	0	5	50	0,195881542	5	100	0,303852796
6	0	0	6	50	0,223864619	6	100	0,347260339
7	1000	7	7	1050	5,223507776	7	1100	4,244293028
DURATION -->			DURATION -->			DURATION -->		
7			6,075692067			5,566207169		

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

Osservando i risultati, ci accorgiamo che lo ZCB è il titolo con *duration* più alta; ciò deriva dal fatto che lo ZCB è l'unico titolo a capitalizzazione integrale (senza cedole), e per questo la *duration* coincide con la sua *maturity*.

Spostando la nostra attenzione sui *Coupon Bond*, notiamo che il CB con tasso cedolare del 5% presenta una *duration* maggiore rispetto al CB con tasso cedolare del 10%. Questo risultato è coerente con la teoria finanziaria: a parità di scadenza e tasso di mercato, un'obbligazione con tasso cedolare più alto presenta una *duration* inferiore. Infatti, nel caso del CB(2), i flussi cedolari sono più elevati e vengono incassati prima rispetto al CB(1), consentendo al sottoscrittore del titolo di rientrare più rapidamente dell'investimento iniziale.

Questo fenomeno è noto come effetto cedola (*coupon effect*)³⁴: a parità di scadenza, un'obbligazione con cedola più elevata risulta generalmente meno volatile, poiché una quota maggiore del valore del titolo è costituita da flussi di cassa che vengono incassati prima della scadenza. Dal punto di vista finanziario, i *cash flows* più lontani nel tempo sono maggiormente influenzati dalle variazioni dei tassi di interesse, in quanto il loro valore attuale subisce un

³⁴ Fonte: Scandolo, G., 2013. Matematica finanziaria. Bologna: Amon Edizioni.

impatto più significativo in fase di attualizzazione. Di conseguenza, titoli con cedole più basse, che concentrano i rimborsi verso la scadenza, risultano più sensibili alle oscillazioni dei tassi rispetto a quelli con cedole elevate, che consentono un recupero anticipato dell'investimento. Nel paragrafo seguente approfondiremo come la *duration* possa essere utilizzata per stimare la sensibilità del prezzo dei titoli a tali oscillazioni (*shift*) dei tassi di interesse, diventando a tutti gli effetti un indicatore di volatilità.

2.3 La duration modificata: volatility

Nel capitolo precedente abbiamo illustrato il metodo di determinazione del prezzo di un titolo, pari alla sommatoria dei suoi *cash flow* (cedole e valore nominale) attualizzati ad un tasso i :

$$P = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot (1+i)^{-t} \quad (\text{Eq. 2.6})$$

Alternativamente, nel continuo, in funzione del tasso istantaneo δ :

$$P = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (\text{Eq. 2.7})$$

Come già ampiamente discusso, un operatore, una volta acquistato un titolo sul mercato, è esposto al rischio che varino i tassi di interesse, dal momento che una variazione di questi ultimi è inversamente correlata al prezzo del titolo (si veda il paragrafo 1.5).

È essenziale individuare, a questo punto, uno strumento che sia in grado di valutare queste oscillazioni di prezzo causate dalle variazioni dei tassi di mercato, che da ora in poi indicheremo come “volatilità del prezzo”, così da supportare le decisioni degli operatori del mercato.

Matematicamente, per valutare la volatilità (o sensibilità) del prezzo a variazioni infinitesime del tasso, calcoliamo la derivata della funzione prezzo rispetto a variazioni del tasso di rendimento³⁵. Iniziamo operando nel continuo, con il tasso che sarà δ :

$$\frac{dP(\delta)}{d\delta} = - \sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (\text{Eq. 2.8})^{36}$$

³⁵ La sensibilità del prezzo di un titolo obbligazionario rispetto a variazioni infinitesime del tasso di interesse viene formalmente rappresentata dalla derivata della funzione prezzo rispetto al tasso di rendimento. Questo approccio matematico consente di misurare la variazione marginale del prezzo in risposta a uno spostamento infinitesimale del tasso, fornendo così una stima locale della sensibilità del titolo al rischio di tasso. In termini geometrici, la derivata corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente alla curva prezzo-tasso in un punto specifico. Tale misura rappresenta il concetto di *duration* nel regime continuo, dove la relazione tra prezzo e tasso è descritta da una funzione continua e derivabile. Questo metodo di analisi si fonda sull'assunzione che, per piccole variazioni dei tassi, la curva prezzo-tasso possa essere approssimata linearmente.

³⁶ Tutte le formule usate in questo paragrafo fanno riferimento al seguente volume: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2018. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

Dividendo ora l'equazione 2.8 per $P(\delta)$ si ottiene la variazione relativa della funzione prezzo rispetto alla variazione del tasso.

$$\frac{dP(\delta)}{P(\delta)} = \frac{-\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}}{P(\delta)} = -\frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}} = -D(\delta) \quad (\text{Eq. 2.9})$$

Il risultato di questa equazione non è altro che la *duration*, espressa in funzione del tasso istantaneo di interesse. Il segno negativo che precede la *duration* trova la sua giustificazione finanziaria nella relazione inversa che intercorre tra prezzo e tassi di interesse.

Il procedimento appena svolto ci mostra chiaramente come la *duration* assuma il ruolo di indicatore di volatilità del prezzo. In particolare:

$$\uparrow \textit{Duration} \rightarrow \uparrow \textit{Volatilità del prezzo} \rightarrow \uparrow \textit{Rischiosità}$$

Questa relazione direttamente proporzionale tra *duration* e volatilità ci conferma che, a parità di ogni altra condizione, più è alta la *duration*, più il titolo è rischioso, in quanto potenzialmente oggetto a forti oscillazioni di prezzo.

Sviluppando la serie di Taylor³⁷ fino al secondo termine, la *duration* può essere utilizzata per stimare la variazione effettiva del prezzo di un titolo conseguentemente ad uno *shift* (variazione) del tasso di interesse da δ a $\delta + \Delta\delta$.

$$P(\delta + \Delta\delta) \cong P(\delta) + \frac{dP(\delta)}{d\delta} \cdot \Delta\delta = P(\delta) - D(\delta) \cdot P(\delta) \cdot \Delta\delta \quad (\text{Eq. 2.10})$$

Dividendo l'equazione 2.10 per $P(\delta)$ osserviamo che la variazione percentuale del prezzo di un titolo è proporzionale allo *shift* del tasso $\Delta\delta$ e al valore della sua *duration* $D(\delta)$:

³⁷ La Serie di Taylor è una funzione polinomiale che approssima una funzione regolare $f(x)$ attorno ad un punto a , usando le derivate della funzione in quel punto.

Sviluppo Serie di Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$

$$\frac{P(\delta + \Delta\delta) - P(\delta)}{P(\delta)} \cong -D(\delta) \cdot \Delta\delta \quad (\text{Eq. 2.11})$$

È doveroso precisare che, passando dal continuo al discreto, la volatilità di un titolo non coincide più perfettamente con la sua *duration*, ma con una misura definita *duration modificata*. Per verificare nel discreto quanto appena detto, procediamo a derivare la funzione prezzo rispetto a variazioni del tasso di rendimento, utilizzando il tasso di interesse i .

$$\frac{dP(i)}{di} = -\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-(t+1)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t} \quad (\text{Eq. 2.12})$$

Anche in questo caso dividiamo per $P(i)$ l'equazione 2.12 al fine di conoscere la variazione relativa della funzione prezzo rispetto alla variazione del tasso di interesse:

$$\frac{\frac{dP(i)}{di}}{P(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot (1+i)^{-t}} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(i) \quad (\text{Eq. 2.13})$$

Nel caso discreto, si osserva chiaramente che la volatilità non coincide esattamente con la *duration*. Per ottenere una corrispondenza tra le due, è infatti necessario dividere la *duration* per il fattore $(1+i)$. In particolare:

$$-\frac{1}{1+i} \cdot D(i) = \textit{volatility} \quad (\text{Eq. 2.14})$$

Dove: $-\frac{D(i)}{1+i}$ è la *duration modificata*.

Utilizzando ora la serie di Taylor per stimare la variazione del prezzo causata da uno *shift* del tasso di interesse, otteniamo:

$$P(i + \Delta i) \cong P(i) + \frac{dP(i)}{di} \cdot \Delta i = P(i) - \frac{D(i)}{1+i} \cdot P(i) \cdot \Delta i \quad (\text{Eq. 2.15})$$

E ancora:

$$\frac{P(i + \Delta i) - P(i)}{P(i)} \cong -\frac{D(i)}{1 + i} \cdot \Delta i \quad (\text{Eq. 2.16})$$

Riprendiamo, al fine di studiare gli effetti di uno *shift* dei tassi di interesse, che ipotizziamo salgano dal 5% al 6%³⁸, i titoli esaminati nel paragrafo 2.2.

In ossequio a quanto detto in precedenza, ci aspettiamo di osservare una relazione positiva tra la *duration* dei titoli e la variazione percentuale dei loro prezzi post-*shift* dei tassi.

ZCB			CB (1)			CB (2)		
no cedole			Tasso cedolare del 5% (annuo)			Tasso cedolare del 10% (annuo)		
7 anni			7 anni			7 anni		
Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000		
t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow	
0	-665,057		0	-944,176		0	-1223,295	
1	0	0	1	50	0,047169811	1	100	0,077119258
2	0	0	2	50	0,088999644	2	100	0,145508034
3	0	0	3	50	0,125942892	3	100	0,205907595
4	0	0	4	50	0,158418733	4	100	0,259003265
5	0	0	5	50	0,186814543	5	100	0,305428378
6	0	0	6	50	0,211488162	6	100	0,345767975
7	1000	7	7	1050	4,888169785	7	1100	4,186184605
DURATION -->		7	DURATION -->		5,707003571	DURATION -->		5,524919111
Prezzo pre-shift (5%)		710,681	Prezzo pre-shift (5%)		1000	Prezzo pre-shift (5%)		1289,319
Prezzo post-shift (6%)		665,0571136	Prezzo post-shift (6%)		944,1761856	Prezzo post-shift (6%)		1223,295
Variazione % del prezzo		-6,42%	Variazione % del prezzo		-5,58%	Variazione % del prezzo		-5,12%

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

Con riferimento ai grafici sopra riportati, la prima valutazione da compiere concerne la variazione dei prezzi dei titoli post-*shift*. Osserviamo come tutti i prezzi siano diminuiti a seguito dell'aumento dei tassi di rendimento, il che conferma la già più volte citata relazione inversa tra i tassi di mercato ed il valore dei *bond*.

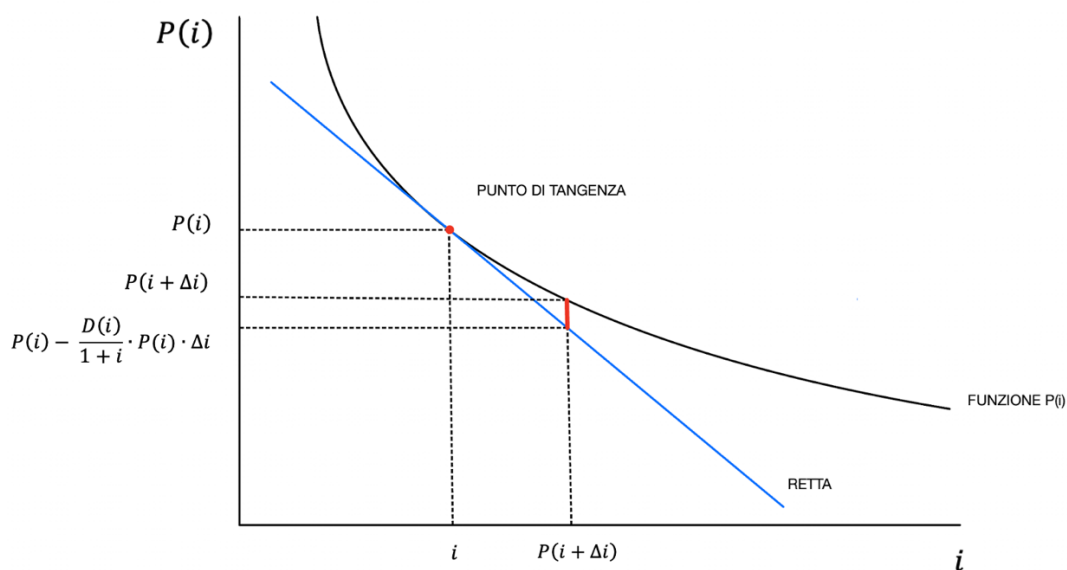
A questo punto ci chiediamo quale tra i tre titoli proposti abbia subito la variazione percentuale del prezzo maggiore. Come atteso, notiamo che lo ZCB è proprio il titolo che ha risentito maggiormente la variazione dei tassi. Lo ZCB è, infatti, il *bond* caratterizzato da *duration* più alta, ed è dunque il titolo con la più elevata sensibilità rispetto agli *shift* dei tassi.

Per completezza, confrontiamo ora la variazione % del prezzo dei due CB.

³⁸ Le simulazioni che valutano l'effetto di uno *shift* nei tassi di interesse sul prezzo dei titoli sono alla base delle strategie di immunizzazione, ovvero tecniche di gestione del rischio di tasso d'interesse volte a garantire la stabilità del valore del portafoglio obbligazionario in presenza di variazioni dei tassi.

Notiamo come, anche in questo caso, venga confermata la regola: maggiore è la *duration* e maggiore è la variazione percentuale del valore del titolo.

Abbiamo visto che, nel regime discreto, la *duration* può essere interpretata come la derivata prima della funzione prezzo rispetto al tasso d'interesse: essa rappresenta dunque il coefficiente angolare della retta tangente alla curva del valore attuale dei flussi in corrispondenza di un dato tasso. Questo consente di effettuare un'approssimazione lineare del prezzo del titolo al variare del rendimento di mercato, utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine.



Fonte: elaborazione personale

Tuttavia, tale approssimazione (segmento rosso del grafico) risulta valida solo in un intorno molto ristretto del punto di tangenza³⁹, poiché non tiene conto della convessità della funzione prezzo. In particolare:

- L'approssimazione peggiora all'aumentare del Δi (*shift*).

³⁹ In analisi matematica, un intorno di un punto è un piccolo intervallo (o insieme di valori) che si estende a destra e a sinistra di tale punto. In questo contesto, per "intorno" del tasso di interesse i si intende un intervallo di valori sufficientemente vicino a i , entro il quale l'approssimazione lineare (basata sulla duration) rimane valida. Se lo shift dei tassi supera tale intervallo, l'errore dell'approssimazione cresce, rendendo necessario includere termini di ordine superiore (come la convexity) nella serie di Taylor.

- L'approssimazione è simmetrica⁴⁰ nei confronti degli *shift*, tendendo a sovrastimare le diminuzioni di prezzo in caso di aumento dei tassi e a sottostimare gli aumenti in caso di riduzioni. Tale simmetria, tuttavia, nella realtà non si manifesta.

La seconda criticità nasce dal fatto che l'approssimazione sfrutta una relazione lineare tra il prezzo del titolo ed il cambiamento dei tassi, non considerando il reale andamento convesso della curva del valore attuale (prezzo) del titolo.

Nella realtà, a causa della convessità della funzione prezzo rispetto ai tassi di interesse, la variazione effettiva di prezzo in seguito ad uno *shift* dei tassi comporta:

- Una perdita di valore inferiore rispetto a quella stimata dalla *duration* in caso di aumento dei tassi di interesse.
- Un guadagno, in termini di valore, superiore a quello stimato dalla *duration* in caso di diminuzione dei tassi di interesse.

Di conseguenza, l'errore di stima tende ad aumentare al crescere dell'ampiezza dello *shift* sulla curva dei tassi, assumendo una relazione simmetrica che in realtà non si verifica.

Per migliorare l'accuratezza dell'approssimazione, è dunque necessario considerare anche il secondo ordine della serie di Taylor, che introduce il concetto di *convexity*, protagonista del seguente paragrafo.

⁴⁰ La simmetria nel contesto delle variazioni di prezzo obbligazionario si riferisce all'ipotesi che un aumento e una diminuzione dei tassi d'interesse di pari entità producano variazioni di prezzo uguali in valore assoluto ma di segno opposto. Tuttavia, nella realtà i prezzi delle obbligazioni reagiscono in modo asimmetrico: a parità di variazione dei tassi, le perdite generate da un aumento dei tassi sono inferiori rispetto ai guadagni prodotti da una loro riduzione. Questa asimmetria deriva dalla convessità positiva della funzione prezzo-tasso, che la sola *duration* – essendo una misura lineare – non è in grado di catturare.

2.4 La convexity

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come, allontanandosi dal punto di tangenza, ad esempio a causa di *shift* dei tassi elevati, i valori stimati tramite la sola *duration* divergono sensibilmente da quelli effettivi. Nei mercati, infatti, la reazione dei titoli alle variazioni dei tassi, come già accennato, non è simmetrica; tuttavia, con la sola *duration*, tale asimmetria non può essere apprezzata. Introduciamo, a tal proposito, il concetto di *convexity*. In particolare:

- La *duration* misura la sensibilità lineare del prezzo dell'obbligazione rispetto agli *shift* dei tassi di interesse.
- La *convexity* (convessità) misura la deviazione dalla linearità, cioè il discostamento effettivo dalla previsione effettuata mediante la sola *duration*.

Al fine di migliorare l'approssimazione illustrata nel paragrafo precedente, procediamo ora ad aggiungere un ulteriore fattore della Serie di Taylor, che tenga conto della *convexity* della funzione valore del titolo.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + f''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2!} + f'''(x_0) \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots \quad (\text{Eq. 2.17})$$

$$f''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2!} = 2^{\text{^}} \text{ termine della serie di Taylor} \quad (\text{Eq. 2.18})$$

L'equazione 2.17 esprime, in termini generali, la serie di Taylor.

In particolare, ci soffermiamo sul secondo termine della serie (Eq. 2.18), che rappresenta la derivata seconda della funzione valore calcolata rispetto a variazioni dei tassi di interesse.

Come nel paragrafo precedente, iniziamo la nostra analisi operando nel continuo.

$$\frac{d^2 P(\delta)}{d\delta^2} = \sum_{t=1}^n t^2 \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (\text{Eq. 2.19})^{41}$$

⁴¹ Tutte le formule usate in questo paragrafo fanno riferimento al seguente volume: Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2018. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson

Dividendo l'equazione 2.19 per $P(\delta)$ si ottiene:

$$\frac{\frac{d^2P(\delta)}{d\delta^2}}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^n t^2 \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^n t^2 \cdot CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot e^{-\delta \cdot t}} = D^2(\delta) \quad (\text{Eq. 2.20})$$

Il coefficiente ottenuto viene definito “*duration di secondo ordine*”, calcolabile come la media quadratica ponderata delle scadenze. Nel continuo, la *duration di secondo ordine* coincide esattamente con la *convexity*, così come la *duration* coincide con la *volatility*.

Sviluppando la serie di Taylor fino al terzo fattore utilizzando la *duration di secondo ordine* otteniamo:

$$P(\delta + \Delta\delta) \cong P(\delta) + \frac{dP(\delta)}{d\delta} \cdot \Delta\delta + \frac{d^2P(\delta)}{d\delta^2} \cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} = \quad (\text{Eq. 2.21})$$

$$= P(\delta) - D(\delta) \cdot P(\delta) \cdot \Delta\delta + D^2(\delta) \cdot P(\delta) \cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} \quad (\text{Eq. 2.24})$$

Rispetto all'equazione 2.10, si aggiunge un ulteriore termine della serie di Taylor, che migliora la stima di $P(\delta + \Delta\delta)$. In questo caso l'approssimazione considera la parabola tangente al punto della funzione del valore attuale del titolo.

Dividiamo l'equazione 2.21 per $P(\delta)$ al fine di calcolare la variazione percentuale del prezzo, la quale risulta essere, come si evince all'equazione 2.22, funzione della *duration* e della *duration di secondo ordine*:

$$\frac{P(\delta + \Delta\delta) - P(\delta)}{P(\delta)} \cong -D(\delta) \cdot \Delta\delta + D^2(\delta) \cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} \quad (\text{Eq. 2.22})$$

La *duration di secondo ordine* corregge le variazioni di prezzo in modo asimmetrico, a differenza di quanto visto nel paragrafo precedente, amplificandole in caso di ribasso e attenuandole in caso di rialzo dei tassi. Questa peculiarità trova spiegazione matematica nel fatto che la *convexity* assume sempre valori positivi.

Verifichiamo ora se le stesse considerazioni si applicano anche nel regime discreto, partendo dall'equazione 2.19 e volgendola rispetto al tasso effettivo i .

$$\begin{aligned} \frac{d^2P(i)}{di^2} &= \sum_{t=1}^n t(t+1) \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-(t+2)} = & \text{(Eq. 2.23)} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{t=1}^n (t+t^2) \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t} \end{aligned}$$

Dividendo per $P(i)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^2P(i)}{di^2}}{P(i)} &= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{\sum_{t=1}^n (t+t^2) \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t}}{P(i)} = & \text{(Eq. 2.24)} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{\sum_{t=1}^n (t+t^2) \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n CF_t \cdot (1+i)^{-t}} = \\ &= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot [D(i) + D^2(i)] = \textit{Convexity} \end{aligned}$$

Notiamo come, anche in questo caso, operando nel discreto non vi è più perfetta coincidenza tra la *convexity* e la *duration di secondo ordine*.

In questo caso, infatti, per ottenere la *convexity* è necessario sommare alla *duration di secondo ordine* la *duration di primo ordine*, e dividere tutto per il fattore $(1+i)^2$.

Estendiamo ora l'approssimazione al terzo termine della serie di Taylor:

$$\begin{aligned} P(i + \Delta i) &\cong P(i) + \frac{dP(i)}{di} \cdot \Delta i + \frac{d^2P(i)}{di^2} \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} = & \text{(Eq. 2.25)} \\ &= P(i) - \frac{D(i)}{1+i} \cdot P(i) \cdot \Delta i + \frac{D(i) + D^2(i)}{(1+i)^2} \cdot P(i) \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} & \text{(Eq. 2.24)} \end{aligned}$$

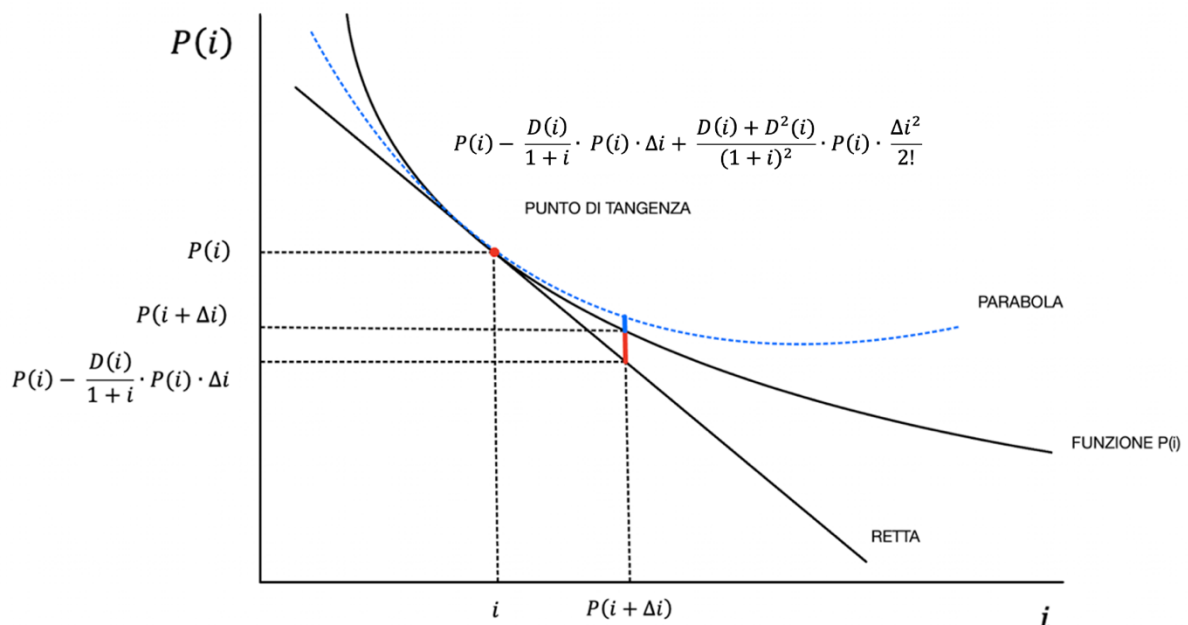
In particolare:

$$P(i + \Delta i) \cong P(i) + Volatility \cdot P(i) \cdot \Delta i + Convexity \cdot P(i) \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} \quad (\text{Eq. 2.26})$$

Infine, la variazione percentuale del prezzo è:

$$\frac{P(i + \Delta i) - P(i)}{P(i)} \cong Volatility \cdot \Delta i + Convexity \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} \quad (\text{Eq. 2.27})$$

Il grafico sottostante evidenzia la differenza tra l'approssimazione lineare (tratto rosso) e quella mediante la parabola (tratto rosso + tratto blu). Per *shift* Δi molto piccoli, la differenza tra le due approssimazioni è trascurabile, consentendo di limitare il calcolo alla sola stima mediante la *duration*. Tuttavia, per variazioni più ampie dei tassi, è necessario aggiungere al calcolo il secondo termine della serie di Taylor. È infatti grazie alla *convexity* che l'approssimazione possa essere ritenuta accettabile in termini di errore.



Fonte: elaborazione personale

Riprendiamo ora, per completezza, lo ZCB e i due CB visti nei paragrafi precedenti, estendendone l'analisi alla convessità, al fine di osservare come quest'ultima influenzi la variazione percentuale del prezzo dei titoli in seguito a *shift* positivi e negativi dei tassi di interesse.

ZCB			CB (1)			CB (2)		
no cedole			Tasso cedolare del 5% (annuo)			Tasso cedolare del 10% (annuo)		
7 anni			7 anni			7 anni		
Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000			Valore Nominale: 1000		
t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow		t (anni)	Cash Flow	
0	-710,681		0	-1000		0	-1289,319	
1	0	0	1	50	0,047169811	1	100	0,073170136
2	0	0	2	50	0,088999644	2	100	0,138056861
3	0	0	3	50	0,125942892	3	100	0,195363482
4	0	0	4	50	0,158418733	4	100	0,245740229
5	0	0	5	50	0,186814543	5	100	0,289788006
6	0	0	6	50	0,211488162	6	100	0,328061894
7	1000	7	7	1050	4,888169785	7	1100	3,971818523
DURATION -->			DURATION -->			DURATION -->		
7			5,707003571			5,241999131		
Prezzo pre-shift (5%)			710,681			Prezzo pre-shift (5%)		
710,681			1000,000			1289,319		
CONVEXITY -->			CONVEXITY -->			CONVEXITY -->		
50,79365079			41,93991453			37,05967412		
Prezzo Shift positivo al 6%			665,0571136			Prezzo Shift positivo al 6%		
665,0571136			944,1761856			1223,295		
Variazione % del prezzo			-6,420%			Variazione % del prezzo		
-6,420%			-5,582%			-5,121%		
Prezzo Shift negativo al 4%			759,9178132			Prezzo Shift negativo al 4%		
759,9178132			1060,020547			1360,12328		
Variazione % del prezzo			6,928%			Variazione % del prezzo		
6,928%			6,002%			5,492%		

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

Osservando la tabella, possiamo notare chiaramente l'effetto non lineare della convessità sulla variazione percentuale del prezzo dei titoli. Analizziamo, ad esempio, cosa succede al *Coupon Bond 1* in seguito ai due *shift* dei tassi (negativo e positivo):

- In caso di *shift* positivo dei tassi (+1%), il prezzo del CB1 passa da 1000€ a 944,176€, registrando una variazione percentuale del -5,582%.
- In caso di *shift* negativo dei tassi (-1%), il prezzo del CB1 passa da 1000€ a 1060,02€, registrando una variazione percentuale del +6,002%.

Mentre la sola *duration* avrebbe stimato una variazione percentuale del prezzo del titolo simmetrica ad entrambe le variazioni, la stima mediante *convexity* ci permette di apprezzare la natura asimmetrica di tale variazione percentuale di prezzo. Inoltre, a riprova di quanto detto precedentemente, la stima tramite *duration di secondo ordine* amplifica la variazione positiva di prezzo in caso di ribasso dei tassi, mentre attenua la variazione negativa di prezzo in caso di rialzo di questi ultimi.

2.5 La duration come “epoca ottima di smobilizzo”

La *duration*, oltre a indicare quanto un titolo obbligazionario sia sensibile alle variazioni dei tassi di interesse, può essere interpretata anche come il momento ottimale per disinvestire, ovvero come “epoca ottima di smobilizzo”. Essa, infatti, rappresenta quel punto nel tempo in cui, in caso di *shift* nei tassi di mercato, l’effetto congiunto delle seguenti due forze, già affrontate nel capitolo precedente (si veda il paragrafo 1.5), si bilancia in modo ottimale:

- da un lato, il reinvestimento dei *cash flows* incassati prima di quel momento.
- dall’altro, l’attualizzazione dei *cash flows* che devono ancora essere incassati.

In altre parole, la *duration* individua l’istante in cui i due principali rischi legati a un investimento obbligazionario, ovvero il rischio di reinvestimento e il rischio di realizzo, si compensano perfettamente. È come se si raggiungesse un punto di equilibrio: qualunque sia stata la direzione dello spostamento dei tassi, il valore di realizzo del titolo in quell’epoca sarà almeno pari (se non superiore) al valore previsto al momento dell’acquisto.

In questa situazione ideale, il rendimento effettivo (*ex-post*) ottenuto vendendo il titolo in corrispondenza della *duration* sarà almeno pari al rendimento atteso inizialmente (*ex-ante*), garantendo così all’investitore una sorta di “protezione” dall’incertezza dell’evoluzione futura dei tassi.

Riprendiamo ora il CB(2) con *maturity* a 7 anni e tasso cedolare annuo del 10% analizzato nei paragrafi precedenti. Al fine di verificare che la *duration* del titolo costituisca l’epoca ottima di smobilizzo dello stesso, ipotizziamo uno *shift* dei tassi di mercato dell’1% in positivo e in negativo, portando questi ultimi rispettivamente al 4% e al 6% (considerando tassi inizialmente al 5%).

Coupon Bond (2)								
t (anni)	Cash Flow		5%		4%		6%	
0	-1289,319		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego	
1	100	0,073866995	124,955	568,041	119,613	553,795	130,482	582,618
2	100	0,140699037	119,005		115,012		123,097	
3	100	0,200998625	113,338		110,589		116,129	
4	100	0,255236349	107,941		106,335		109,556	
5	100	0,303852796	102,801		102,246		103,354	
5,566			Valore di Realizzo		Valore di Realizzo		Valore di Realizzo	
6	100	0,347260339	97,906	1123,585	98,313	1138,162	97,504	1109,338
7	1100	4,244293028	1025,679		1039,849		1011,834	
DURATION -->		5,566207169	VAL DI SMOBILIZZO	1691,626	VAL DI SMOBILIZZO	1691,957	VAL DI SMOBILIZZO	1691,956
			HPR	5,00%	HPR	5,00%	HPR	5,00%

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

Smobilizzando in $t = Duration$, ovvero in epoca $t = 5,566$, il rischio di realizzo e il rischio di reinvestimento si controbilanciano perfettamente.

Quanto appena detto comporta, in caso di *shift* dei tassi:

- Un valore di realizzo sempre maggiore di quello previsto senza oscillazione dei tassi: 1961,956 ; $1961,956 > 1961,626$.
- Un rendimento *ex-post* sempre maggiore o uguale a quello determinato in fase di acquisto.

Quest'ultima caratteristica è riscontrabile nel grafico, osservando il valore assunto dall'HPR (*Holding Period Return*), che rappresenta il rendimento effettivamente realizzato (*ex-post*) da un investimento durante un determinato periodo di detenzione del titolo, che in questo caso coincide con l'epoca $t = Duration$.

Ipotizziamo ora i seguenti scenari:

- Scenario 1: disinvestimento in epoca $t = 5 < Duration$

Coupon Bond (2)									
t (anni)	Cash Flow		5%		4%		6%		
0	-1289,319		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego		
1	100	0,073866995	121,551	552,563	116,986	541,632	126,248	563,709	
2	100	0,140699037	115,763		112,486		119,102		
3	100	0,200998625	110,250		108,160		112,360		
4	100	0,255236349	105,000		104,000		106,000		
5	100	0,303852796	100,000		100,000		100,000		
			Valore di Realizzo		Valore di Realizzo		Valore di Realizzo		
6	100	0,347260339	95,238	1092,971	96,154	1113,166	94,340	1073,336	
7	1100	4,244293028	997,732		1017,012		978,996		
DURATION ->		5,566207169	VAL DI SMOBILIZZO	1645,534	VAL DI SMOBILIZZO	1654,798	VAL DI SMOBILIZZO	1637,045	
			HPR	5,00%	HPR	5,12%	HPR	4,89%	

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

In questo scenario non stiamo più smobilizzando in epoca ottima, ma in un'epoca precedente. Smobilizzando in anticipo, l'effetto realizzo domina sull'effetto reimpiego incidendo maggiormente rispetto al mancato reimpiego delle cedole residue.

Se lo *shift* dei tassi è negativo (dal 5% al 4%):

rendimento ex post (5,12%) > *rendimento ex ante* (5%)

Al contrario, uno *shift* positivo dei tassi (dal 5% al 6%) comporterebbe:

rendimento ex post (4,89%) < *rendimento ex ante* (5%)

- Scenario 2: disinvestimento in epoca $t = 6 > Duration$

Coupon Bond (2)								
t (anni)	Cash Flow		5%		4%		6%	
0	-1289,319		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego		Valore di Reimpiego	
1	100	0,073866995	127,628	680,191	121,665	663,298	133,823	697,532
2	100	0,140699037	121,551		116,986		126,248	
3	100	0,200998625	115,763		112,486		119,102	
4	100	0,255236349	110,250		108,160		112,360	
5	100	0,303852796	105,000		104,000		106,000	
6	100	0,347260339	100,000		100,000		100,000	
			Valore di Realizzo		Valore di Realizzo		Valore di Realizzo	
7	1100	4,244293028	1047,619	1047,619	1057,692	1057,692	1037,736	1037,736
DURATION -->		5,566207169	VAL DI SMOBILIZZO	1727,810	VAL DI SMOBILIZZO	1720,990	VAL DI SMOBILIZZO	1735,268
			HPR	5,00%	HPR	4,93%	HPR	5,08%

Fonte: elaborazione personale Microsoft Excel

Smobilizzando in epoca $t > Duration$, l'effetto reimpiego prevale sull'effetto realizzo.

Se lo *shift* dei tassi è negativo (dal 5% al 4%):

rendimento ex post (4,93%) > *rendimento ex ante* (5%)

Al contrario, uno *shift* positivo dei tassi (dal 5% al 6%) comporterebbe:

rendimento ex post (5,08%) < *rendimento ex ante* (5%)

In conclusione, l'esempio trattato ha dimostrato che, in caso di *shift* parallelo dei tassi di interesse, l'unico modo per assicurarsi che rendimento *ex-ante* ed *ex-post* coincidano è smobilizzare l'investimento in epoca $t = Duration$.

Capitolo 3: L'immunizzazione finanziaria

Il concetto di immunizzazione finanziaria nasce in ambito attuariale, grazie agli studi di Frank M. Redington (1952)⁴², il quale propose una metodologia per garantire l'equilibrio finanziario⁴³ di portafogli contenenti attività (investimenti) e passività (debito) sensibili alle variazioni dei tassi di interesse.

Alla base dei suoi studi vi era l'obiettivo di costruire un portafoglio in grado di preservare il proprio valore anche in relazione a variazioni della struttura dei tassi di interesse, al fine di assicurare che il valore attuale dell'attivo fosse in grado di coprire il valore attuale del passivo in ogni istante di tempo.

La necessità di gestire il rischio derivante dagli *shift* dei tassi risulta ancor più essenziale in contesti nei quali vi è un sostanziale *mismatching* tra le scadenze degli investimenti e quelle relative alle obbligazioni da onorare.

Gli studi di Redington furono oggetto di approfondimento da parte di Fisher e Weil (1971)⁴⁴, i quali ampliarono l'analisi introducendo l'ipotesi di *shift* additivi. Questo approccio consentì di superare il principio di *maturity matching*, che richiedeva la coincidenza delle scadenze di attivo e passivo senza considerare la sensibilità ai tassi.

Negli anni successivi, il concetto di immunizzazione è stato esteso includendo la *convexity* come fattore di rafforzamento dell'immunizzazione e, più recentemente, adattato a contesti caratterizzati da flussi di cassa multipli o incerti, mediante modelli stocastici e scenari non limitati ai soli *shift* paralleli.

Oggi l'immunizzazione finanziaria rappresenta un concetto cardine del *risk management*, trovando particolare applicazione in contesti di intermediazione finanziaria, come nel caso delle banche, le quali sono inevitabilmente esposte ai rischi derivanti da significativi

⁴² Redington, F. M. (1952) Review of the Principles of Life-Office Valuations, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 78

⁴³ L'equilibrio finanziario è la condizione in cui un'impresa o un investitore è in grado di far fronte, in modo puntuale e sostenibile, a tutte le proprie obbligazioni finanziarie utilizzando le risorse disponibili o facilmente reperibili, senza compromettere la continuità operativa o l'efficienza economica. Nel contesto dell'immunizzazione, "equilibrio finanziario" significa che il valore attuale delle attività è uguale o superiore al valore attuale delle passività per il tasso di mercato corrente, così che variazioni dei tassi non compromettano la capacità di onorare gli impegni futuri.

⁴⁴ Fisher, L. & Weil, R. L. (1971) Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies, Journal of Business, vol. 44

disallineamenti tra le scadenze di attività e passività. Una delle funzioni fondamentali di queste ultime, infatti, consiste nella trasformazione delle scadenze, ossia nella raccolta di fondi a breve termine, come i depositi a vista, e nel loro impiego in operazioni di prestito a lungo termine, generalmente caratterizzate da un profilo di rischio più elevato⁴⁵.

In questo capitolo, dopo aver richiamato la definizione classica e i principali teoremi elaborati da Redington e da Fisher & Weil, verranno analizzate le diverse tipologie di immunizzazione e le loro applicazioni, con particolare attenzione alle condizioni necessarie per la protezione effettiva del valore di un portafoglio in scenari di mercato variabili.

3.1 L'immunizzazione finanziaria di stampo classico

Secondo la teoria classica dell'immunizzazione finanziaria, un portafoglio può essere considerato in equilibrio, in un generico istante t , solo se in tale istante il valore attuale dell'attivo è maggiore o uguale al valore attuale del passivo.

Prendiamo ora in analisi un portafoglio di titoli, composto da *cash flows* di natura attiva e passiva. In particolare, definiamo:

- $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ i suoi flussi di cassa positivi.
- $(y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n)$ i suoi flussi di cassa negativi.

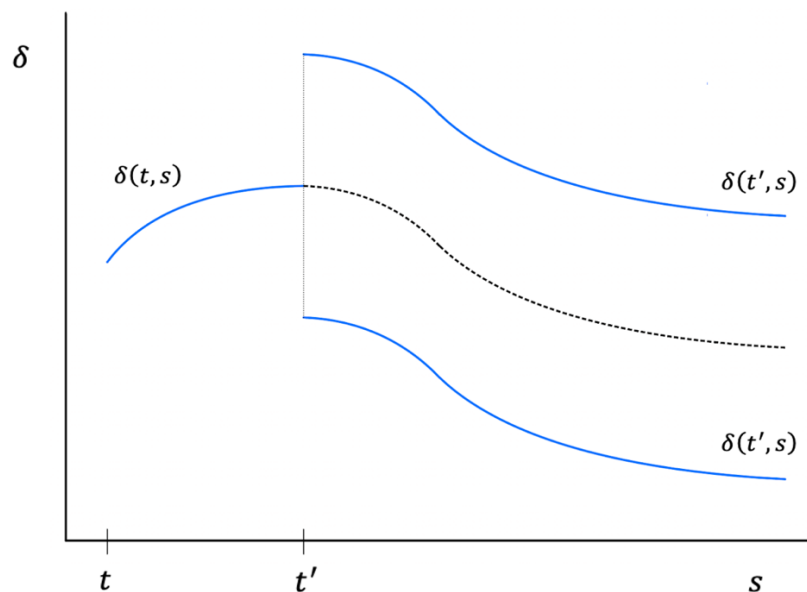
Inoltre, assumiamo che entrambi i flussi si riferiscano allo scadenziario $(t_1 ; t_2 ; \dots ; t_n)$ e valutiamo il portafoglio in un istante $t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

Infine, consideriamo $\delta(t, s)$, tasso istantaneo di interesse al tempo t di un'operazione con scadenza in epoca s , quel tasso che rappresenta la struttura per scadenza dei rendimenti all'epoca t .⁴⁶

⁴⁵ Mishkin, F. S., Eakins, S. G. & Beccalli, E. (2025) Istituzioni e mercati finanziari, 9ª ed., Pearson, Milano.

⁴⁶ L'epoca s rappresenta la scadenza dei flussi considerati misurata a partire dall'istante t .

L'obiettivo dell'analisi è di verificare che l'equilibrio del portafoglio appena descritto sussista anche in seguito a *shift* additivi⁴⁷ (anche detti “paralleli”) della struttura per scadenza dei tassi, che ipotizziamo si verifichi in un istante $t' > t$.



Fonte: elaborazione personale

Dal grafico si osserva che uno *shift* additivo determina una traslazione rigida verticale dell'intera curva dei rendimenti, che può manifestarsi sia verso l'alto sia verso il basso, a seconda del segno della variazione. Tale risultato è in linea con le teorie classiche, le quali prevedono esclusivamente traslazioni parallele (in verticale) della curva.

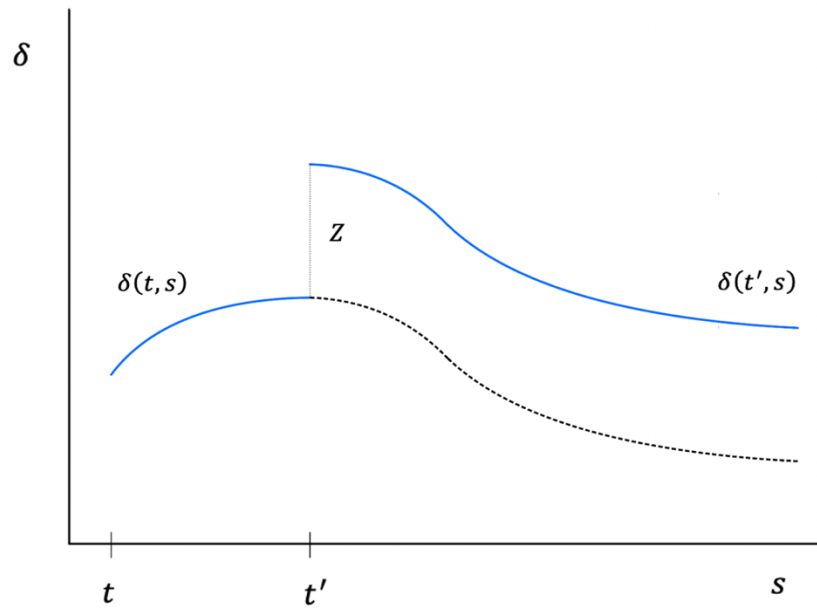
Ipotizziamo ora uno *shift* additivo di ampiezza $Z(t, t')$ tale per cui:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t') \quad (\text{Eq. 3.1})^{48}$$

Il seguente grafico rappresenta la traslazione della curva dei rendimenti causata dallo *shift* di cui all'equazione 3.1:

⁴⁷ Per “*shift* additivo” dei tassi si intende uno spostamento parallelo dell'intera curva dei rendimenti (verso l'alto o verso il basso) dello stesso ammontare per tutte le scadenze

⁴⁸ Le formule utilizzate nel paragrafo fanno riferimento al seguente volume: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991



Fonte: elaborazione personale

Nel grafico, l'indipendenza dello *shift* $Z(t, t')$ dall'epoca s giustifica l'andamento immutato della curva dei rendimenti, la quale ha subito la già discussa traslazione rigida, manifestatasi come uno spostamento verticale di ampiezza "Z".

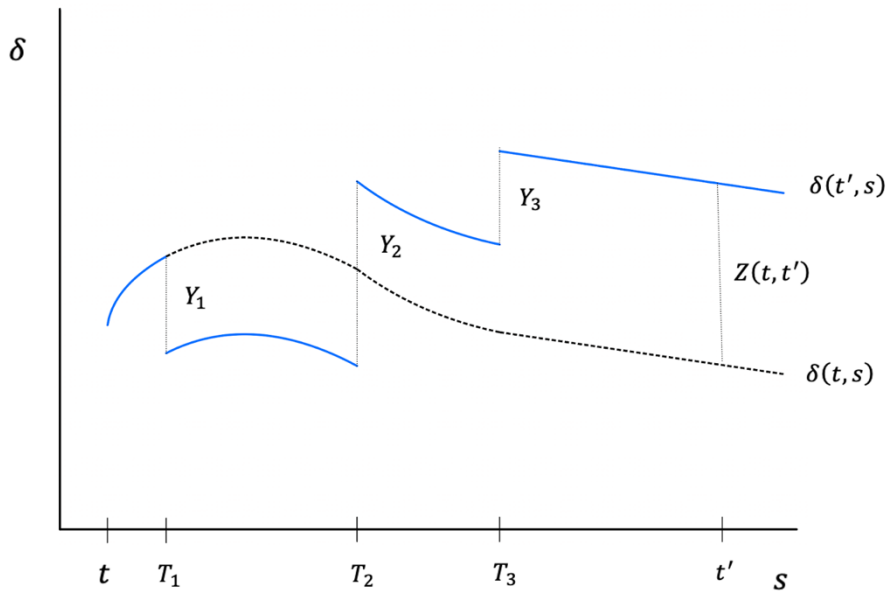
Dal momento che la curva è rimasta inalterata nel suo andamento, tutti i tassi istantanei di interesse riferiti agli istanti compresi tra le epoche t' e s subiscono il medesimo effetto in seguito allo *shift*.

È importante sottolineare che le considerazioni finora espone in merito agli effetti degli *shift* additivi sulla curva dei rendimenti restano valide anche in presenza di ulteriori oscillazioni, eventualmente in numero infinito. In particolare:

$$Z(t, t') = \sum_{n=1}^{N(t, t')} Y_k \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Nell'equazione 3.2, Y_k rappresenta uno *shift* additivo generico che può avvenire in un qualsiasi momento compreso tra le epoche t e t' .

I valori $Y_1; Y_2; \dots; Y_k$ rappresentano le infinite traslazioni della curva dei rendimenti in risposta agli *shift* e la loro sommatoria non è altro che lo scostamento complessivo di quest'ultima, ovvero $Z(t, t')$. Di seguito una rappresentazione grafica:



Fonte: elaborazione personale

Tornando ora al portafoglio di titoli analizzato all'inizio del paragrafo, al fine di applicare quanto visto fino ad ora, ipotizziamo che all'istante t sussista l'equilibrio finanziario, e che dunque sia rispettata la seguente condizione:

$$P(t, x) = P(t, y) \quad (\text{Eq. 3.3})$$

Se all'istante t' ci fosse uno *shift* additivo dei tassi di interesse, il portafoglio continuerebbe ad essere in equilibrio se e solo se:

$$P(t', x) \geq P(t', y) \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Dunque, a riconferma di quanto sostenuto all'inizio del paragrafo, secondo la teoria classica un portafoglio di titoli è considerato "immune" alle variazioni dei tassi di interesse se il valore

attuale post-variazione dei suoi *cash flows* positivi, calcolato al netto del *VA* dei flussi passivi, restituisce un valore non negativo.

Nei paragrafi seguenti analizzeremo le teorie classiche di Fisher & Weil e Redington, le quali indagano su come raggiungere tale immunizzazione.

3.2 Il teorema di Fisher e Weil

Sebbene l'idea di immunizzare un portafoglio contro le variazioni dei tassi di interesse sia nata a seguito degli studi di Frank M. Redington, basati sull'ipotesi di *shift* paralleli della curva dei tassi, tale approccio risultava eccessivamente semplificato. Nella realtà, infatti, le variazioni dei tassi tendono ad interessare in modo differente le varie scadenze, determinando effetti non omogenei sulla curva dei rendimenti.

Al fine di superare tale limitazione, Lawrence Fisher e Roman L. Weil, nel celebre contributo del 1971 intitolato: “*Coping with the risk of interest - rate fluctuations: returns to bondholders from naïve and optimal strategies.*”⁴⁹, hanno proposto una formulazione più articolata ed efficace del concetto di “immunizzazione finanziaria”. In particolare, la loro teoria permette di superare le strategie basate sul semplice *maturity matching*, ponendo al centro dell'analisi la *duration*, che assume, dunque, un ruolo cardine in ottica di gestione del rischio di tasso di interesse.

Fisher e Weil dimostrarono che un portafoglio può essere considerato immunizzato se, al termine dell'*holding period*⁵⁰, il valore finale di quest'ultimo non risulta inferiore a quello che si sarebbe ottenuto in assenza di *shift* dei tassi: “*A portfolio of investments in bonds is immunized for a holding period if its value at the end of the holding period, regardless of the course of interest rates during the holding period, must be at least as large as it would have been had the interest-rate function been constant throughout the holding period*”.⁵¹

Tale impostazione, nota come “Teorema di immunizzazione di Fisher e Weil”, ha rappresentato un'evoluzione cruciale rispetto al modello di Redington, rendendo possibile una gestione più rigorosa del rischio di tasso di interesse e gettando le basi per successive applicazioni nella pratica finanziaria.

⁴⁹ Fisher L., Weil R. W, “Coping with the risk of interest rates fluctuations: Returns to bondholders from Naïve and Optimal Strategies”, The Journal of Business, Vol.44, The University of Chicago Press, 1971.

⁵⁰ In matematica finanziaria, l'*holding period* (o periodo di detenzione) indica l'intervallo di tempo durante il quale un investitore mantiene un'attività finanziaria prima di venderla o riscattarla

⁵¹ La citazione fa riferimento a: Fisher L., Weil R. W, “Coping with the risk of interest rates fluctuations: Returns to bondholders from Naïve and Optimal Strategies”, The Journal of Business, Vol.44, The University of Chicago Press, 1971.

Procediamo ad illustrare lo sviluppo e la dimostrazione del teorema di Fisher e Weil.

Sia $\delta(t, s)$ il tasso istantaneo di interesse riferito alla struttura per scadenza dei tassi osservata all'istante t . Consideriamo, inoltre, un importo $L > 0$ esigibile all'epoca $H > t$, ed un insieme di flussi attivi (non-negativi) $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ con scadenziario $t = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$.

Assumiamo che, in data di osservazione t , il valore attuale dei flussi L ed x rispettino la seguente uguaglianza:

$$P(t, x) = P(t, L) \quad (\text{Eq. 3.5})^{52}$$

Ipotizziamo ora che avvenga uno *shift* additivo, di ampiezza Z , in un istante $t' > t$.

Il teorema di Fisher e Weil dimostra che, in tale scenario, il valore del flusso x risulterà almeno pari al corrispondente valore *post-shift* di L se e solo se la *duration* al tempo t di x è pari alla *maturity* di L :

$$P(t', x) \geq P(t', L) \quad (\text{Eq. 3.6})$$

$$\text{Se e solo se: } D(t, x) = H - t$$

Dove: t è l'istante di valutazione, epoca nella quale viene calcolata la *duration* del portafoglio.

H rappresenta la *maturity* del flusso L , ovvero l'epoca finale rispetto alla quale si vuole immunizzare il portafoglio.

Introduciamo ora la funzione $Q(t, x, L)$, definita come il rapporto tra i valori attuali dei flussi x ed L al tempo t :

$$Q(t, x, L) = \frac{P(t, x)}{P(t, L)} = 1 \quad (\text{Eq. 3.7})$$

Come è possibile evincere osservando l'equazione 3.7, l'assunzione su cui si basa la dimostrazione del teorema di Fisher e Weil è che Q assuma, in ogni istante di tempo, un valore almeno pari a 1, in virtù della relazione espressa all'equazione 3.5.

⁵² Le formule contenute in questo paragrafo fanno riferimento a: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

Al fine di dimostrare il teorema, dobbiamo ora verificare che, in caso di *shift* additivo all'epoca t' , la condizione “ $D(t, x) = H - t$ “ sia necessaria e sufficiente⁵³ a mantenere valida la precedente assunzione di cui all'equazione 3.7.

Con l'obiettivo di studiare cosa succede in ogni istante di tempo, volgiamo la nostra analisi nel continuo, procedendo dunque a riformulare il rapporto tra i valori attuali dei flussi in funzione del tasso istantaneo di interesse $\delta(t, s)$:

$$Q(t, x, L) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_t^{t_k} \delta(t', s) ds}}{L e^{-\int_t^H \delta(t, s) ds}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, s) ds} \quad (\text{Eq. 3.8})$$

Consideriamo ora lo *shift* dei tassi di ampiezza Z all'epoca t' , come ipotizzato in precedenza. Di seguito il valore di Q *post-shift*:

$$Q(t', x, L, Z) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t', s) ds} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, s) ds} e^{Z(H-t_k)} \quad (\text{Eq. 3.9})$$

Se lo *shift* avesse ampiezza pari a zero ($Z = 0$), il termine $e^{Z(H-t_k)}$ assumerebbe valore pari ad 1, il che renderebbe valida la seguente relazione⁵⁴:

$$Q(t', x, L, Z) = Q(t, x, L, Z) = 1 \quad (\text{Eq. 3.10})$$

Procedendo con lo studio della derivata prima e seconda dell'equazione 3.9 in funzione dell'ampiezza Z otteniamo:

$$Q'(Z) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, s) ds} e^{Z(H-t_k)} \quad (\text{Eq. 3.11})$$

⁵³ In matematica, una condizione necessaria e sufficiente è un requisito che deve essere verificato affinché una proposizione sia vera (necessaria) e che, se verificato, garantisce la verità della proposizione stessa (sufficiente). In tal caso si parla di equivalenza logica e si indica con la notazione “se e solo se”.

⁵⁴ In matematica, qualunque numero diverso da 0 elevato alla potenza 0 restituisce come risultato il valore 1.

$$Q''(Z) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k)^2 x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t,s) ds} e^{Z(H-t_k)} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

Osservando la derivata seconda $Q''(Z)$, risulta evidente come questa assuma sempre valori positivi, essendo la combinazione di un termine quadratico e due termini esponenziali. Dal punto di vista grafico, tale relazione restituisce una curva convessa con concavità rivolta verso l'alto.

Ai fini della dimostrazione, è ora necessario verificare che il rapporto tra il valore attuale dei flussi $Q(t', x, L, Z)$ sia almeno pari ad 1, mediante lo svolgimento della derivata prima $Q'(Z)$ per $Z = 0$. In particolare, se $Q'(Z)$ risultasse nulla per $Z = 0$, allora si registrerebbe un minimo assoluto con valore 1 in corrispondenza di tale punto, dimostrando così la tesi iniziale.

$$Q'(0) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t,s) ds} = 0 \quad (\text{Eq. 3.13})$$

L'equazione 3.13 può essere rielaborata come segue:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{-\int_{t_k}^H \delta(t,s) ds}}{L e^{-\int_t^H \delta(t,s) ds}} = \frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k)}{Lv(t, H)} = 0 \quad (\text{Eq. 3.14})$$

Tenendo ora conto del vincolo $P(t, x) = P(t, L)$, otteniamo:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{Lv(t, H)} = H - t \quad (\text{Eq. 3.15})$$

Mantenendo valida l'ipotesi precedente, il denominatore $Lv(t, H)$, che rappresenta il valore attuale dell'importo L esigibile all'epoca H , è pari al valore attuale dei *cash flows* x .

Questa considerazione implica che:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{Lv(t, H)} = D(t, x) \quad (\text{Eq. 3.16})$$

È così dimostrato che, affinché la relazione $P(t', x) \geq P(t', L)$ sia valida, è necessario e sufficiente che la *duration* di x al tempo t sia uguale alla *maturity* di L , come riportato all'equazione 3.6.

In ossequio a quanto appena esposto, risulta chiaro il ruolo pivotale della *duration*, in quanto fattore chiave nella costruzione di un portafoglio immunizzato contro gli *shift* della curva dei rendimenti. In particolare, scegliendo un orizzonte di detenzione pari alla *duration* dei flussi x , l'investitore sarà garantito dal rischio di subire perdite.

Inoltre, parleremo di “*duration matching*” ove, sia attivo che passivo, abbiano medesima *duration* e valore attuale; in tal caso, eventuali *shift* avrebbero impatto simmetrico su entrambe le poste, preservando così l'equilibrio complessivo del portafoglio.

3.3 Le implicazioni del teorema di Fisher e Weil

In questo paragrafo, sulla scorta di quanto dimostrato precedentemente, saranno indagate le implicazioni del teorema di Fisher e Weil nella pratica finanziaria.

Sia L un *cash flow* passivo (negativo), con scadenza all'epoca $H > t$. Ai fini dell'applicazione del teorema, ci prefiggiamo di immunizzare tale flusso mediante la scelta di uno o più flussi attivi (positivi). Rappresentiamo tali *cash flows* attivi mediante una matrice⁵⁵, che chiameremo “ A ”, così composta:

- m colonne contenenti i flussi.
- n righe contenenti le scadenze di tali *cash flows*.

⁵⁵ In matematica, una matrice è una disposizione rettangolare di numeri, simboli o espressioni, organizzati in righe e colonne. Le matrici vengono utilizzate per rappresentare e risolvere sistemi di equazioni, per descrivere trasformazioni lineari e in generale come strumento fondamentale dell'algebra lineare.

Indichiamo con il simbolo a_{ik} un generico elemento della matrice A , il quale rappresenta il valore dell' i -esimo flusso esigibile all'epoca k , con $i = \{1; 2; \dots; m\}$ e $k = \{1; 2; \dots; n\}$.

Definiamo, infine, a_i la quota dell' i -esimo titolo in portafoglio, e formuliamo come segue un generico flusso x dei titoli che intendiamo immunizzare:

$$x_k = \sum_{i=1}^m a_i a_{ik} \quad (\text{Eq. 3.17})^{56}$$

All'istante t , il valore attuale dei *cash flows* è:

$$P(t, x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_i a_{ik} v(t, t_k) \quad (\text{Eq. 3.18})$$

Riprendendo ora i concetti esposti al paragrafo precedente, con particolare attenzione riguardo ai vincoli descritti dalle equazioni 3.7 e 3.15, affinché il portafoglio risulti immunizzato, è necessario rispettare il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_i a_{ik} v(t, t_k) = Lv(t, t_k) \quad (\text{Eq. 3.19})$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (t_k - t) a_i a_{ik} v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_i a_{ik} v(t, t_k)} = H - t$$

In particolare, il vettore $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, ovvero la soluzione del sistema di cui all'equazione 3.19, rappresenta proprio le quote obiettivo dei titoli del portafoglio che ci eravamo prefissati di immunizzare.

Il teorema di Fisher e Weil risulta utile anche in relazione al concetto già trattato di “epoca ottima di smobilizzo” (si veda il paragrafo 2.5).

⁵⁶ Le formule contenute in questo paragrafo fanno riferimento a: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

Consideriamo un generico portafoglio composto da flussi di importo $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ e scadenziario $\{t_1; t_2; \dots; t_n\}$.

Il valore di tale portafoglio a un'epoca generica $H < t_n$ può essere definito come la somma tra il valore di reimpiego, pari al montante degli importi già incassati, e il valore di realizzo, ovvero il valore attuale delle somme non ancora incassate. Di seguito tale relazione espressa in termini matematici:

$$R(H, x) = \sum_{k=1}^H \frac{x_k}{v(t_k, H)} + \sum_{k=H+1}^n x_k v(H, t_k) \quad (\text{Eq. 3.20})$$

Dove: $\sum_{k=1}^H \frac{x_k}{v(t_k, H)}$ rappresenta il valore di realizzo.

$\sum_{k=H+1}^n x_k v(H, t_k)$ rappresenta il valore di reimpiego.

Ipotizzando di operare nel regime continuo, qualora la curva dei rendimenti non subisse *shift* nell'intervallo di tempo compreso tra t e H , il reddito del portafoglio x , inteso come “valore di smobilizzo” al tempo H , risulterebbe essere:

$$\begin{aligned} R'(H, x) &= \sum_{k=1}^H x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t,s) ds} + \sum_{k=H+1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,s) ds} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,s) ds} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.21})$$

Ai fini della nostra analisi, supponiamo che si verifichi una perturbazione all'istante t' di ampiezza Z sulla curva dei rendimenti.

L'obiettivo sarà ora quello di individuare l'istante H in cui il reddito prodotto da x sia maggiore o uguale ad $R(H, x)$, ossia il reddito del portafoglio in assenza di *shift*.

Definiamo come segue il valore di smobilizzo di x in H a seguito dello *shift* di ampiezza Z :

$$R(Z, H, x) = \sum_{k=1}^H x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t',s) ds} + \sum_{k=H+1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t',s) ds} = \quad (\text{Eq. 3.22})$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,s) ds} = \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,s) ds} e^{-Z(t_k-H)}$$

Moltiplicando e dividendo l'equazione 3.22 per il fattore $e^{-\int_t^H \delta(t,s) ds}$ otteniamo:

$$R(Z, H, x) = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k) e^{-Z(t_k-H)} \quad (\text{Eq. 3.23})$$

Sulla falsa riga del procedimento svolto in sede di dimostrazione del teorema di Fisher e Weil, procediamo con lo studio della derivata prima e seconda della funzione $R(Z, H, x)$ rispetto all'ampiezza dello *shift* Z . Anche in questo caso, come in precedenza, $R(Z, H, x)$ risulta essere una funzione convessa sempre positiva. Al fine di verificare che il valore *post-shift* sia almeno pari allo stesso in assenza di variazione dei tassi, è sufficiente verificare l'esistenza di un punto di minimo assoluto della funzione in corrispondenza di $Z = 0$, dimostrando così che la derivata prima assuma valore nullo per $Z = 0$.

$$\frac{dR(Z, H, x)}{dZ} = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k) = 0 \quad (\text{Eq. 3.24})$$

Da cui ricaviamo:

$$H = \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)} \quad (\text{Eq. 3.25})$$

L'equazione 3.25 non rappresenta altro che l'epoca ottima di smobilizzo, perfettamente coincidente con la *duration* dei flussi x .

L'analisi appena condotta ci dimostra che, in presenza di *shift* additivo, disinvestendo in epoca $H = \text{Duration}$, si ottiene esattamente il rendimento previsto in ipotesi di assenza di oscillazioni dei tassi.

3.4 Il teorema di Redington

Nel corso dell'evoluzione delle teorie sull'immunizzazione finanziaria, un contributo fondamentale è quello di Frank M. Redington, che nel 1952, con il saggio “*Review of the Principles of Life-Office Valuations*”⁵⁷, pose le basi di un approccio innovativo alla gestione congiunta di attività e passività nel settore assicurativo. L'autore, attuario della Prudential, introdusse il concetto di *matching*, inteso come la distribuzione delle attività in modo tale che esse risultino esposte in maniera analoga rispetto alle passività agli stessi fattori di rischio, in particolare alle variazioni dei tassi di interesse.

Tuttavia, considerata l'estensione semantica del termine “*matching*”, Redington ritenne opportuno introdurre una nuova denominazione, “*immunization*”, per indicare in modo più preciso la strategia di investimento volta a rendere un portafoglio assicurativo resiliente a variazioni generali dei tassi. Con questo modello l'autore superò l'impostazione, più limitata, del teorema di Fisher e Weil, concentrandosi su scenari realistici in cui un portafoglio deve fronteggiare più obbligazioni future, garantendo una copertura di uscite multiple.

In questa prospettiva, la distribuzione delle scadenze dell'attivo viene progettata in funzione di quelle del passivo, così da limitare l'impatto negativo di movimenti inattesi della curva dei rendimenti e preservare la solvibilità dell'impresa. È proprio questo passaggio, dall'idea generica di *matching* alla nozione tecnica di immunizzazione, a segnare l'avvio della moderna teoria di protezione dei portafogli assicurativi.

Procediamo ora alla formalizzazione del teorema. Sia $\delta(t, s)$ l'intensità istantanea di interesse osservata in epoca t e siano $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ e $y = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$ due flussi attivi con scadenziario $t = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$. Inoltre, sia considerata valida la seguente uguaglianza tra i valori attuali dei flussi al tempo t :

$$P(t, x) = P(t, y) \quad (\text{Eq. 3.26})^{58}$$

⁵⁷ Redington F.M., “Review of the Principles of Life Office Valuations”, Journal of the Institute of Actuaries, 1952, Vol 78.

⁵⁸ Le formule contenute in questo paragrafo fanno riferimento a: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

Qualora si verificasse uno *shift* additivo, di ampiezza infinitesima, all'istante $t' > t$, varrebbe la seguente relazione:

$$P(t', x) \geq P(t', y) \quad (\text{Eq. 3.27})$$

In tal scenario, secondo il teorema di Redington, il portafoglio risulterà immunizzato se e solo se sono rispettate entrambe le seguenti condizioni:

1. La sussistenza di una relazione di uguaglianza tra le *duration* dei due flussi:

$$D(t, x) = D(t, y) \quad (\text{Eq. 3.28})$$

2. La seguente relazione tra le *duration* di secondo ordine dei due flussi:

$$D^2(t, x) \geq D^2(t, y) \quad (\text{Eq. 3.29})$$

Quanto appena esposto non è altro che la formulazione del teorema di Redington, del quale ora andremo a trattare la dimostrazione.

Indichiamo con il simbolo $P_N(t)$ il valore netto, calcolato in epoca t ed espresso in funzione di $\delta(t, s)$, dei flussi $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ e $y = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$:

$$P_N(t) = P(t, x) - P(t, y) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, s) ds} \quad (\text{Eq. 3.30})$$

Ipotizziamo ora che, in un istante $t' > t$, avvenga uno *shift* additivo di ampiezza Z . Il valore netto *post-shift* $P_N(t', Z)$ sarà ora pari a:

$$\begin{aligned} P_N(t', Z) &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t', s) ds} = \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, s) ds} e^{-Z(t_k - t)} = \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Z(t_k - t)} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.31})$$

L derivate prima e seconda risultano essere le seguenti:

$$P'_N(Z) = - \sum_{k=1}^n (t_k - t)(x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Z(t_k-t)} \quad (\text{Eq. 3.32})$$

$$P''_N(Z) = \sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Z(t_k-t)} \quad (\text{Eq. 3.33})$$

Ai fini della dimostrazione, consideriamo lo sviluppo della serie di Taylor, già utilizzata nel capitolo precedente, applicandola in relazione all'intorno $Z = 0$:

$$P_N(Z) = P_N(0) + ZP'_N(0) + \frac{1}{2}Z^2P''_N(0) \quad (\text{Eq. 3.34})$$

È ora necessario fare le seguenti considerazioni:

1. Considerando il vincolo $P(t, x) = P(t, y)$, come riportato nell'equazione 3.26, consegue che $P_N(0) = 0$.
2. Tenendo anche conto della condizione $D(t, x) = D(t, y)$, per la quale si veda l'equazione 3.28, si ottiene che $P'_N(0) = 0$.

In forza dei due precedenti aspetti risulta immediato intuire che, per ottenere un valore netto dei flussi non-negativo al fine di garantire l'immunizzazione, è necessario che $P''_N(0) \geq 0$.

In particolare, deve essere valida la seguente relazione:

$$\sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 y_k v(t, t_k) \quad (\text{Eq. 3.35})$$

La relazione di cui sopra non rappresenta altro che la seconda condizione del teorema di Redington, espressa al punto 3.29.

Il teorema appena esposto segue, in molti suoi aspetti, l'impostazione vista in fase di analisi del teorema di Fisher e Weil. Tuttavia, il teorema di Redington non può e non deve essere considerato come una generalizzazione di quest'ultimo, dal momento che, nonostante ampli il

raggio dell'analisi anche in relazione a uscite multiple, l'immunizzazione è ora garantita solo per *shift* dei tassi di ampiezza infinitesimale (a differenza del teorema di Fisher e Weil, dove l'immunizzazione sussiste per qualsiasi ampiezza degli *shift*).

3.5 Il Teorema generale dell'immunizzazione

Come enunciato a chiusura del paragrafo precedente, le teorie di Redington e Fisher & Weil fino a ora affrontate non sono sufficienti per essere considerate alla stregua di “teorema generale dell'immunizzazione”, perché non in grado di essere applicate a portafogli con uscite multiple soggetti a *shift* di ampiezza non-infinitesimale.

Tuttavia, se tenessimo conto del fatto che un flusso attivo possa essere scomposto in più operazioni, potremmo immaginare un portafoglio scomponibile in n sotto-portafogli, ognuno in grado di immunizzare un singolo importo del flusso $y = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. Tale operazione ci permetterebbe di affrontare il problema come se stessimo operando nell'ottica di Fisher e Weil in relazione alla copertura di singola uscita.

Definiamo, dunque, una matrice C contenente gli elementi c_{kj} , con $k = \{1, 2, \dots, n\}$, contraddistinta dalle tre seguenti relazioni:

1. La prima condizione assicura che il portafoglio x sia suddivisibile, con x_k ottenibile come sommatoria degli elementi c_{kj} :

$$\sum_{j=1}^n c_{kj} = x_k \quad (\text{Eq. 3.36})^{59}$$

2. La seconda rappresenta gli n vincoli:

$$\sum_{k=1}^n c_{kj} v(t, t_k) = y_j v(t, t_j) \quad (\text{Eq. 3.37})$$

⁵⁹ Le formule contenute in questo paragrafo fanno riferimento a: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

3. La terza rappresenta le n condizioni di *duration*:

$$\frac{\sum_{k=1}^n t_k c_{kj} v(t, t_k)}{y_j v(t, t_j)} = t_j \quad (\text{Eq. 3.38})$$

Al fine di estendere la nostra analisi oltre ai soli *shift* additivi, consideriamo ora la possibilità che si verifichino *shift* convessi, che indichiamo con il simbolo $Y(s)$, legati alla seguente relazione:

$$f(s) = e^{-\int_t^s Y(s) ds} \quad \text{con } s \geq t \quad (\text{Eq. 3.39})$$

La caratteristica principale dell'equazione 3.39 è che la sua derivata seconda risulta essere sempre positiva. Inoltre, la relazione $Y''(s) \geq Y'(s)$ vale per ogni $s \geq t$.

Al fine di costruire un portafoglio in grado di “resistere” a questo tipo di *shift* dei tassi, la proprietà della divisibilità del portafoglio sopra enunciata rappresenta un concetto chiave ma non sufficiente. A tal proposito, si rende ora necessaria l'introduzione del “teorema generale di immunizzazione per *shift* additivi”, formulato dagli autori H. Gifford Fong e Oldrich A. Vasicek, cruciale per tradurre la nostra analisi nella pratica operativa.

Sia $\delta(t, s)$ il tasso istantaneo di interesse rilevato in t e siano x ed y due flussi attivi aventi scadenziario $t = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$. Se si verificasse uno *shift* additivo in $t' > t$ avremmo:

$$P(t', x) \geq P(t', y) \quad (\text{Eq. 3.40})$$

La relazione 3.40 risulterebbe tuttavia valida solo se fossero rispettate le seguenti condizioni:

1. L'uguaglianza tra i valori dei flussi:

$$P(t, x) = P(t, y) \quad (\text{Eq. 3.41})$$

2. L'uguaglianza tra le *duration* dei flussi:

$$D(t, x) = D(t, y) \quad (\text{Eq. 3.42})$$

3. La dispersione media⁶⁰ in valore assoluto delle scadenze dei flussi risulta maggiore per le attività rispetto alle passività:

$$\sum_{k=1}^n |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^n |t_j - t_k| y_k v(t, t_k) \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Eq. 3.43})$$

Riformuliamo ora, come segue, il valore netto di portafoglio:

$$P_N(t') = P(t', x) - P(t', y) = \sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)} \quad (\text{Eq. 3.44})$$

Dove: Y è l'ampiezza dello *shift* additivo.

Al fine di dimostrare il teorema definiamo come segue i due seguenti elementi:

1. Gli importi netti attualizzati:

$$g_k = (x_k - y_k) v(t, t_k) \quad (\text{Eq. 3.45})$$

2. Il fattore di *shift*:

$$f(s) = e^{-Y(s-t)} \quad \text{con } s \geq t \quad (\text{Eq. 3.46})$$

Grazie alle rielaborazioni di cui all'eq. 3.45 e 3.46, possiamo esprimere la relazione 3.40 nella forma seguente:

$$P_N(t') = \sum_{k=1}^n g_k f(t_k) \geq 0 \quad \text{per ogni } Y \in R \quad (\text{Eq. 3.47})$$

Individuando l'intervallo (a, b) , comprensivo di t_1 e t_n , otteniamo:

$$\mu(a, s) = \sum_{t_k \leq s} g_k \quad \text{con } s \in [a, b) \quad (\text{Eq. 3.48})$$

⁶⁰ Il concetto di dispersione media (in ambito finanziario, ma anche statistico) si riferisce a una misura della variabilità o scostamento medio dei valori di una distribuzione rispetto a un punto di riferimento, che spesso è la media aritmetica o, nel caso di flussi finanziari, la scadenza media (*duration*).

Qualora ipotizzassimo che $a = t$ e che $b = +\infty$, allora potremmo esprimere la condizione di immunizzazione come di seguito:

$$\int_t^{+\infty} f(s) d\mu(s) \geq 0 \quad (\text{Eq. 3.49})$$

In particolare, tale relazione risulta valida solo se validi tre requisiti, espressi dalle seguenti relazioni⁶¹:

$$\int_t^{+\infty} d\mu(s) = 0 \quad (\text{Eq. 3.50})$$

$$\int_t^{+\infty} s d\mu(s) = 0 \quad (\text{Eq. 3.51})$$

$$\int_t^s \mu(t, s] ds \geq 0 \quad (\text{Eq. 3.52})$$

Ai fini della dimostrazione, rielaboriamo ora le tre condizioni (3.50; 3.51; 3.52) con l'obiettivo di renderle conformi alle condizioni di cui alle equazioni 3.41, 3.42 e 3.43:

1. Rielaborazione dell'eq. 3.50 con riferimento al vincolo di cui all'eq. 3.41:

$$\sum_{k=1}^n g_k = 0 \quad (\text{Eq. 3.53})$$

2. Rielaborazione dell'eq. 3.51 in funzione dell'eq. 3.42:

$$\sum_{k=1}^n t_k g_k = 0 \quad (\text{Eq. 3.54})$$

3. Rielaborazione dell'eq. 3.52 in funzione dell'eq. 3.43:

$$\sum_{t_k \leq s} (s - t_k) g_k \geq 0 \quad (\text{Eq. 3.55})$$

⁶¹ Il riferimento teorico è al teorema di Karamata, che riguarda funzioni convesse e le condizioni di majorization tra successioni, ed è presentato in maniera formale in “Sur une inégalité relative aux fonctions convexas”, un testo classico sulla teoria delle disuguaglianze matematiche.

Le precedenti tre relazioni, applicando il teorema dell'equivalenza, corrispondono a:

$$\sum_{k=1}^n |t_j - t_k| g_k \geq 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Eq. 3.56})$$

Infine, la relazione 3.56 può essere riformulata, tenendo conto del vincolo 3.41, come segue:

$$\frac{\sum_{k=1}^n |t_j - t_k| x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)} \geq \frac{\sum_{k=1}^n |t_j - t_k| y_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n y_k v(t, t_k)} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Eq. 3.57})$$

Osservando l'eq. 3.56, possiamo notare che il flusso attivo x presenta una dispersione più elevata rispetto al flusso passivo y , avendo esso una deviazione assoluta dalla media più elevata.

Siamo dunque giunti alla conclusione della dimostrazione del teorema generale dell'immunizzazione, il quale, oltre a essere applicabile in caso di *shift* additivi, mantiene la sua validità anche rispetto alla più ampia classe degli *shift* convessi, superando quindi le limitazioni del teorema di Redington e di Fisher & Weil.

3.6 L'immunizzazione per shift qualsiasi

Sempre con l'obiettivo di calare la nostra analisi ancor più nell'ambito dell'applicabilità pratica, è ora giunto il momento di abbandonare l'ipotesi di *shift* additivi, o, più in generale, di *shift* predeterminati. A tal proposito, sono state elaborate formulazioni alternative della *duration*, le quali, se eguagliate all'orizzonte temporale di valutazione, risultano analoghe alla condizione di durata media finanziaria osservata in precedenza.

Mentre secondo le teorie classiche è possibile giungere all'immunizzazione finanziaria di portafoglio solo per determinate categorie di *shift*, grazie alle teorie moderne, basate sull'ipotesi di *shift* qualsiasi, tale risultato è stato esteso anche in relazione a casistiche più complesse.

In linea con quanto appena affermato, l'ipotesi di *shift* qualsiasi può essere così rappresentata:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t', s) \quad \text{per ogni } t' \geq t ; s \geq t' \quad (\text{Eq. 3.58})$$

con ampiezza dello *shift* Z esprimibile come:

$$Z(t, t', s) = \sum_{j=1}^{N(t, t')} Y_j(s) \quad (\text{Eq. 3.59})$$

Dove: $N(t, t')$ rappresenta il numero di *shift* che avvengono tra t e t' .

$Y_j(s)$ è l'ampiezza del j -esimo *shift*.

In riferimento a uno *shift* qualsiasi avvenuto in $t' > t$ con ampiezza $Y(s)$, otteniamo:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Y(s) \quad (\text{Eq. 3.60})$$

In particolare, l'equazione 3.60 rappresenta l'effetto dello *shift* sul tasso istantaneo di interesse.

Le considerazioni sugli *shift* qualsiasi costituiranno un concetto essenziale nel seguente paragrafo, che tratterà la teoria di immunizzazione a minimo rischio, elaborata dai già citati Fong e Vasicek.

3.7 Fong e Vasicek: l'immunizzazione a minimo rischio

Il presente paragrafo tratterà l'ultimo argomento utile ai fini dell'elaborato; in particolare, sarà ora illustrato il teorema dell'immunizzazione a minimo rischio, elaborato nel 1984 dai matematici Fong H. G. e Vasicek O. A. e pubblicato nel celebre contributo: “*A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*”⁶².

Il teorema in esame si discosta dalle teorie classiche sull'immunizzazione finanziaria precedentemente illustrate, ponendo l'attenzione sul fatto che sia la struttura intrinseca di ciascun portafoglio a determinarne la vulnerabilità rispetto a variazioni dei tassi di interesse. Secondo Fong H. G. e Vasicek O. A., infatti, il concetto di immunizzazione consiste nella riduzione al minimo di tale vulnerabilità. In quest'ottica, gli autori ipotizzano che ogni portafoglio presenti un limite inferiore di sensibilità alle variazioni dei tassi, coincidente con la scadenza del periodo di riferimento del portafoglio stesso. Tale *lower limit* è definito come il rapporto tra i due seguenti termini:

- Il primo termine definito dall'ampiezza e tipologia di *shift* dei tassi.
- Il secondo relativo alla struttura del portafoglio.

Ai fini dell'illustrazione del teorema, consideriamo ora un portafoglio che sia immunizzato all'epoca $S = 0$ in relazione ad un orizzonte temporale H .

Sia, inoltre, $C = \{C_1; C_2; \dots; C_n\}$ un flusso attivo con scadenziario $s = \{s_1; s_2; \dots; s_n\}$.

Esprimiamo il valore iniziale del portafoglio come segue:

$$I_0 = \sum_{j=1}^n C_j P_0(s_j) \quad (\text{Eq. 3.61})^{63}$$

Dove: $P_0(s_j)$ rappresenta il fattore di sconto.

Definiamo, inoltre, la *duration* del portafoglio come:

⁶² Fong H.G., Vasicek O.A, “A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization”, The Journal of Finance, Vol.39

⁶³ In riferimento alle formule da 3.61 a 3.65 si faccia capo a: Fong H.G., Vasicek O.A, “A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization”, The Journal of Finance, Vol.39

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n s_j C_j P_0(s_j)}{I_0} \quad (\text{Eq. 3.62})$$

Infine, indichiamo con il simbolo I_H il valore, che chiameremo “*target value*”, assunto dal portafoglio in epoca H (scadenza dell’orizzonte temporale di riferimento) in ipotesi di assenza di *shift* della curva dei tassi:

$$I_H = \frac{I_0}{P_0(H)} \quad (\text{Eq. 3.63})$$

In ossequio a quanto trattato in sede di dimostrazione del teorema di Fisher e Weil (si veda il paragrafo 3.2), nel caso in cui la *duration* di un portafoglio coincide con l’orizzonte temporale considerato, il precedentemente citato *lower limit* non rappresenta altro che il valore minimo assunto dal portafoglio in presenza di *shift* paralleli della curva dei tassi.

Tuttavia, qualora le variazioni dei tassi non siano uniformi per tutte le diverse scadenze, tale proprietà non può essere garantita.

In tal caso, al fine di valutare il rischio di immunizzazione, si rende necessario analizzare il *terminal value* del portafoglio *post-shift* (non parallelo). Tale valore, infatti, potrebbe risultare inferiore al *target value*, presentando un discostamento la cui entità dipende sia dall’ampiezza e tipologia di *shift*, sia dalle caratteristiche intrinseche alla composizione del portafoglio stesso.

Consideriamo, ora, un portafoglio che rispetti la condizione $D = \text{orizzonte temporale}$, formulata da Fisher e Weil, ed indichiamo con il simbolo ΔI_H la variazione del valore dello stesso a seguito di uno *shift* dei tassi, che passano da $i(t)$ a $i'(t) = i(t) + \Delta i(t)$. Otteniamo:

$$\frac{\Delta I_H}{I_H} \geq -\frac{1}{2} K M^2 \quad (\text{Eq. 3.64})$$

La relazione 3.64 rappresenta il *lower limit* del portafoglio, ottenuto dal prodotto di:

- K , che rappresenta la deviazione dalla curva dei rendimenti.
- M^2 , ovvero il moltiplicatore del cambiamento del tasso.

Occorre fare una distinzione in riferimento a questi due termini. Mentre un investitore, infatti, non ha modo di determinare il parametro K , il quale dipende esclusivamente dall’ampiezza e tipologia di *shift* dei tassi, gli è invece possibile influenzare la componente M^2 , intervenendo

sulla struttura del portafoglio. In particolare, M^2 è definibile come la varianza ponderata delle scadenze intorno all'orizzonte di valutazione.

$$M^2 = \frac{\sum_{j=1}^M (s_j - H)^2 C_j P_0(s_j)}{I_0} \quad (\text{Eq. 3.65})$$

Al fine di ridurre la vulnerabilità del portafoglio, ci poniamo ora l'obiettivo di minimizzare il termine M^2 , essendo esso l'unico parametro su cui è possibile intervenire.

A parità di ogni altra condizione, un portafoglio è ritenuto tanto più immune quanto minore è il valore assunto dal suo parametro M^2 , mantenendo sempre valida la condizione $D = H$. Tale termine, assumendo sempre valore non-negativo, sarà considerato minimizzato quando raggiunge valore pari a zero.

In ipotesi di $M^2 = 0$, il portafoglio risulterà essere completamente immune a qualsiasi *shift* dei tassi. Tuttavia, tale risultato è ottenibile solo in relazione ad un portafoglio composto da un singolo *bond* che presenti *maturity* = H .

Essendo tale scenario poco verosimile e limitante ai fini della nostra analisi, considereremo da ora in poi il termine M^2 come la misura del discostamento di un portafoglio da tale situazione ottimale.

Volgiamo ora la nostra analisi nel continuo. Sia $\delta(t, s)$ l'intensità istantanea di interesse osservata all'epoca t , e siano $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ e $y = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$ due flussi attivi riferiti allo scadenziario $t = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$. Assumiamo, inoltre, che all'epoca t valga la seguente relazione di uguaglianza tra il valore attuale dei flussi:

$$P(t, x) = P(t, y) \quad (\text{Eq. 3.66})^{64}$$

Supponiamo, ora, che la curva dei tassi subisca una perturbazione $Y(s)$, e che siano vere le seguenti relazioni:

$$D(t, x) = D(t, y) \quad (\text{Eq. 3.67})^{65}$$

⁶⁴ In riferimento alle formule dalla n. 3.66 a seguire si faccia riferimento a: Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

$$\sum_{k=1}^n |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^n |t_j - t_k| y_k v(t, t_k) \quad (\text{Eq. 3.68})$$

Dove la disequazione di cui al punto 3.47 fa riferimento al Teorema generale dell'immunizzazione trattato al paragrafo 3.5.

In tale scenario, sussiste la seguente relazione tra i valori attuali dei flussi *post-shift*:

$$P(t', x) \geq P(t', y) + P(t, y)K[D^2(t, x) - D^2(t, y)] \quad (\text{Eq. 3.69})$$

Esprimiamo ora la relazione 3.69 in termini di dispersione netta:

$$\frac{P_n(t')}{P(t, y)} \geq KM_M^2(t) \quad (\text{Eq. 3.70})$$

Dove: $K = \frac{1}{2} \inf_{s \geq t} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} e^{-\int_t^s Y(s) ds} \right\}$ dipende esclusivamente da ampiezza e tipologia di *shift*.

Osservando la relazione 3.70, e tenendo in considerazione il vincolo di bilancio $P(t, x) = P(t, y)$, concludiamo la nostra analisi affermando che, all'approssimarsi a zero del termine $M_M^2(t)$, il portafoglio sarà sempre meno esposto a variazioni sfavorevoli dei tassi.

Conclusione

Il percorso tracciato in questo elaborato ha consentito di esplorare in profondità il legame tra prezzo delle obbligazioni e tassi di interesse, mostrando come questa relazione sia al centro della gestione del rischio finanziario. Dalla definizione dei concetti di base fino alle formulazioni più avanzate, il lavoro ha evidenziato come la sensibilità del prezzo possa essere compresa, misurata e in parte controllata attraverso strumenti matematici rigorosi.

L'introduzione della *duration* ha rappresentato il primo passo per descrivere in modo sintetico il grado di esposizione di un titolo ai movimenti dei tassi. L'integrazione con la *convexity* ha permesso di superare i limiti di una descrizione puramente lineare, restituendo un quadro più realistico del comportamento del prezzo al variare dei rendimenti. Questo passaggio si è rivelato fondamentale per capire come, al crescere dell'ampiezza dello shock, sia necessario considerare anche l'effetto della curvatura per ottenere stime affidabili.

La trattazione delle tecniche di immunizzazione ha aggiunto un tassello ulteriore, offrendo una prospettiva più ampia sulla possibilità di costruire portafogli in grado di proteggersi da variazioni inattese dei tassi. L'evoluzione dal modello classico alle formulazioni di Fisher & Weil e Redington ha mostrato come sia possibile affinare progressivamente le strategie, fino ad arrivare ai modelli generalizzati che contemplano scenari di curva più articolati.

Nel complesso, l'elaborato ha cercato di offrire una visione unitaria e coerente del problema del rischio di tasso, accompagnando il lettore lungo un percorso che parte dai fondamenti e approda a soluzioni avanzate. Il filo conduttore è stato quello di mostrare come concetti apparentemente astratti, come la *duration* o la *convexity*, possano diventare strumenti potenti per interpretare i movimenti dei prezzi e per comprendere le dinamiche che ne sono alla base.

Guardando oltre i confini di questo lavoro, si aprono numerose possibilità di approfondimento: dall'analisi di modelli dinamici per descrivere in modo più realistico l'evoluzione dei tassi, allo studio di scenari di mercato più complessi, fino all'integrazione di approcci stocastici per costruire strategie di copertura ancora più efficaci. Questi sviluppi rappresentano il naturale passo successivo di un percorso che, come questa tesi, mira a coniugare il rigore dell'analisi con una comprensione concreta delle dinamiche dei mercati finanziari.

Bibliografia:

Brealey, R.A., Myers, S.C. and Allen, F., 2022. Principles of Corporate Finance. 14th ed. New York: McGraw-Hill Education.

Cresca, C., Fersini, P., Melissa, G., Olivieri, G. and Pelle, M., 2018. Elementi di matematica finanziaria. Milano: Pearson.

Dipartimento del Tesoro, n.d. Cosa sono i Titoli di Stato? [online] Available at: https://www.dt.mef.gov.it/modules/documenti_it/debito_publico/servizi_cittadino/COSA_SONO_I_TITOLI_DI_STATO.pdf [Accessed 20 Aug. 2025].

Dipartimento del Tesoro, 2025. Composizione titoli di Stato al 30 giugno 2025. [online] Available at: https://www.dt.mef.gov.it/debito_publico/dati_statistici/composizione_titoli_stato/ [Accessed 20 Aug. 2025].

Fabozzi, F. J., Mann, S. V. & Fabozzi, F. A. (2021). The Handbook of Fixed Income Securities. 9th ed. New York: McGraw-Hill.

Fisher, L. & Weil, R. L. (1971) Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies, *Journal of Business*, vol. 44

Fong H.G., Vasicek O.A, “A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization”, *The Journal of Finance*, Vol.39, N.5

Investopedia, 2006. Who Are the Key Players in the Bond Market? [online] Available at: <https://www.investopedia.com/ask/answers/06/keyplayersbondmarket.asp> [Accessed 20 Aug. 2025].

Investopedia, 2025. What Is a Yield Curve? [online] Available at: <https://www.investopedia.com/terms/y/yieldcurve.asp> [Accessed 20 Aug. 2025].

Macaulay, F.R., 1938. The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856. New York: National Bureau of Economic Research.

Massimo De Felice, Franco Moriconi - La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie – Il Mulino, Bologna, Gennaio 1991.

Mishkin, F. S., Eakins, S. G. & Beccalli, E. (2025) Istituzioni e mercati finanziari, 9^a ed., Pearson, Milano.

Redington, F. M. (1952) Review of the Principles of Life-Office Valuations, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 78

Scandolo, G., 2013. *Matematica finanziaria*. Bologna: Amon Edizioni.