



Dipartimento di Economia e Finanza

Indirizzo Banche ed Intermediari Finanziari

Ottimizzazione del Portafoglio

**Azionario: Un'Analisi del Sistema di
Kelly come Strategia di Allocazione del
Capitale**

Relatore:

Prof. Hlafo Alfie Mimun

Correlatore:

Prof. Marchisio Valerio

Candidato:

Leonardo Venditti

Matricola 764931

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	i
1 Martingale e processi stocastici	1
1.1 I processi stocastici	1
1.2 Le Martingale	2
1.3 Funzionamento delle Martingale	4
2 I betting systems	11
3 Il Criterio di Kelly	25
4 Il modello di Markowitz	37
4.1 Il modello di Markowitz e il modello media-varianza	38
4.2 Il portafoglio a varianza minima	43
4.3 Il portafoglio con il Criterio di Kelly	45
5 Dati Utilizzati e Metodo di Analisi	49
5.1 Selezione degli Asset	49
5.2 Analisi Statistica dei Dati	52
5.2.1 Verifica della Normalità dei Rendimenti	53
6 Analisi dei dati	55

6.1	Amplifon	55
6.2	Azimut	57
6.3	Bami	59
6.4	Bci	60
6.5	Banca Mediolanum	61
6.6	BMPS	63
6.7	BPSO	64
6.8	ENEL	65
6.9	ENI	67
6.10	ERG	68
6.11	FBK	69
6.12	RACE	71
6.13	Generali	72
6.14	ISP	73
6.15	IVECO	74
6.16	Leonardo	75
6.17	Mediobanca	76
6.18	Pirelli	77
6.19	Poste	79
6.20	Stellantis	80
6.21	Unicredit	81
6.22	Unipol	82
7	Analisi dei Risultati Empirici	85
7.1	Portafoglio di Kelly	85
7.2	Portafoglio di Markowitz: Massimizzazione dello Sharpe Ratio . . .	88
7.3	Portafoglio di Markowitz: Massimo Sharpe Ratio	89
7.3.1	Backtesting	91

Conclusione	95
Appendice	97
Bibliografia	99

Introduzione

L'obiettivo di questo elaborato è analizzare in maniera approfondita e schematica due tra i principali approcci all'allocazione ottimale del capitale: il **criterio di Kelly** e il **modello di Markowitz**. Il lavoro prende inizio da una trattazione preliminare della teoria delle martingale in tempo discreto, concetto fondamentale nell'ambito della probabilità e con ampie applicazioni nel contesto finanziario, in particolare nella modellizzazione dell'evoluzione del capitale nel tempo.

A partire da questa base teorica, viene introdotto il concetto di sistemi di scommesse, con riferimento a strategie iterative di investimento in contesti di incertezza. In tale cornice si colloca il criterio di Kelly, originariamente formulato nel 1956 come soluzione ottimale a problemi di scommessa in ambienti con informazione imperfetta. Il criterio mira a massimizzare il tasso di crescita logaritmico del capitale nel lungo periodo, stabilendo la frazione ottimale da investire in ciascun round.

Si passa poi all'analisi del modello di Markowitz, noto anche come Modern Portfolio Theory, che rappresenta uno degli approcci più consolidati nella costruzione di portafogli. Esso si basa su una logica di ottimizzazione media-varianza, in cui l'obiettivo è massimizzare il rendimento atteso per un dato livello di rischio o, in alternativa, minimizzare la varianza per un certo rendimento atteso.

La parte finale dell'elaborato è dedicata all'analisi empirica, nella quale i modelli teorici vengono applicati a un dataset reale di titoli appartenenti all'indice

FTSE MIB. Utilizzando dati storici di prezzo, vengono costruiti e confrontati i portafogli derivanti dai due metodi, valutandone le performance mediante indicatori quantitativi quali rendimento annualizzato, volatilità, Sharpe Ratio e Tracking Error.

L'analisi consente di mettere in luce punti di forza e limitazioni di ciascun approccio, offrendo un confronto tra modelli classici e strategie più moderne di ottimizzazione del portafoglio.

Capitolo 1

Martingale e processi stocastici

Per introdurre il concetto di martingala e quindi successivamente il "criterio di Kelly", sarà necessario definire nel dettaglio cosa sia un processo stocastico e cosa esso descriva.

1.1 I processi stocastici

Un processo stocastico è una successione di variabili aleatorie indicizzata da un parametro. Questo parametro molto spesso, nella teoria e nella pratica, è costituito dal tempo.

Il processo viene dunque descritto nella seguente maniera:

$$\mathbf{X} = \{X(t) : t \in T\},$$

dove $T \subseteq \mathbb{R}$. In detto processo è possibile individuare come T sia un insieme numerico ($T \subset \mathbb{R}$), dunque t è un elemento dell'insieme T e $X(t)$ sia una variabile aleatoria che assume diversi valori in base a t . Dal momento che, come detto, t spesso si trova a specificare un tempo, chiameremo $X(t)$ lo stato del processo al momento t .

Vi sono due tipologie di processi stocastici. Queste vengono distinte in base al carattere di T : se l'insieme T è al più numerabile, allora il processo viene definito **processo stocastico a tempo discreto**; in caso contrario - ovvero nel caso in cui, T si trovi ad essere un insieme continuo - allora il processo viene definito **processo stocastico a tempo continuo**. È anche possibile formulare un'ulteriore distinzione riguardante i processi stocastici, dividendoli in **markoviani** e **non markoviani** in base alla legge di probabilità che determina il passaggio da uno stato all'altro delle variabili, ovvero la probabilità di transizione, se essa dipende unicamente dallo stato precedente o anche da tutta la storia del processo. Se la probabilità di transizione dipende dagli stati precedenti ma non dipende esplicitamente dal tempo t , allora si parlerà di **processo stocastico omogeneo**.

I processi stocastici sono modelli matematici utili per descrivere la legge probabilistica con cui un certo fenomeno può evolvere nel tempo.

Le osservazioni disponibili ovvero la serie storica osservata sono una realizzazione di un processo stocastico. Tale serie storica individuata potrebbe venire utilizzata per fare inferenza sul modello che ha generato i dati.

1.2 Le Martingale

La teoria delle Martingale, dalla sua introduzione, segue uno sviluppo proprio di molte teorie appartenenti al ramo della probabilità matematica, i concetti base sono derivati ed adattati da concetti interni al gioco d'azzardo e da qui sono divenuti un sofisticato strumento della matematica astratta moderna, congiuntamente prestando il proprio contributo al servizio di numerosi campi di ricerca. Come accennato, l'origine della strategia e il termine che ad essa si riferisce è fatta risalire al XVIII secolo nelle sale da gioco di Parigi dove, sviluppatasi e diffusasi tra i giocatori d'azzardo, garantiva a questi una serie di strategie utilizzabili nella

ricerca della vincita.

Un esempio emblematico deriva dall'utilizzo di questa strategia in un gioco, molto diffuso al tempo, simile al moderno "testa o croce". Il giocatore, scegliendo una delle due facce della moneta, puntava una somma di denaro che gli avrebbe procurato una vincita o una perdita prefissata, a seconda che avesse o meno indovinato la faccia della moneta mostrata.

Il principio fondamentale della "strategia martingala" adottata si basa sul raddoppiare la propria puntata dopo ciascuna perdita, con l'obiettivo finale di recuperare tutte le perdite accumulate e guadagnare un profitto pari perlomeno alla puntata iniziale. Almeno in linea teorica la "strategia" poteva funzionare, ma nella realtà, in un alto numero di casi ha provocato ingenti perdite per i giocatori. Infatti, nonostante essa possa portare ad un guadagno nel breve termine, sul lungo periodo la criticità della strategia consiste nel fatto che - nel caso di una serie di sconfitte persistenti - la posta da mettere in gioco aumenti in maniera esponenziale. È opportuno notare come per raggiungere il guadagno teorico nel lungo periodo bisognerebbe disporre di un capitale infinito. Di conseguenza uno dei risultati più evidenti messi in luce dalla moderna "teoria delle martingale" consiste nell'inesistenza di un sistema di scommesse vincente.

Il concetto di martingala viene portato dunque all'interno della teoria della probabilità da Paul Pierre Lévy . Diversi contributi vennero poi da Joseph Leo Doob e Kiyoshi Ito , che contribuirono ad ampliare gli ambiti di applicazione della teoria a molti settori della matematica, della fisica e soprattutto della finanza e delle tecniche di borsa.

1.3 Funzionamento delle Martingale

Dopo questa rapida digressione sull'origine del termine martingala e di questa strategia, sarà ora opportuno analizzare nel dettaglio il funzionamento del "sistema martingala", la sua applicazione in esempi pratici legati alla probabilità e i suoi possibili utilizzi in altri ambiti che non siano quelli del gioco d'azzardo.

Al fine di esaminare approfonditamente la teoria dietro le martingale sarà necessario affidarsi ad un esempio, ricorrendo nuovamente al lancio di una moneta. Si supponga dunque di lanciare un certo numero di volte una moneta, immaginando di guadagnare 1 euro nel caso esca "testa" e perderne 1 nel caso esca "croce".

La vincita totale ottenuta dopo n numero di lanci è ciò che ci interessa. Indicando con X_i la vincita nell' i -esimo lancio possiamo porre in termini matematici il problema in questo modo:

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{se l}'i\text{-esimo lancio è testa,} \\ -1, & \text{se l}'i\text{-esimo lancio è croce.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Definendo S_n la vincita in n lanci, otteniamo la seguente sommatoria: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. La nostra attenzione andrà posta sul valore di S_n per $n \in \mathbb{N} > 0$. In questo caso, presumendo di aver effettuato un certo numero n di lanci e sapendo dunque i valori assunti da X_i fino a X_n (valore assunto da X_i al n -esimo lancio), l'obiettivo sarà quello di ottenere una previsione per la media di S_{n+1} , ovvero il calcolo di

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n].$$

Possiamo dunque iniziare facendo presente che

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

da cui consegue che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \\ &= \mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n].\end{aligned}$$

Naturalmente essendo i lanci di una moneta indipendenti l'uno dall'altro, anche i valori assunti da X_i saranno indipendenti tra loro, a conferma del fatto che X_1, \dots, X_n è una successione di variabili indipendenti.

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_n + 1] = 1 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.5 = 0.$$

Dunque il valore atteso è pari a 0, poiché la probabilità che $X_i = 1$ è identica a quella che $X_i = -1$. Inoltre, sappiamo che, quando condizioniamo a X_1, \dots, X_n , il valore di S_n è noto, poiché $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Di conseguenza avremo che:

$$\mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] = S_n$$

Possiamo quindi individuare finalmente la previsione per la media di S_{n+1} sommando tra loro le due componenti, ovvero

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] = 0 + S_n \\ \implies \mathbb{E}[S_n + 1|X_1, \dots, X_n] &= S_n.\end{aligned}$$

Un tale risultato sta a testimoniare come all'($n+1$)-esimo lancio, conoscendo l'esito dei primi n lanci, la previsione che avremo della vincita corrisponde in media con la vincita totale ottenuta nei precedenti n lanci. Questa proprietà è fondamentale per potere stabilire che una determinata successione di variabili S_1, S_2, \dots è una martingala. La successione X_1, \dots, X_n sta invece a rappresentare l'informazione che utilizziamo per analizzare una martingala, un'informazione che nel caso citato cresce in base al numero dei lanci effettuati. Questa successione è denominata "filtrazione" ed essendo essa necessaria per stabilire la proprietà vista in precedenza, diremo che S_1, S_2, \dots è una martingala rispetto alla filtrazione X_1, \dots, X_n .

Richiamando dunque il concetto e la definizione di **processo stocastico** vista in precedenza, sarà possibile stilare una lista di proprietà delle martingala. Sia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un processo stocastico e sia $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una filtrazione. Supponiamo che

$$(i) \quad \mathbb{E}[|M_n|] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} > 0$$

(ii) il processo M_n sia adattato alla filtrazione $\{Y_n\}$, ovvero M_n è noto se si conosce il valore della successione Y_1, \dots, Y_n .

$$(iii) \quad \mathbb{E}[M_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n] = M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} > 0$$

Queste tre proprietà congiunte, qualora verificate, ci consentono di dire che il processo M_n è una **martingala** rispetto alla **filtrazione** Y_n .

L'ultima delle tre ci consente di dire che la miglior previsione relativa ad un valore futuro non ancora osservato e data esattamente dall'ultima osservazione realizzata. Considerando inoltre che delle tre proprietà sopra esposte è la *iii*) quella che più delle altre caratterizza la martingala, mantenendo invariate la prime due *i*) e *ii*) ma variando l'ultima, otterremo altri due processi denominati rispettivamente **supermartingale** e **submartingale**.

Per la prima, ovvero la supermartingala, è necessario che la terza proprietà divenga:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n] \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} > 0$$

Per la seconda invece, ovvero la submartingala, la terza proprietà dovrà assumere questa forma:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n] \geq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} > 0$$

Naturalmente è semplice notare come un processo che risulta essere sia una supermartingala e sia una submartingala rispetto a una filtrazione, è una martingala rispetto alla filtrazione stessa.

Per analizzare le proprietà appena viste e decifrare gli effetti che le due variazioni avranno su un determinato processo, sarà opportuno portare un'esempio che tenga in considerazione tutto quello visto finora.

Riprendendo l'esempio precedente, si supponga di avere una moneta truccata, dunque con probabilità di vincita alterate, e di lanciarla ripetutamente. Per ogni lancio la probabilità di ottenere "testa" sarà di p . Immaginiamo di vincere una certa quantità $a > 0$ ad ogni lancio in cui esca "testa" e di perdere $b > 0$ per ogni lancio in cui esca "croce". Indichiamo inoltre con X_i la vincita all' i -esimo lancio. Avremo dunque la seguente situazione

$$X_i = \begin{cases} +a, & \text{se l}'i\text{-esimo lancio è testa,} \\ -b, & \text{se l}'i\text{-esimo lancio è croce.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Dunque

$$\mathbb{P}(X_i = +a) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -b) = 1 - p$$

Come sappiamo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, dunque come prima ci interessa lo studio di S_n . Grazie alla disuguaglianza triangolare, notiamo che

$$|X_1 + \dots + X_n| \leq |X_1| + \dots + |X_n|$$

e attraverso essa arriviamo a definire che

$$\mathbb{E}[|S_n|] = \mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|] \leq \mathbb{E}[|X_1| + \dots + |X_n|] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|]$$

Per trovare il valore di $\mathbb{E}[|X_i|]$ andremo a usare la formula del valore atteso e dunque

$$\mathbb{E}[|X_i|] = |a| \cdot p + |-b| \cdot (1 - p) = ap + b(1 - p).$$

E infine, andando a sostituire nei punti opportuni

$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|] = \sum_{i=1}^n ap + b(1 - p) = [ap + b(1 - p)] \cdot n < \infty$$

Con questo viene verificata e soddisfatta la proprietà *i)* della definizione precedente di martingala, supermartingala e submartingala.

Per quanto riguarda invece la proprietà *ii)* possiamo facilmente verificare come nell'esempio portato conoscendo il valore di X_1, \dots, X_n conosceremo anche il valore di S_n , infatti come si visto $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Quindi il processo S_n è adattato alla filtrazione X_n . Giungiamo dunque alla terza proprietà, per verificare la *iii)* è necessario calcolare il valore atteso di S_{n+1} condizionato alla successione X_1, \dots, X_n

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n]$$

Come visto in precedenza nella teoria generale della martingala

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

E quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \\ &= \mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] \end{aligned}$$

Dato che grazie alla *ii)* sappiamo che il processo S_n è adattato alla filtrazione X_n , possiamo dire che $\mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] = S_n$ e allora stabiliamo che la precedente equazione equivale a

$$S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}]$$

dove $\mathbb{E}[X_{n+1}]$ equivale a $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n]$ in virtù del fatto che le variabili della successione X_1, \dots, X_n sono indipendenti tra loro. Ora, sostituendo la formula del valore atteso nell'equazione sopra avremo:

$$S_n + ap + b(1 - p) = S_n + p(a + b) - b$$

Per decifrare a pieno il risultato ottenuto bisogna studiare il segno dell'elemento $p \cdot (a + b) - b$ che determina se il processo analizzato si trova ad essere una martingala, una supermartingala o una submartingala rispetto alla filtrazione X_n .

(a) se $p \cdot (a + b) - b = 0$ allora S_n è una **martingala**

(b) se $p \cdot (a + b) - b \leq 0$ allora S_n è una **supermartingala**

(c) se $p \cdot (a + b) - b \geq 0$ allora S_n è una **submartingala**

A questo punto, esplicitando p in $p \cdot (a + b) - b$, avremo che per $p = \frac{b}{a+b}$ (martingala) ci troviamo in presenza di un gioco equo poichè il valore atteso è $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Quando il gioco è tale che $p < \frac{b}{a+b}$ (supermartingala) ci troviamo in un gioco che risulta svantaggioso per chi sta giocando e nel quale il valore atteso delle vincite è $\mathbb{E}[X_i] < 0$. Infine, nel caso in cui $p > \frac{b}{a+b}$ (submartingala), il gioco è vantaggioso per il giocatore, e difatti $\mathbb{E}[X_i] > 0$. Un dato che emerge da quanto visto finora riguarda l'evoluzione nel tempo del valore atteso nei tre processi. Una proprietà notevole della martingala è la costanza del valore atteso, infatti in una martingala si può notare come $\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n]$.

Per quanto riguarda invece le supermartingale il valore atteso è decrescente nel tempo e dunque $\mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n]$, al contrario esso è crescente nel tempo per le submartingale e possiamo affermare che: $\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n]$. Alla luce di quanto visto sinora, passando su di un piano più pratico, possiamo dedurre che un processo stocastico si comporta come una martingala se la sua traiettoria non mostra uno specifico trend sottostante, ovvero se le direzioni assunte dai movimenti futuri sono, in media, uguali ai valori osservati all'istante presente.

Qualora le traiettorie di un processo individuino trend di lungo periodo, allora il processo non si potrebbe configurare come una martingala. Per questo motivo potremmo dire che la martingala è un processo stazionario. Questo non è vero al contempo per quanto riguarda supermartingale e submartingale poichè, come abbiamo visto, si tratta rispettivamente di processi in media decrescente e crescente. Spesso i processi che incontriamo nella vita reale sono molto raramente delle vere e proprie martingale; nella realtà infatti i movimenti futuri non sono completamen-

te imprevedibili, le variazioni medie non sono pari a zero, ovvero il valore atteso non è costante. Qualora si volesse andare ad analizzare le serie storiche nei prezzi delle attività finanziarie è molto più probabile che ci si trovi di fronte a delle supermartingale e più frequentemente a delle submartingale. Esiste, tuttavia, una connessione tra le martingale e le submartingale, attraverso la quale è possibile scomporre le seconde nelle prime. Un metodo di trasformazione è quello che sfrutta la cosiddetta scomposizione di **Doob-Meyer**. Al fine di trattare il metodo Doob-Meyer è necessario definire i concetti di processo crescente e processo prevedibile. Dato un processo M_n e una successione di X_n variabili con $n > 0$, diremo che il processo $\{M_n\}$ è prevedibile se conosciamo il valore di M_{n+1} quando sono noti X_1, \dots, X_n .

Un processo M_n con $n \geq 0$ è detto crescente se M_n è predicibile e quasi certamente vale che $0 = M_0 \leq \dots \leq M_n$. Per la scomposizione di Doob-Meyer, dunque, qualsiasi submartingala $\{M_n\}$ può essere scritta come la somma di una martingala $\{S_n\}$ e un processo crescente $\{A_n\}$, potremo dire dunque che

$$M_n = S_n + A_n, \quad \text{for } t \geq 0.$$

(appendice) Usando questo risultato è possibile scomporre in maniera univoca una submartingala in una martingala più un elemento residuo, ovvero un processo crescente. Sottraendo dunque da una submartingala un processo a traiettoria crescente, noteremo che le deviazioni rispetto al trend assumono un comportamento assolutamente irregolare.

Il processo che ne deriva è dunque proprio una martingala. Abbiamo allora raggiunto l'obiettivo di scomporre una submartingala in una martingala.

Capitolo 2

I betting systems

Un sistema di scommesse (*betting system*) è un approccio strutturato applicabile al gioco d'azzardo, con l'obiettivo di ottenere un profitto. Per avere successo, il sistema dovrebbe trasformare il “margine della casa” in un vantaggio per il giocatore dunque, cosa che risulta impossibile nei giochi puramente aleatori con probabilità fisse. I sistemi di scommesse si basano spesso su analisi statistiche. Matematicamente, nessun sistema di scommessa può modificare i risultati attesi nel lungo termine in un gioco con prove indipendenti e casuali; tuttavia, possono aumentare le probabilità di vincita a breve periodo a costo di un rischio maggiore. Strategie che considerano il cambiamento delle probabilità in alcuni giochi (es. conteggio delle carte) possono modificare i risultati a lungo termine. Questa affermazione è formalizzata dal teorico dei giochi Richard Arnold Epstein in *The Theory of Gambling and Statistical Logic* come segue:

Teorema 2.0.1. *Se un giocatore rischia un capitale finito su molte giocate in un gioco con probabilità costanti di vincita, perdita e pareggio per ogni singola prova, allora qualsiasi sistema di scommessa porta alla stessa aspettativa matematica di guadagno per unità di denaro scommessa.*

Supponiamo di star facendo una scommessa e denotiamo con X la quantità aleatoria di denaro che vinciamo/perdiamo per ogni unità di denaro scommessa. Supponiamo ancora di ripetere la scommessa diverse volte e denotiamo con X_1, X_2, \dots le vincite per unità di denaro scommessa che otteniamo nelle varie ripetizioni (dunque, se al terzo round scommetto una quantità pari a 7, allora vincerò $7X_3$ al terzo round). Ovviamente le variabili X_1, X_2, \dots sono indipendenti in quanto il meccanismo del gioco non dipende da come è andato nella precedente ripetizione e inoltre sono identicamente distribuite poichè il meccanismo del gioco resta invariato nei vari round. Supponiamo adesso di scommettere all' n -esimo round una quantità di denaro B_i , che ovviamente dipenderà dall'esito delle precedenti scommesse, ovvero da X_1, X_2, \dots, X_{n-1} . Scriveremo dunque che:

$$B_1 = g_1 > 0, \quad B_n = g_n(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad \text{per } n \geq 2. \quad (2.1)$$

Dove g_n è un'opportuna funzione di X_1, \dots, X_{n-1} , all'inizio del gioco, B_1 è una quantità costante $g_1 > 0$, poiché nel primo round l'importo della scommessa è deciso in modo deterministico, dato che non abbiamo ancora giocato alcun round precedente. Al round n -esimo, X_n rappresenta la vincita per unità di denaro scommessa, mentre B_n è l'importo totale scommesso nello stesso round. Pertanto, la vincita totale al round n -esimo sarà data da $B_n X_n$. Le successioni di variabili $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ costituiscono insieme un sistema di scommesse (o *betting system*). Denotiamo con F_n la quantità di denaro posseduta dopo il round n -esimo; quindi, abbiamo la relazione seguente:

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n \quad \text{per } n \geq 1. \quad (2.2)$$

che, se iterata, porta all'identità

$$F_n = F_0 + \sum_{i=1}^n B_i X_i, \quad (2.3)$$

dove F_0 rappresenta la quantità di denaro che abbiamo inizialmente (ed è dunque una quantità deterministica). È ragionevole assumere che non possiamo scommettere più di quanto possediamo, ovvero $B_n \leq F_{n-1}$ per $n \geq 1$. Siamo interessati a studiare la successione $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Assumiamo ragionevolmente che ogni variabile della filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ assuma una quantità finita di valori. Per semplicità di calcolo, assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha:

$$X_n = \begin{cases} a, & \text{con probabilità } p, \\ 0, & \text{con probabilità } r, \\ -b, & \text{con probabilità } q, \end{cases} \quad (2.4)$$

dove $a, b > 0$, $p, q > 0$ e $r \geq 0$ sono tali che $p + q + r = 1$. Nonostante questa assunzione, tutto il calcolo può essere ripetuto in un caso più generale con l'unica assunzione che X_n assuma un numero finito di valori. Nella seguente proposizione, viene illustrato sotto quali condizioni sui valori di p, q, r , il processo $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta essere una martingala, una submartingala o una supermartingala.

Proposizione 2.0.2. *Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. distribuite come indicato nel precedente sistema (3.4) e sia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ una successione di variabili aleatorie che soddisfa (3.1). Definita infine la successione $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ come in (3.3), si ha che:*

- se $ap = bq$, allora $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$;
- se $ap \geq bq$, allora $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$;
- se $ap \leq bq$, allora $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare inizialmente che:

1. per ogni n fissato, si ha $\mathbb{E}[|F_n|] < \infty$;
2. $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un processo adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ (ovvero, il valore di $\{F_n\}$ è noto conoscendo la sequenza X_1, \dots, X_n).

Infine, bisogna determinare la relazione tra $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n]$ e F_n . Cominciamo col dimostrare (i). Notiamo che, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo:

$$\mathbb{E}[|F_n|] = \mathbb{E} \left[\left| F_0 + \sum_{i=1}^n B_i X_i \right| \right] \leq \mathbb{E} \left[|F_0| + \sum_{i=1}^n |B_i X_i| \right] = |F_0| + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|B_i| \cdot |X_i|], \quad (2.5)$$

dove, nella penultima uguaglianza, abbiamo usato il fatto che F_0 è una costante, mentre nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che, essendo $B_i = g_i(X_1, \dots, X_{i-1})$, allora B_i è indipendente da X_i , quindi $\mathbb{E}[|B_i| \cdot |X_i|] = \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \mathbb{E}[|X_i|]$.

Poiché $\mathbb{E}[|X_i|] = ap + bq$, da (3.5) si ha:

$$\mathbb{E}[|F_n|] \leq |F_0| + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \mathbb{E}[|X_i|] = |F_0| + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|B_i|] \cdot (ap + bq) = |F_0| + (ap + bq) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|B_i|]. \quad (2.6)$$

Notiamo ora che $B_i = g_i(X_1, \dots, X_{i-1})$. Poiché ogni X_i assume solo i valori $-b, 0, a$, il vettore (X_1, \dots, X_{i-1}) può assumere 3^{i-1} forme possibili. Infatti, X_1 varia tra tre valori (ovvero $-b, 0, a$); per ogni scelta di X_1 , possiamo far variare X_2 tra tre valori (ovvero $-b, 0, a$); per ogni combinazione di X_1 e X_2 , possiamo far variare X_3 tra tre valori (ovvero $-b, 0, a$); e così via fino a X_{i-1} . Poiché il vettore (X_1, \dots, X_{i-1}) può assumere 3^{i-1} forme possibili, allora $g_i(X_1, \dots, X_{i-1})$ assume al massimo 3^{i-1} valori distinti.

Come conseguenza, B_i sarà minore del massimo di questi valori, che chiamiamo K_i . Notiamo che tale massimo è finito in quanto stiamo calcolando il massimo di un numero finito di valori (che esiste sempre). Dunque, in questo punto risulta cruciale l'ipotesi che X_i assuma un numero finito di valori, in quanto, in caso

contrario, non sarebbe garantito che il massimo K_i sia finito. Tornando dunque a (3.6), si ha:

$$\mathbb{E}[|F_n|] \leq |F_0| + \max\{a, b\} \sum_{i=1}^n K_i \leq |F_0| + \max\{a, b\} \cdot n \max_{1 \leq i \leq n} K_i < \infty.$$

L'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che F_0 è un numero fissato (e quindi finito), $\max\{a, b\}$ è un numero finito poiché lo sono a e b , e K_1, \dots, K_n sono numeri finiti (e dunque anche il loro massimo è finito). Ciò prova (i). Passiamo ora a dimostrare (ii). Ricordiamo la definizione di F_n in (3.3). Notiamo che, poiché $B_i = g_i(X_1, \dots, X_{i-1})$, per conoscere B_i è sufficiente conoscere X_1, \dots, X_{i-1} . Dunque, per conoscere B_1, \dots, B_n è sufficiente conoscere X_1, \dots, X_{n-1} . Di conseguenza, da (3.3), si comprende che per conoscere F_n è sufficiente conoscere il valore di X_1, \dots, X_n . Ciò prova che il processo $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, ovvero (ii). Resta da calcolare $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n]$. Si ricordi che $B_i = g_i(X_1, \dots, X_{i-1})$. Quindi:

$$\mathbb{E}[B_i|X_1, \dots, X_n] = B_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n+1,$$

$$\mathbb{E}[X_i|X_1, \dots, X_n] = X_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

In particolare, si ottiene di conseguenza che:

$$\mathbb{E}[B_i X_i | X_1, \dots, X_n] = B_i X_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Dunque si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}\left[F_0 + \sum_{i=1}^{n+1} B_i X_i \middle| X_1, \dots, X_n\right] = \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^n B_i X_i + \mathbb{E}[B_{n+1} X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = \\ &= F_n + \mathbb{E}[B_{n+1} X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = \\ &= F_n + B_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n]. \end{aligned}$$

Poiché $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ è una successione di variabili indipendenti, si ha che:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = ap - bq.$$

Dunque si ottiene:

$$\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = F_n + B_{n+1} \cdot (ap - bq).$$

Poiché $B_{n+1} \geq 0$, si ha che:

- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = F_n$ se $ap = bq$;
- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n] \geq F_n$ se $ap \geq bq$;
- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, \dots, X_n] \leq F_n$ se $ap \leq bq$.

Ciò va a confermare la tesi.

Di seguito una descrizione dettagliata del sistema *martingala* applicata nell'ambito dei sistemi di scommesse. Assumendo un limite massimo di scommessa imposto dalla casa, questo sistema é in grado di fornire al giocatore una piccola vincita con alta probabilità o una grande perdita con bassa probabilità, una proprietà che possiamo affibbiare anche a tutti gli altri sistemi di scommesse notevoli ovvero i sistemi di Fibonacci, Labouchere, Oscar, d'Alembert and Blundell. Infine si vedrà il principio che dimostra come, sotto certe assunzioni naturali, nessuno di questi sistemi, né alcun altro sistema che si possa ideare, può trasformare una sequenza di scommesse subequilibrate in una scommessa sovraequa ovvero quello che é noto come **conservazione dell'equità**.

Consideriamo sistemi di scommesse limitati a giochi con vincite a quota pari. Siano X_1, X_2, \dots una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione comune:

$$P(X_1 = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X_1 = -1) = q,$$

dove $0 < p < 1$ e $q := 1 - p$, con X_n che rappresenta il profitto del giocatore per unità di scommessa al colpo n . (Per semplicità, escludiamo la possibilità di pareggi.) Un sistema di scommesse consiste in una sequenza di importi di scommessa, B_1, B_2, \dots , con B_n che rappresenta l'importo scommesso al colpo n e dipende solo dai risultati dei colpi precedenti, X_1, \dots, X_{n-1} . Più precisamente,

$$B_1 = b_1 \geq 0, \quad B_n = b_n(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq 0, \quad n \geq 2,$$

dove b_1 è una costante e b_n è una funzione deterministica di $n - 1$ variabili per ogni $n \geq 2$. La fortuna F_n del giocatore dopo n colpi soddisfa $F_n = F_{n-1} + B_n X_n$ per ogni $n \geq 1$, e quindi:

$$F_n = F_0 + \sum_{l=1}^n B_l X_l, \quad n \geq 1. \quad (2.8)$$

dove F_0 sta a rappresentare il capitale iniziale del giocatore (una costante positiva).

Sistema di Martingala. In questo sistema, il giocatore raddoppia l'importo della scommessa dopo ogni perdita e smette di scommettere dopo la prima vincita (ovviamente, il giocatore può riavviare il sistema dopo la prima vincita, ma per semplificare l'analisi, per ora ignoriamo questa possibilità). In termini della nostra notazione:

$$B_n = 2B_{n-1} \mathbf{1}\{X_{n-1} = -1\}, \quad n \geq 2,$$

e quindi, se il denaro è misurato in unità della scommessa iniziale,

$$B_1 = 1, \quad B_n = 2^{n-1} \mathbf{1}\{X_1 = \dots = X_{n-1} = -1\}, \quad n \geq 2.$$

Si veda la Tabella per chiarimenti. Sia N il numero di colpi necessari per ottenere la prima vincita, ovvero:

$$N := \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}.$$

Allora (3.?) può essere semplificato in:

$$B_n = 2^{n-1} \mathbf{1}\{n \leq N\}, \quad n \geq 1.$$

e (3.?) diventa:

$$F_n = \begin{cases} F_0 - (1 + 2 + \dots + 2^{n-1}) = F_0 - (2^n - 1), & \text{se } n \leq N - 1, \\ F_0 - (1 + 2 + \dots + 2^{N-2}) + 2^{N-1} = F_0 + 1, & \text{se } n \geq N. \end{cases}$$

Questa equazione ci dice che, se il giocatore fa n scommesse e non riesce a vincerne nessuna, avrà perso $2^n - 1$ unità. Se continua a scommettere fino a quando vince una scommessa, otterrà un profitto cumulativo di una unità.

In particolare,

$$P(F_N = F_0 + 1) = 1,$$

il che renderebbe questo un sistema infallibile, se non fosse per due complicazioni: primo, il giocatore non può scommettere più di quanto possiede, e secondo, la Casa di solito impone un limite massimo di scommessa. Pertanto, se è richiesta una scommessa che supera il capitale rimanente del giocatore o il limite massimo imposto dalla Casa, il sistema deve essere interrotto. Data una fortuna iniziale di F_0 unità e un limite della Casa di M unità (entrambi interi positivi), definiamo:

$$m_1 := \lfloor \log_2(F_0 + 1) \rfloor, \quad m_2 := 1 + \lfloor \log_2 M \rfloor, \quad m := m_1 \wedge m_2; \quad (2.9)$$

in particolare, m_1 è la parte intera del logaritmo in base 2 di $F_0 + 1$. Per esempio, se $F_0 = 1,000$ e $M = 500$, allora $2^8 \leq M < 2^9 \leq F_0 + 1 < 2^{10}$, quindi $m = m_1 = m_2 = 9$. Chiaramente, il giocatore ottiene il suo profitto cumulativo di un'unità se e solo se la somma di tutte le scommesse richieste dal sistema, ovvero $2^N - 1$ unità, non supera la fortuna iniziale del giocatore F_0 unità, e la scommessa più grande richiesta dal sistema, ovvero 2^{N-1} unità, non supera il limite della Casa di

Tabella 2.1: Un'illustrazione del sistema di Martingala

colpo	dimensione della scommessa	esito	profitto cumulativo
1	$1 = 2^0$	L	$-1 = -(2^1 - 1)$
2	$2 = 2^1$	L	$-3 = -(2^2 - 1)$
3	$4 = 2^2$	L	$-7 = -(2^3 - 1)$
4	$8 = 2^3$	L	$-15 = -(2^4 - 1)$
5	$16 = 2^4$	L	$-31 = -(2^5 - 1)$
6	$32 = 2^5$	L	$-63 = -(2^6 - 1)$
7	$64 = 2^6$	L	$-127 = -(2^7 - 1)$
8	$128 = 2^7$	L	$-255 = -(2^8 - 1)$
9	$256 = 2^8$	L	$-511 = -(2^9 - 1)$
10	$512 = 2^9$	L	$-1,023 = -(2^{10} - 1)$
11	$1,024 = 2^{10}$	L	$-2,047 = -(2^{11} - 1)$
12	$2,048 = 2^{11}$	L	$-4,095 = -(2^{12} - 1)$
13	$4,096 = 2^{12}$	L	$-8,191 = -(2^{13} - 1)$
14	$8,192 = 2^{13}$	L	$-16,383 = -(2^{14} - 1)$
15	$16,384 = 2^{14}$	L	$-32,767 = -(2^{15} - 1)$
16	$32,768 = 2^{15}$	W	$1 = 2^0$

M unità. Utilizzando la notazione (3.8), la probabilità di questo evento è:

$$\begin{aligned}
& P(2^N - 1 \leq F_0, 2^{N-1} \leq M) = \\
& P(N \leq \log_2(F_0 + 1), N \leq 1 + \log_2 M) \\
& = P(N \leq m_1, N \leq m_2) \\
& = P(N \leq m) \\
& = 1 - P(X_1 = -1, \dots, X_m = -1) = 1 - q^m.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Inoltre, nell'evento complementare $\{N \geq m + 1\}$, vengono fatte solo m scommesse e la perdita cumulativa del giocatore è di $2^m - 1$ unità. Concludiamo quindi che, nel corso di $N \wedge m$ colpi, il giocatore otterrà una piccola vincita (un'unità) con alta probabilità $(1 - q^m)$, mentre affronterà una grande perdita $(2^m - 1)$ unità con bassa probabilità (q^m) . In particolare, il suo profitto cumulativo atteso è dato da

$$\mathbb{E}[F_{N \wedge m} - F_0] = (1)(1 - q^m) + [-(2^m - 1)]q^m = 1 - (2q)^m, \tag{2.11}$$

e l'espressione (2.9) risulta negativa, nulla, o positiva se $p < \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, o $p > \frac{1}{2}$, rispettivamente. In realtà, il limite imposto dalla Casa è una considerazione più seria rispetto al capitale del giocatore, data la facile disponibilità di credito. Di fatto, dato un limite della Casa di M unità, il giocatore può garantire che il sistema di Martingala non richiederà mai una scommessa che superi le sue risorse disponibili senza prima superare il limite della Casa. È sufficiente scegliere una fortuna iniziale F_0 tale che soddisfi

$$F_0 \geq 2^{1 + \lceil \log_2 M \rceil} - 1.$$

Questa disuguaglianza è equivalente a $m_1 \geq m_2$ o $m = m_2$. Infine, il numero

atteso di colpi è dato da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N \wedge m] &= p + 2qp + 3q^2p + \cdots + mq^{m-1}p + mq^m \\
&= \sum_{l=1}^m lq^{l-1}p + mq^m \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{l=k}^m q^{l-1}p + mq^m \\
&= \sum_{k=1}^m (q^{k-1} - q^m) + mq^m \\
&= \sum_{k=1}^m q^{k-1} = \frac{1 - q^m}{1 - q}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

L'ammontare totale atteso delle scommesse è dato da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[2^{N \wedge m} - 1] &= p + 3qp + 7q^2p + \cdots + (2^m - 1)q^{m-1}p + (2^m - 1)q^m \\
&= 2p(1 + 2q + \cdots + (2q)^{m-1}) - p(1 + q + \cdots + q^{m-1}) + (2^m - 1)q^m \\
&= \begin{cases} \frac{1 - (2q)^m}{1 - 2q} & \text{se } p \neq \frac{1}{2}, \\ m & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Notiamo che il rapporto tra il profitto cumulativo atteso del giocatore e l'ammontare totale atteso delle scommesse coincide con il profitto atteso di una singola scommessa unitaria, ovvero $1 - 2q$ (o $2p - 1$). Questo non è un caso; infatti, attraverso lo studio del principio della “conservazione dell'equità” si vede come tutti i sistemi condividono questa proprietà. Il principio di **conservazione dell'equità** afferma che nessun sistema di scommesse può trasformare una sequenza di scommesse subequa in una scommessa superequa. Cominciamo formulando una versione molto semplice di questo risultato, adatta agli esempi della sezione precedente. Successivamente forniremo una versione più generale dello stesso risultato. Considerando le stesse condizioni viste in precedenza, sia X una variabile aleatoria con distribuzione $P(X = 1) = p$ e $P(X = -1) = q := 1 - p$, dove $0 < p < 1$,

e siano X_1, X_2, \dots una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione comune quella di X , con X_n che rappresenta il profitto del giocatore per unità di scommessa al colpo n . Consideriamo un sistema di scommesse B_1, B_2, \dots , dove B_n rappresenta l'importo scommesso al colpo n e dipende solo dai risultati dei colpi precedenti, ovvero

$$B_1 = b_1 \geq 0, \quad B_n = b_n(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq 0, \quad n \geq 2,$$

dove b_1 è una costante e b_n è una funzione deterministica di $n - 1$ variabili per ogni $n \geq 2$. La fortuna F_n del giocatore dopo n colpi è data da (3.?) , cioè:

$$F_n = F_0 + \sum_{l=1}^n B_l X_l, \quad n \geq 1,$$

dove F_0 rappresenta la fortuna iniziale del giocatore (una costante).

Teorema 2.0.3. *Sotto le condizioni sopra descritte, assumiamo che il gioco sia sfavorevole (o al massimo equo), quindi $p \leq \frac{1}{2}$. Supponiamo che le dimensioni delle scommesse siano uniformemente limitate, cioè esista una costante C tale che $0 \leq B_n \leq C$ per ogni $n \geq 1$. Sia N un tempo di arresto rispetto a $\{X_n\}_{n \geq 1}$ tale che $P(N < \infty) = 1$.*

(a) *Se $F_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$, allora*

$$\mathbb{E}[F_N] \leq F_0. \tag{2.13}$$

(b) *Supponiamo che $\mathbb{E}[N] < \infty$. Allora (2.13) vale; più in generale,*

$$\mathbb{E}[F_N - F_0] = \mathbb{E} \left[\sum_{l=1}^N B_l X_l \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{l=1}^N B_l \right] (2p - 1).$$

La conclusione a) afferma che, in un gioco subequo o equo con vincite a quota pari, giocato ripetutamente con colpi indipendenti e scommesse limitate uniformemente,

il profitto cumulativo atteso del giocatore non può essere positivo, indipendentemente dal sistema di scommesse utilizzato. La parte *a)* richiede che la fortuna del giocatore non diventi mai negativa e che il tempo di arresto sia finito con probabilità 1. La prima di queste due condizioni può essere garantita se il giocatore non scommette mai più di quanto possiede (cioè, $B_n \leq F_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$). La parte *b)* elimina questo requisito di non negatività sulla fortuna del giocatore, a fronte di richiedere che $\mathbb{E}[N]$ sia finito. Include inoltre la conclusione aggiuntiva *b)*, ovvero che il profitto cumulativo atteso del giocatore è uguale al prodotto del suo ammontare totale atteso delle scommesse e del profitto atteso di una singola scommessa unitaria. Se $p < \frac{1}{2}$, allora $\{F_n\}_{n \geq 0}$ è una supermartingala rispetto a $\{X_n\}$, mentre se $p = \frac{1}{2}$, allora è una martingala. Per verificarlo, notiamo che, per $p \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_n | X_1, \dots, X_{n-1}] &= \mathbb{E}[F_{n-1} + B_n X_n | X_1, \dots, X_{n-1}] = F_{n-1} + \mathbb{E}[B_n X_n | X_1, \dots, X_{n-1}] \\ &= F_{n-1} + B_n \mathbb{E}[X_n | X_1, \dots, X_{n-1}] = F_{n-1} + B_n \mathbb{E}[X_n] = F_{n-1} + B_n(2p - 1) \leq F_{n-1} \end{aligned}$$

con l'uguaglianza valida se $p = \frac{1}{2}$.

Capitolo 3

Il Criterio di Kelly

Quando si parla di operazioni di trading finanziario, l'allocazione del capitale è una questione fondamentale. Era il 1956 quando John Larry Kelly Jr. propose un suo metodo (oggi noto come *criterio di Kelly*) per risolvere problemi di trasmissione di informazioni affette da rumore o imperfette, trovando applicazione nella teoria della gestione del capitale e, in particolare, nel contesto delle scommesse e degli investimenti finanziari. Questo metodo fu successivamente applicato per calcolare la frazione ottimale del capitale da scommettere. Oltre al trading finanziario, il criterio di Kelly trova applicazione anche nei giochi da casinò, come il BlackJack e il Texas Hold'em Poker e nella gestione del capitale in operazioni su strumenti finanziari quali azioni, futures, opzioni e valute. Il criterio di Kelly può essere interpretato come una strategia per ottimizzare la frazione del capitale totale da investire su un numero infinito di puntate. Consideriamo, ad esempio, un gioco (come il lancio di una moneta) con una certa probabilità di vincita e quota associata. Il gioco viene ripetuto per un numero infinito di turni. A ogni turno si decide quale frazione del capitale totale scommettere. Se si perde, la somma puntata viene persa; se si vince, il profitto viene calcolato sulla base della quota offerta. Il criterio di Kelly è un metodo per determinare la frazione ottimale da

puntare a ogni turno, con l'obiettivo di massimizzare il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo. Consideriamo il processo $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ introdotto in (3.3), con B_n definita come in (3.1). Assumiamo inoltre che X_n sia definita come in (3.4) con $b = 1$, ovvero:

$$X_n = \begin{cases} a, & \text{con probabilità } p, \\ 0, & \text{con probabilità } r, \\ -1, & \text{con probabilità } q, \end{cases} \quad (3.1)$$

e che in più $\mathbb{E}[X_n] = ap - q > 0$, cioè la scommessa è favorevole per il giocatore. Poiché il gioco è favorevole, verrebbe naturale pensare che, per massimizzare il guadagno, convenga scommettere sempre tutto il proprio capitale, ovvero:

$$B_n = F_{n-1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Mostriamo che questa strategia è in realtà fallimentare, dimostrando che nel lungo termine ($n \rightarrow \infty$) si ha:

$$P(F_n = 0) \rightarrow 1.$$

Osserviamo innanzitutto che, dalla (3.2), se $B_n = F_{n-1}$, allora:

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n = F_{n-1} + F_{n-1} X_n = F_{n-1}(1 + X_n),$$

da cui, iterando:

$$F_n = F_0 \prod_{i=1}^n (1 + X_i).$$

Notiamo dunque che, se esiste un indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $X_i = -1$,

allora $F_n = 0$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
P(F_n = 0) &= P(\exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tale che } X_i = -1) \\
&= 1 - P(\forall i \in \{1, \dots, n\} X_i \neq -1) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \neq -1) \\
&= 1 - (P(X_1 \neq -1))^n = 1 - (p+r)^n \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $p+r = 1-q < 1$, quindi $(p+r)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Una strategia piú prudente consiste nel non scommettere l'intero capitale, ma solo una frazione $f \in (0, 1)$, ovvero:

$$B_n = f \cdot F_{n-1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

La domanda che ora ci si pone è: *qual è la frazione f ottimale da scommettere ad ogni round per massimizzare il capitale futuro?* Iniziamo osservando che, se $B_n = f \cdot F_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allora:

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n = F_{n-1} + f \cdot F_{n-1} X_n = F_{n-1}(1 + f X_n),$$

da cui, per iterazione, si ottiene:

$$F_n = F_0 \prod_{i=1}^n (1 + f X_i).$$

Definiamo quindi:

$$r_n(f) := \frac{1}{n} \ln \left(\frac{F_n}{F_0} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + f X_i). \tag{3.3}$$

Introduciamo ora la successione di variabili aleatorie $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ definita da:

$$Y_n := \ln(1 + f X_n), \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

In tal modo, possiamo riscrivere:

$$r_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (3.4)$$

Poiché $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d., e $Y_n = \ln(1 + fX_n)$, allora anche $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ è una sequenza i.i.d. Di conseguenza, applicando la *Legge dei Grandi Numeri* (vedi Proposizione 6.3.1), si ha:

$$r_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\ln(1 + fX_1)], \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Il valore $r_n(f)$ rappresenta il tasso di crescita del capitale del giocatore sui primi n round.

Definiamo infine:

$$\mu(f) := \mathbb{E}[\ln(1 + fX)], \quad (3.6)$$

che rappresenta il valore atteso del tasso di crescita logaritmico del capitale per una singola scommessa, in funzione della frazione f investita. Dove X è una variabile aleatoria con la stessa distribuzione di X_1 , si ha che $\mu(f)$ rappresenta il tasso di crescita del capitale del giocatore nel lungo periodo. Pertanto, per massimizzare il capitale accumulato, è opportuno voler massimizzare $\mu(f)$, e dunque studiare il comportamento della funzione

$$f \in [0, 1) \mapsto \mu(f),$$

e determinare i suoi punti di massimo. La proposizione seguente fornisce un'analisi a tal proposito.

Proposizione 4.0.1 Supponiamo che X sia distribuita come in 4.1 (in particolare: $P(X = -1) > 0$, $\mathbb{E}[X] > 0$ e X assume un numero finito di valori). Allora valgono le seguenti proprietà:

- (i) La funzione $f \in [0, 1) \mapsto \mu(f)$ è strettamente concava.

- (ii) Esiste un unico punto di massimo $f^* \in (0, 1)$ per $\mu(f)$.
- (iii) Esiste un unico punto $f_0 \in (f^*, 1)$ tale che $\mu(f_0) = 0$. Inoltre, $\mu(f) > 0$ per ogni $f \in (0, f_0)$ e $\mu(f) < 0$ per ogni $f \in (f_0, 1)$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\mu'(f) = \frac{d}{df} \mathbb{E}[\ln(1 + fX)] = \mathbb{E} \left[\frac{X}{1 + fX} \right],$$

e quindi

$$\mu''(f) = \frac{d}{df} \mu'(f) = \frac{d}{df} \mathbb{E} \left[\frac{X}{1 + fX} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{-X^2}{(1 + fX)^2} \right] < 0 \quad \text{per ogni } f \in (0, 1).$$

Poiché $\mu''(f) < 0$ su $[0, 1)$, la funzione $\mu(f)$ è strettamente concava: abbiamo quindi dimostrato il punto (i).

Per dimostrare (ii), osserviamo che:

$$\mu'(0) = \mathbb{E}[X] > 0.$$

Inoltre, poiché $P(X = -1) > 0$, il termine $\ln(1 + fX)$ tende a $-\infty$ per $f \rightarrow 1^-$.

Infatti,

$$\lim_{f \rightarrow 1^-} \mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + fX)] = \sum_k \ln(1 + fk) \cdot P(X = k) \rightarrow -\infty, \quad (3.7)$$

perché $\ln(1 + f(-1)) = \ln(1 - f) \rightarrow -\infty$ e $P(X = -1) > 0$.

Analogamente,

$$\lim_{f \rightarrow 1^-} \mu'(f) = \mathbb{E} \left[\frac{X}{1 + fX} \right] = \sum_k \frac{k}{1 + fk} \cdot P(X = k) \rightarrow -\infty,$$

per lo stesso motivo.

Dalla concavità, dalla positività di $\mu'(0)$ e dal limite negativo di $\mu'(f)$ per $f \rightarrow 1^-$, segue che $\mu(f)$ ammette un unico massimo $f^* \in (0, 1)$. Questo dimostra

il punto (ii). Per quanto riguarda il punto (iii), poiché $\mu(f)$ è strettamente concava, crescente su $[0, f^*]$ e decrescente su $[f^*, 1)$, e poiché

$$\lim_{f \rightarrow 1^-} \mu(f) = -\infty,$$

esiste un unico punto $f_0 \in (f^*, 1)$ tale che $\mu(f_0) = 0$. diremo dunque che:

$$\mu(f) \begin{cases} > 0 & \text{se } f \in (0, f_0), \\ < 0 & \text{se } f \in (f_0, 1). \end{cases}$$

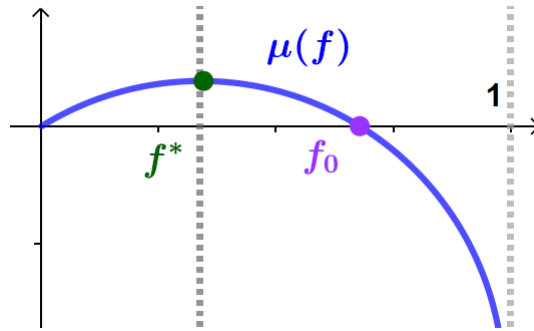


Fig. 3.1: Grafico della funzione $f \in [0, 1) \mapsto \mu(f)$

Il **sistema** o **criterio di Kelly** è dunque un sistema di scommesse in cui viene investita, ad ogni round, la frazione f^* del capitale (dove f^* è la frazione ottimale determinata nella Proposizione 4.0.1)

Esempio 4.1.11. Supponiamo di ripetere più volte la seguente scommessa: per ogni euro scommesso, con probabilità $\frac{1}{3}$ vinciamo 9 euro, mentre con probabilità $\frac{2}{3}$ perdiamo 1 euro.

Se denotiamo con X il profitto per una singola scommessa, allora:

$$X = \begin{cases} 9, & \text{con probabilità } \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{con probabilità } \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Verifichiamo che le ipotesi della Proposizione 4.0.1. sono soddisfatte:

(i) $P(X = -1) = \frac{2}{3} > 0$;

(ii) $\mathbb{E}[X] = 9 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3} > 0$;

(iii) X assume un numero finito di valori.

Cerchiamo ora di determinare la frazione f del capitale da scommettere per massimizzare il profitto nel lungo periodo. Consideriamo la funzione:

$$\mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + fX)] = \ln(1 + 9f) \cdot \frac{1}{3} + \ln(1 - f) \cdot \frac{2}{3}.$$

Dalla Proposizione 4.0.1 sappiamo che $\mu(f)$ ammette un unico punto di massimo. Possiamo quindi trovarlo cercando lo zero della derivata prima:

$$\begin{aligned} \mu'(f) &= \frac{9}{1 + 9f} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{1 - f} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{1 + 9f} - \frac{2}{3 - 3f} \\ &= \frac{7 - 27f}{(1 + 9f)(3 - 3f)}. \end{aligned}$$

Ponendo $\mu'(f) = 0$ otteniamo:

$$7 - 27f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{7}{27}.$$

Concludiamo dunque che il valore ottimale della frazione da scommettere ad ogni round è:

$$f^* = \frac{7}{27}.$$

In altre parole, per massimizzare il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo, il giocatore dovrebbe scommettere ogni volta il $\frac{7}{27}$ (circa il 25.9%) del proprio capitale. Il tasso di crescita logaritmico di lungo periodo sarà quindi $\mu(f^*)$.

Nel caso generale in cui X è distribuita come in (4.1), si può fornire una formula esplicita per f^* , come illustrato nel prossimo risultato. **Proposizione 4.0.2.** Se X è distribuita come in (4.1) e $\mathbb{E}[X] = ap - q > 0$, allora il valore f^* predetto dalla Proposizione 4.0.1 è dato da:

$$f^* = \frac{ap - q}{a(p + q)} = \frac{\mathbb{E}[X | X \neq 0]}{a}.$$

In particolare, se $P(X = 0) = r = 0$, allora $q = 1 - p$ e si ha:

$$f^* = \frac{(a+1)p - 1}{a} = \frac{\mathbb{E}[X]}{a}. \quad (3.8)$$

Dimostrazione. Vogliamo determinare il punto critico della funzione $\mu(f) = \mathbb{E}[\log(1 + fX)]$. Osserviamo che, dato che X assume solo i valori a , 0 e -1 , si ha:

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mathbb{E}[\log(1 + fX)] \\ &= \log(1 + fa) \cdot p + \log(1 + f \cdot 0) \cdot r + \log(1 - f) \cdot q \\ &= \log(1 + fa) \cdot p + \log(1 - f) \cdot q. \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$\mu'(f) = \frac{ap}{1 + fa} - \frac{q}{1 - f}.$$

Ponendo $\mu'(f) = 0$ otteniamo:

$$\frac{ap}{1 + fa} = \frac{q}{1 - f} \quad \Rightarrow \quad ap(1 - f) = q(1 + fa)$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned} ap - apf &= q + qfa \\ ap - q &= apf + aqf = af(p + q) \\ \Rightarrow f &= \frac{ap - q}{a(p + q)}. \end{aligned}$$

Dunque:

$$f^* = \frac{ap - q}{a(p + q)}.$$

Poiché $\mathbb{E}[X] = ap - q$, possiamo riscrivere:

$$f^* = \frac{\mathbb{E}[X]}{a(p + q)}.$$

Ma $p + q = 1 - r = P(X \neq 0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X | X \neq 0] \cdot P(X \neq 0) + \mathbb{E}[X | X = 0] \cdot P(X = 0) \\ &= \mathbb{E}[X | X \neq 0] \cdot P(X \neq 0) + 0 \cdot P(X = 0) \\ &= \mathbb{E}[X | X \neq 0] \cdot P(X \neq 0).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{E}[X | X \neq 0] = \frac{\mathbb{E}[X]}{P(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{E}[X]}{p + q},$$

e concludiamo che:

$$f^* = \frac{\mathbb{E}[X | X \neq 0]}{a}.$$

La prossima proposizione descrive l'andamento del capitale F_n al crescere di n , nel caso in cui si scommetta una porzione fissa f del proprio capitale ad ogni round. Denoteremo il capitale con $F_n(f)$, per evidenziare la dipendenza dalla frazione f scommessa. Inoltre, indicheremo con f^* la porzione ottimale di capitale da scommettere, ovvero quella che massimizza il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo (come definito nella Proposizione 4.0.1).

Proposizione 4.0.3. Siano X e f^* come nella Proposizione 4.0.1. Allora, per ogni $f \in [0, 1)$, valgono le seguenti affermazioni:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_n(f)}{F_0} \right)^{1/n} = e^{\mu(f)} \quad \text{q.c.};$$

(ii) Se $\mu(f) < 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = 0 \quad \text{q.c.};$

(iii) Se $\mu(f) > 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = +\infty \quad \text{q.c.};$

(iv) Se $f = f^*$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(f^*)}{F_n(f)} = +\infty \quad \text{q.c.} \quad \text{per ogni } f \in [0, 1) \setminus \{f^*\};$$

(v) Se $\sigma(f) := \sqrt{\text{Var}(\ln(1 + fX))} > 0$, allora:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(f)} \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{F_n(f)}{F_0} \right) - \mu(f) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

In questa proposizione:

- $\mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + fX)]$ è il tasso di crescita logaritmico atteso;
- $F_n(f)$ rappresenta il capitale del giocatore dopo n round, scommettendo la frazione f del capitale ad ogni round;
- la convergenza "q.c." indica convergenza quasi certa;
- la convergenza " \xrightarrow{d} " indica convergenza in distribuzione.

Riprendendo i risultati ottenuti nel precedente esempio, possiamo osservare in pratica le proprietà descritte:

Esempio 4.1.2 Abbiamo dunque determinato che la frazione ottimale da scommettere è:

$$f^* = \frac{7}{27}.$$

Dalla Proposizione 4.0.1 sappiamo che esiste un unico punto $f_0 \in (f^*, 1)$ tale che $\mu(f_0) = 0$, e inoltre $\mu(f) > 0$ per ogni $f < f_0$. Supponiamo ora di scommettere una frazione $f = \frac{1}{9}$ del capitale a ogni round. Cerchiamo di rispondere alle seguenti domande:

- Calcolare il limite quasi certo di $F_n(f)$ per $n \rightarrow \infty$;
- Calcolare il limite quasi certo del rapporto $\frac{F_n(f)}{F_n(f^*)}$ per $n \rightarrow \infty$.

Risposta a (i). Notiamo che $f = \frac{1}{9} < \frac{7}{27} = f^* < f_0$. Poiché $f < f_0$, dalla Proposizione 4.0.3., si ha che $\mu(f) > 0$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = +\infty \quad \text{quasi certamente.}$$

Risposta a (ii). Dalla stessa proposizione, sappiamo che $F_n(f^*)$ cresce asintoticamente più velocemente di $F_n(f)$ per ogni $f \neq f^*$ tale che $\mu(f) > 0$. In particolare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(f)}{F_n(f^*)} = 0 \quad \text{quasi certamente.}$$

Di seguito sono presentate delle simulazioni numeriche che illustrano graficamente l'andamento del capitale $F_n(f)$ nel tempo. Sull'asse delle ascisse è riportato l'indice temporale n , mentre sull'asse delle ordinate è rappresentato il valore del capitale $F_n(f)$.

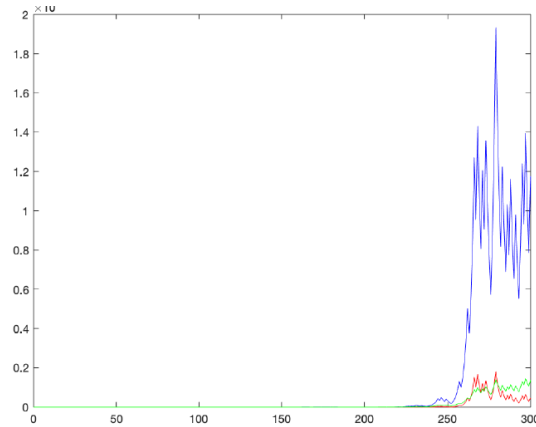


Fig. 3.2

Nella Figura 4.2 sono rappresentate tre curve che illustrano l'andamento del capitale $F_n(f)$ nel tempo per diverse scelte della frazione f scommessa ad ogni round:

- **La curva blu** corrisponde a $F_n(f^*)$, ovvero all'andamento del capitale usando la frazione ottimale f^* che massimizza il tasso di crescita logaritmico $\mu(f)$;
- **La curva verde** rappresenta $F_n(f)$ per un valore $f < f^*$,
- **La curva rossa** corrisponde a $F_n(f)$ per un valore $f \in (f^*, f_0)$,

Come previsto dalla Proposizione 4.0.3, tutte le curve con $\mu(f) > 0$ mostrano una crescita esponenziale del capitale, ma $F_n(f^*)$ domina nel lungo periodo. Si può dunque osservare che $F_n(f^*)$ risulta nettamente superiore, nel lungo periodo, rispetto a $F_n(f)$ per ogni $f \in (0, f^*) \cup (f^*, f_0)$. Le altre due curve, corrispondenti a frazioni subottimali, presentano un comportamento tra loro comparabile, il cui andamento dipende da quanto il tasso di crescita $\mu(f)$ si discosta da $\mu(f^*)$. In ogni caso, si osserva che il profitto cresce esponenzialmente nel tempo, coerentemente con il fatto che $\mu(f) > 0$, come previsto dalla Proposizione 4.0.3.

Nella Figura sottostante, invece, è riportato il grafico della traiettoria $F_n(f)$ per valori di $f > f_0$. In questo caso si nota un chiaro decadimento esponenziale del capitale, dovuto al fatto che il tasso di crescita $\mu(f)$ è negativo. Anche questo risultato è in perfetto accordo con quanto affermato dalla Proposizione 4.0.3.

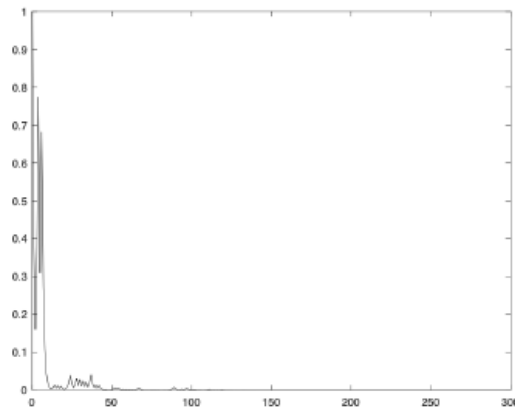


Fig. 3.3

Capitolo 4

Il modello di Markowitz

Harry Markowitz è considerato uno dei pionieri della moderna teoria del portafoglio. Markowitz nel 1952 pubblicò un articolo fondamentale intitolato *Portfolio Selection* in cui introdusse un approccio quantitativo alla costruzione di portafogli finanziari. L'idea centrale della sua teoria è che un investitore razionale non dovrebbe considerare solo il rendimento atteso di un investimento, ma anche il rischio associato, misurato attraverso la varianza (o la deviazione standard) dei rendimenti. Markowitz dimostrò che è possibile costruire portafogli efficienti, ovvero combinazioni di *asset* che offrono il massimo rendimento atteso possibile per un dato livello di rischio, o, viceversa, il minimo rischio possibile per un dato rendimento atteso. Questo insieme di portafogli efficienti viene detto **frontiera efficiente**. Nel suo articolo, Markowitz sostiene che sia possibile costruire portafogli ottimali in cui i rendimenti vengano massimizzati, mentre i rischi siano ridotti al minimo. Per ottenere questo risultato l'investitore deve detenere una pluralità di titoli, distribuendo il proprio capitale tra essi. La decisione non deve basarsi esclusivamente sui rendimenti attesi dei singoli titoli, ma anche sulla correlazione tra di essi. Questo approccio è noto come *mean-variance approach*, poiché nella determinazione delle allocazioni ottimali concorrono sia la media dei rendimenti

attesi, sia la loro varianza (volatilità). L'assunto fondamentale è che gli investitori, in possesso di informazioni complete, prendano decisioni razionali ed evitino di assumersi rischi non necessari.

Il modello di Markowitz ha posto le basi per la moderna teoria della finanza e viene tuttora utilizzato, con opportune modifiche, in numerosi ambiti legati alla gestione del rischio e alla costruzione di strategie di investimento. Nelle prossime sezioni confronteremo questo approccio con il criterio di Kelly, evidenziando analogie, differenze e implicazioni pratiche.

4.1 Il modello di Markowitz e il modello media-varianza

Il modello elaborato da Markowitz si fonda su alcune ipotesi di base che permettono di arrivare alla selezione ottimale di un portafoglio. Tali assunti sono i seguenti:

- I rendimenti degli strumenti finanziari sono *i.i.d.* (indipendenti e identicamente distribuiti) e seguono una distribuzione normale;
- La deviazione standard dei rendimenti rappresenta una misura adeguata del rischio;
- I mercati sono pienamente efficienti e non presentano frizioni, come tasse, costi di transazione o segmentazioni;
- L'orizzonte temporale dell'investimento considerato è di un solo periodo, pertanto non si tiene conto del reinvestimento dei capitali nel tempo.

Alla luce di queste ipotesi, Markowitz propone un approccio alla selezione dei portafogli basato su due dimensioni fondamentali: il rendimento atteso e la varian-

za. Tale metodologia prende il nome di *modello media-varianza* proprio perché si assume che la distribuzione normale dei rendimenti renda sufficiente considerare solo questi due parametri per rappresentare l'intero profilo di rischio-rendimento di un portafoglio.

In particolare, l'obiettivo è costruire un portafoglio che, dato un certo livello di rendimento atteso, minimizzi la varianza complessiva del portafoglio stesso, ovvero il suo rischio. Questo porta all'identificazione di curve dette *curve di iso-rendimento*, ciascuna delle quali rappresenta l'insieme dei portafogli che garantiscono lo stesso rendimento atteso, ma composti da titoli diversi o da combinazioni diverse degli stessi titoli.

Per determinare il portafoglio che presenta la varianza minima, dato un prefissato livello di rendimento associato a una specifica curva di iso-rendimento, Markowitz introduce il concetto di *curve di iso-varianza*. Queste ultime rappresentano l'insieme dei portafogli che condividono lo stesso livello di rischio (misurato tramite la varianza), ma che possono differire per composizione e ponderazione degli strumenti finanziari.

Combinando l'analisi delle curve di iso-rendimento con quelle di iso-varianza, si giunge alla definizione della *frontiera di minima varianza*, ovvero l'insieme dei portafogli che, per ogni dato livello di rendimento atteso, presentano la più bassa varianza possibile. Ogni punto appartenente a questa frontiera identifica una combinazione specifica di *asset*, con pesi opportunamente determinati per ottimizzare il profilo rischio-rendimento.

Il modello può essere formulato sia ammettendo la possibilità di effettuare vendite allo scoperto, sia vincolando i pesi ad assumere solo valori positivi (ossia escludendo le vendite allo scoperto). All'interno dello spazio rischio-rendimento, l'insieme dei portafogli efficienti secondo l'approccio *mean-variance* definisce la cosiddetta **frontiera efficiente di Markowitz**.

Tale frontiera rappresenta il miglior compromesso possibile tra rendimento atteso e rischio, per ogni livello di rendimento o, viceversa, per ogni livello di rischio accettato.

- I portafogli che si trovano al di sotto della frontiera efficiente sono considerati *inefficienti*, in quanto esistono portafogli che offrono un rendimento atteso più elevato a parità di rischio, oppure un rischio più basso a parità di rendimento.
- I portafogli situati al di sopra della frontiera non sono invece realizzabili, poiché si collocano al di fuori dello spazio delle combinazioni possibili tra asset.
- Il punto della frontiera che presenta la deviazione standard minima corrisponde al cosiddetto **portafoglio a varianza minima globale** (*Global Minimum-Variance Portfolio*, GMVP), il quale rappresenta la combinazione di titoli meno rischiosa ottenibile.

Per semplicità, supponiamo che l'ammontare totale di ricchezza da investire sia pari a 100, dato che l'obiettivo dell'analisi è determinare le proporzioni percentuali da allocare nei diversi titoli. Consideriamo n attività finanziarie e indichiamo con x_1, x_2, \dots, x_n le quote di investimento associate a ciascun titolo. Queste quote devono rispettare il seguente vincolo di *budget*:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Escludendo la possibilità di effettuare vendite allo scoperto, imponiamo inoltre un vincolo di non negatività sui coefficienti di allocazione:

$$x_i \geq 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

Indicando con r_i il rendimento dell'attività i -esima e con r_p il rendimento complessivo del portafoglio, si ha:

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i$$

Poiché, come detto, i parametri fondamentali per la valutazione di un portafoglio sono il valore atteso e la varianza dei rendimenti, possiamo scrivere:

$$\mathbb{E}(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

dove $\mu_i = \mathbb{E}(r_i)$ rappresenta il rendimento atteso dell'attività i -esima. La varianza del rendimento del portafoglio è data da:

$$\sigma_{r_p}^2 = \text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}$$

dove $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]$ rappresenta la covarianza tra i rendimenti r_i e r_j . In particolare, per $i = j$ si ottiene:

$$\sigma_{ii} = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)^2] = \text{Var}(r_i),$$

cioè la varianza del rendimento dell'attività i -esima. Utilizzando la notazione matriciale, possiamo riscrivere le espressioni di valore atteso e varianza nel modo seguente:

valore atteso

$$\mathbb{E}(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \mu^T x$$

dove $\mu = [\mathbb{E}(r_1), \dots, \mathbb{E}(r_n)]^T$ è il vettore dei rendimenti attesi delle n attività finanziarie e $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ è il vettore dei coefficienti di ponderazione.

varianza

$$\sigma_{r_p}^2 = \text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = x^T V x$$

dove V è la matrice varianza-covarianza, i cui elementi σ_{ij} rappresentano le covarianze tra le attività i e j . La forma quadratica $x^T V x$ è semidefinita positiva, in quanto rappresenta la varianza del rendimento del portafoglio. Tale forma diventa definita positiva se si assume l'assenza di attività con rendimento certo oppure di titoli perfettamente correlati negativamente. Questa proprietà garantisce che la varianza sia sempre maggiore o uguale a zero per ogni possibile combinazione di pesi del portafoglio. Quando un investitore si trova a dover scegliere tra più portafogli, prediligerà sempre quello con rendimento atteso maggiore e rischio (varianza) minore. In termini formali, se:

$$\mu^T x_1 \geq \mu^T x_2 \quad \text{e} \quad x_1^T V x_1 \leq x_2^T V x_2,$$

allora x_1 è preferibile (o almeno equivalente) rispetto a x_2 . Se almeno una delle due disuguaglianze risulta stretta, allora x_2 è *dominato* da x_1 e viene considerato inefficiente. Riassumendo, la formulazione generale del modello media-varianza di Markowitz è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x^T V x \\ \text{soggetto a} \quad \mu^T x = \mu^* \\ u^T x = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Si osserva che il problema include un vincolo di disuguaglianza, il quale impone l'utilizzo di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) per determinare soluzioni ottimali. In sostanza, l'ottimizzazione del portafoglio secondo il modello di Markowitz si traduce nell'individuare un insieme di attività finanziarie tale per cui:

- non è possibile incrementare il rendimento atteso senza aumentare il rischio,
- non è possibile ridurre il rischio senza sacrificare rendimento.

Questo rappresenta il nucleo dei problemi multi-obiettivo, nei quali si cerca un equilibrio tra due grandezze contrastanti: il rendimento e il rischio. Le soluzioni efficienti a tale problema costituiscono la cosiddetta frontiera efficiente, lungo la quale si trovano i portafogli ottimali in senso paretiano (efficienza allocativa).

4.2 Il portafoglio a varianza minima

Partiamo dalla seguente espressione:

$$f(x) = -\mu^T x + \lambda \sqrt{x^T \Sigma x}, \quad \lambda > 0$$

a partire dalla quale è possibile formulare il seguente problema di ottimizzazione:

$$(P) \quad \begin{cases} \min_x & -\mu^T x + \lambda \sqrt{x^T \Sigma x} \\ \text{soggetto a:} & b^T x = c \\ & \lambda > 0, \quad c \neq 0 \end{cases}$$

dove μ e b sono vettori in \mathbb{R}^n e Σ è una matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva. Osserviamo innanzitutto che $f(x)$ è una funzione convessa, in quanto somma di una funzione lineare e di una funzione convessa (la radice quadrata di una forma quadratica positiva definita). Di conseguenza, il problema (P2) ammette una soluzione ottimale unica sotto condizioni regolari. Possiamo anche considerare la funzione:

$$f_1(x) = \mu^T x - \lambda \sqrt{x^T \Sigma x}, \quad \lambda > 0$$

soggetta allo stesso vincolo del problema precedente. In questo caso, $f_1(x)$ risulta strettamente concava, il che consente di trasformare il problema di minimizzazione di $f(x)$ in un problema di massimizzazione di $f_1(x)$ semplicemente sostit-

tuendo $-\mu$ con μ nella formulazione analitica. Per rendere il modello più aderente al contesto della selezione del portafoglio ottimale, introduciamo la funzione:

$$q(x) := f(x) = -\mu^T x + \lambda \sqrt{x^T \Sigma x}, \quad \lambda > 0$$

che esprime un compromesso tra il rendimento atteso del portafoglio (espresso da $\mu^T x$) e la sua rischiosità (espressa dalla deviazione standard $\sqrt{x^T \Sigma x}$), pesata tramite il parametro λ .

Sia il vincolo di budget espresso dalla seguente condizione:

$$u^T x = 1,$$

dove u è un vettore di dimensione n i cui elementi sono tutti uguali a 1. All'interno di questo contesto, il modello assume la forma:

$$q(x) = -\mathbb{E}(P) + \lambda \cdot \text{Var}(P),$$

dove $\mathbb{E}(P)$ rappresenta il valore atteso del rendimento del portafoglio e $\text{Var}(P)$ la sua varianza. Se invece consideriamo la deviazione standard del portafoglio, la funzione obiettivo diventa:

$$q(x) = -\mathbb{E}(P) + \lambda \sqrt{\text{Var}(P)} = f(x).$$

Per risolvere il problema di ottimizzazione associato, si considera una partizione delle variabili decisionali. In particolare, si scompongono i vettori x , μ e u nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x^T &= \begin{pmatrix} x_1^T & x_n \end{pmatrix}, & \text{con } x_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix}^T, \\ \mu^T &= \begin{pmatrix} \mu_1^T & \mu_n \end{pmatrix}, & \text{con } \mu_1 &= \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \end{bmatrix}^T, \\ u^T &= \begin{pmatrix} u_1^T & 1 \end{pmatrix}, & \text{con } u_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice di covarianza Σ è anch'essa partizionata come segue:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \sigma_1 \\ \sigma_1^T & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

dove $\sigma_1 = [\sigma_{1n}, \dots, \sigma_{n-1,n}]^T$. Poiché Σ è definita positiva, lo sarà anche la matrice Q e di dimensione $(n-1) \times (n-1)$.

$$Q = \Sigma_{11} - u_1 \sigma_1^T - \sigma_1 u_1^T + \sigma_{nn} u_1 u_1^T$$

risulta essere definita positiva, ed è di dimensione $(n-1) \times (n-1)$. Definiamo ora il seguente vettore:

$$\delta = \mu_n u_1 - \mu_1,$$

dove μ_n è il rendimento atteso dell' n -esima attività finanziaria e μ_1 il vettore dei rendimenti attesi di $n-1$ attività. Il vettore u_1 è il vettore colonna di dimensione $(n-1)$ con tutti gli elementi pari a 1. Sotto l'assunzione che:

$$\lambda > \sqrt{\delta^T Q^{-1} \delta},$$

allora il problema di minimizzazione della funzione $f(x)$ soggetto al vincolo di budget $u^T x = 1$ ammette soluzione. In particolare, la soluzione ottima x^* è data da:

$$x^* = (u_1^T \Sigma^{-1} u_1)^{-1} \Sigma^{-1} u_1 + (\lambda^2 - \delta^T Q^{-1} \delta)^{-1/2} (u_1^T \Sigma^{-1} u_1)^{-1/2} \begin{pmatrix} \delta^T Q^{-1} \\ -u_1^T Q^{-1} \delta \end{pmatrix}.$$

4.3 Il portafoglio con il Criterio di Kelly

Dopo aver approfondito la metodologia proposta da Markowitz per la costruzione di portafogli efficienti, è ora opportuno analizzare l'approccio alternativo introdotto da Kelly, che come abbiamo visto è noto come **criterio di Kelly**, applicato alla composizione di portafogli. Il criterio di Kelly, originariamente formulato

per trovare l'allocazione ottimale di capitale da investire in un solo bene, può essere esteso alla costruzione di portafogli contenenti più asset. In questo contesto, parleremo di **portafoglio di Kelly** per riferirci al portafoglio ottimizzato. Supponiamo di disporre di un attivo privo di rischio, cui viene assegnata una quota f_0 , e di n attivi rischiosi con quote f_1, f_2, \dots, f_n . Sia r il tasso di rendimento del bene privo di rischio (che coincide anche con il tasso pagato in caso di vendita allo scoperto). Indichiamo con $\Sigma = (s_{ij})$ la matrice varianza-covarianza dei rendimenti degli asset rischiosi e con $M = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ il vettore delle aspettative dei rendimenti. Il rendimento atteso del portafoglio è dato da:

$$\mu = f_0 r + \sum_{i=1}^n f_i \mu_i = r + \sum_{i=1}^n f_i (\mu_i - r) = r + f^T (M - R), \quad (4.1)$$

dove $R = r \cdot \mathbf{1}_n$ è il vettore dei tassi privi di rischio replicato n volte. La varianza del portafoglio risulta invece:

$$\sigma^2 = f^T \Sigma f. \quad (4.2)$$

L'obiettivo del criterio di Kelly è la massimizzazione del tasso di crescita logaritmico a lungo termine, definito da:

$$g_\infty(f) = r + f^T (M - R) - \frac{1}{2} f^T \Sigma f. \quad (4.3)$$

Il problema di ottimizzazione consiste dunque nel risolvere:

$$\max_f g_\infty(f),$$

La soluzione ottimale, detta frazione di Kelly, è ottenuta imponendo la condizione del primo ordine e risulta:

$$f^* = \Sigma^{-1} (M - R). \quad (4.4)$$

Affinchè la soluzione sia unica e ben definita, è necessario che la matrice Σ sia invertibile, ovvero positiva definita. In particolare, se gli *asset* rischiosi sono incorrelati tra loro, allora Σ è una matrice diagonale e la frazione di Kelly diviene:

$$f_i^* = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2}, \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

I portafogli costruiti secondo il criterio di Kelly sono ottimizzati per massimizzare il tasso di crescita atteso del capitale, in assenza di leva finanziaria e senza ricorrere alla vendita allo scoperto. Tuttavia, la soluzione non vincolata dell'Equazione può generare nei portafogli somme dei pesi superiori all'unità, cioè con leva implicita o la presenza di posizioni corte. Per evitare queste complicazioni, bisogna considerare una formulazione vincolata del problema di massimizzazione del tasso di crescita, definita come segue:

$$g^* = \arg \max_f \left[r + f^T (M - R) - \frac{1}{2} f^T \widehat{\Sigma} f \right], \quad (4.6)$$

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{i=1}^n f_i \leq 1, \quad 0 \leq f_i \leq 1 \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

In questo modello:

- r rappresenta il tasso *risk-free*;
- $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ è il vettore dei pesi assegnati agli asset rischiosi;
- $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ è il vettore dei rendimenti attesi;
- $\widehat{\Sigma}$ è la stima della matrice varianza-covarianza dei rendimenti.

Il vincolo $\sum f_i \leq 1$ garantisce che il capitale sia completamente investito ma non oltre l'intero ammontare disponibile (assenza di leva), mentre le condizioni $0 \leq f_i \leq 1$ escludono posizioni corte. Il problema di ottimizzazione quadratica descritto

in (4.6) consente di determinare la frazione ottimale di ricchezza da allocare in ciascun asset rischioso, tenendo conto del trade-off tra rischio e rendimento in un contesto in cui sono compresi vincoli di mercato.

Capitolo 5

Dati Utilizzati e Metodo di Analisi

In questo capitolo viene descritto il paniere dei titoli selezionati per effettuare l'analisi empirica. In particolare, vengono condotte analisi statistiche sui prezzi e sui rendimenti storici dei titoli considerati. Tale studio rappresenta un prerequisito fondamentale prima di procedere con la modellizzazione dell'*asset allocation* del portafoglio secondo i modelli trattati nei capitoli precedenti.

5.1 Selezione degli Asset

La selezione degli strumenti finanziari da includere nei portafogli costruiti secondo il criterio di Kelly e il modello di Markowitz riveste un ruolo cruciale. In questa analisi, sono stati presi in considerazione 40 titoli azionari appartenenti al *FTSE MIB*, principale indice della Borsa Italiana. I dati storici dei prezzi sono stati reperiti dal sito *Yahoo Finance*, considerando l'intervallo temporale compreso tra il 1 agosto 2023 e il 1 agosto 2024. Per ciascun titolo, sono stati utilizzati i prezzi di chiusura adjusted, ovvero corretti per dividendi distribuiti e frazionamen-

ti azionari, per ottenere una rappresentazione coerente e realistica dei rendimenti effettivamente ottenibili da un investitore. Gli asset selezionati per l'analisi sono elencati nella seguente tabella.

Tabella 5.1: Titoli selezionati con relativi Ticker e Settori

Titolo	Ticker	Settore
Amplifon	AMP.MI	Sanità
Azimut	AZM.MI	Finanziario
Banco BPM	BAMI.MI	Finanziario
Brunello Cucinelli	BC.MI	Consumi Discrezionali
Banca Mediolanum	BMED.MI	Finanziario
Banca Monte Paschi Siena	BMPS.MI	Finanziario
Banca Popolare di Sondrio	BPSO.MI	Finanziario
Enel	ENEL.MI	Utilities
Eni	ENI.MI	Energia
Erg	ERG.MI	Energia
FinecoBank	FBK.MI	Finanziario
Generali	G.MI	Finanziario
Intesa Sanpaolo	ISP.MI	Finanziario
Iveco Group	IVG.MI	Industriale
Leonardo	LDO.MI	Industriale
Mediobanca	MB.MI	Finanziario
Pirelli	PIRC.MI	Consumi Discrezionali
Poste Italiane	PST.MI	Finanziario
Ferrari	RACE.MI	Consumi Discrezionali
Stellantis	STLAM.MI	Consumi Discrezionali
Unicredit	UCG.MI	Finanziario
Unipol	UNI.MI	Finanziario

5.2 Analisi Statistica dei Dati

Una volta raccolti i dati necessari per l'analisi, i rendimenti giornalieri sono stati calcolati secondo la formula:

$$r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (5.1)$$

dove:

- r_t rappresenta il rendimento al tempo t ;
- P_t indica il prezzo di chiusura *adjusted* al tempo t ;
- P_{t-1} corrisponde al prezzo di chiusura *adjusted* al tempo $t - 1$.

Attraverso l'utilizzo del linguaggio Python, sono stati calcolati i quattro momenti principali della distribuzione dei rendimenti: media, varianza, skewness e curtosi. La media descrive il valore centrale attorno al quale si concentra la distribuzione dei dati, mentre la varianza misura la dispersione dei rendimenti rispetto alla media, rappresentando quindi il grado di rischio associato all'attività finanziaria. La skewness, ovvero il terzo momento centrato e normalizzato, fornisce informazioni sull'asimmetria della distribuzione. Se il valore è positivo, la distribuzione presenta una coda più lunga a destra; se negativo, la coda si estende maggiormente verso sinistra. In assenza di skewness, la distribuzione risulta simmetrica. La curtosi, o kurtosis, rappresenta il quarto momento centrato normalizzato e indica la "pienezza" della distribuzione, ovvero la tendenza a generare valori estremi. Una curtosi elevata suggerisce la presenza di code pesanti rispetto a una distribuzione normale. Questi due ultimi momenti sono fondamentali per testare l'ipotesi di normalità dei rendimenti, una delle assunzioni chiave alla base del modello media-varianza proposto da Markowitz. Eventuali deviazioni da tale ipotesi possono compromettere l'affidabilità dei risultati ottenuti con il modello tradizionale e rendere necessaria l'adozione di approcci più robusti.

5.2.1 Verifica della Normalità dei Rendimenti

Al fine di valutare l'adeguatezza dell'assunzione di normalità nella distribuzione dei rendimenti, è stato effettuato il **test di Shapiro-Wilk** tramite il linguaggio **Python**. Questo test statistico consente di verificare se una variabile casuale X segue una distribuzione normale. L'ipotesi nulla del test è la seguente:

\mathcal{H}_0 : La variabile casuale X segue una distribuzione normale

. Tale ipotesi viene rifiutata se il *p-value* restituito dal test risulta inferiore a una soglia di significatività α prefissata, tipicamente pari a 0,05.

Dall'applicazione del test di Shapiro-Wilk alla maggior parte dei titoli considerati, è emerso che il *p-value* non risulta significativo, suggerendo il rifiuto dell'ipotesi nulla. Questo indica che, per molti titoli, i rendimenti storici non seguono una distribuzione normale. Tuttavia, ai fini dell'analisi condotta in questa tesi, assumeremo comunque che i rendimenti siano normalmente distribuiti. Tale ipotesi, seppur non pienamente confermata dai dati, rappresenta un presupposto teorico fondamentale del modello Media-Varianza di Markowitz e consente di mantenere la coerenza formale con l'impianto metodologico adottato.

Nome	Media	Dev. Std.	Skewness	Kurtosi	S.W. P value
AMP.MI	-0,0001	0,0181	0,1482	1,1196	0.0031
AZM.MI	0,0005	0,0123	-1,0772	4,0208	0.0000
BAMI.MI	0,0017	0,0174	-0,7466	3,8428	0.0000
BC.MI	0,0006	0,0187	0,0707	2,2479	0.0001
BMED.MI	0,0013	0,0113	-0,6337	3,1275	0.0000
BMPS.MI	0,0029	0,0268	-0,3376	1,8042	0.0007
BPSO.MI	0,0022	0,0181	-0,2317	0,8085	0.0570
ENEL.MI	0,0005	0,0104	-0,0238	0,8020	0.0828
ENI.MI	0,0005	0,0109	-0,2259	0,5199	0.0547
ERG.MI	0,0000	0,0150	0,2902	2,4031	0.0000
FBK.MI	0,0007	0,0169	-0,7136	6,6390	0.0000
G.MI	0,0011	0,0085	0,0326	1,1853	0.0135
ISP.MI	0,0018	0,0131	-1,3670	8,8938	0.0000
IVG.MI	0,0004	0,0248	-0,8274	8,1890	0.0000
LDO.MI	0,0023	0,0187	-0,5017	2,7936	0.0000
MB.MI	0,0013	0,0108	0,3846	2,9022	0.0000
PIRC.MI	0,0008	0,0133	0,2846	1,1450	0.0065
PST.MI	0,0010	0,0104	0,0377	2,3810	0.0000
RACE.MI	0,0011	0,0142	0,6701	6,0031	0.0000
STLAM.MI	-0,0004	0,0176	-1,2995	7,2328	0.0000
UCG.MI	0,0022	0,0168	-0,1578	2,7046	0.0000
UNI.MI	0,0029	0,0159	6,4439	75,3824	0.0000

Fig. 5.1: Statistiche dei rendimenti per i titoli selezionati

Capitolo 6

Analisi dei dati

6.1 Amplifon



Fig. 6.1: Enter Caption

La Figura 6.35 mostra l'andamento del prezzo delle azioni **Amplifon S.p.A.** (**AMP.MI**) rispetto all'indice **FTSE MIB** (**FTSEMIB.MI**) nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase di ribasso tra ottobre e no-

vembre 2023, il titolo ha registrato una ripresa nei primi mesi del 2024, seguita da un nuovo calo nel periodo estivo. Complessivamente, **AMP.MI** evidenzia una sottoperformance rispetto all'indice e una volatilità in linea con il mercato.

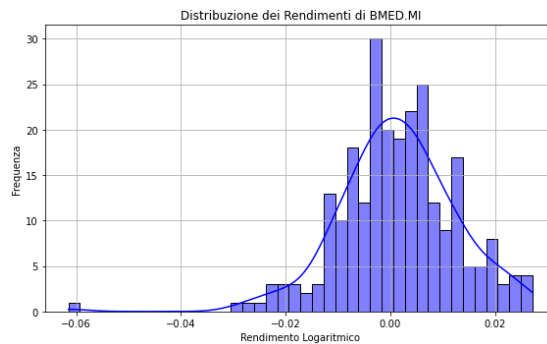


Fig. 6.2: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di **AMP.MI**.

La Figura 6.2 riporta la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di **AMP.MI**, la quale risulta leggermente asimmetrica verso destra e più piatta rispetto a una distribuzione normale. Il test di **Shapiro-Wilk** ha restituito un *p-value* pari a **0,0031**, suggerendo una deviazione dalla normalità. La **skewness**, pari a **0,1482** indica una lieve tendenza verso rendimenti positivi estremi, mentre la **kurtosi**, pari a **1,1196**, segnala una distribuzione più piatta, con minore presenza di eventi estremi. In sintesi, il titolo presenta **rendimenti mediamente nulli**, **volatilità moderata** e una **distribuzione non perfettamente normale**, ma coerente con l'andamento di un titolo a rischio medio.

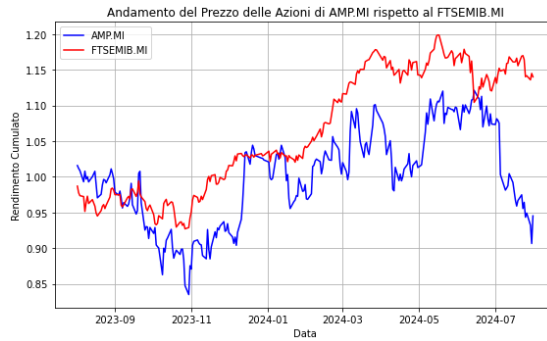


Fig. 6.3: Enter Caption

6.2 Azimut



Fig. 6.4: Andamento del prezzo delle azioni di **AZM.MI** rispetto al **FTSEMIB.MI**.

La Figura 6.4 mostra l'andamento del titolo **Azimut Holding S.p.A. (AZM.MI)** rispetto all'indice **FTSE MIB** nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo un breve calo autunnale, il titolo ha registrato una crescita decisa fino a marzo 2024, mantenendo successivamente un andamento stabile. Nel complesso, **AZM.MI** ha sovraperformato l'indice, evidenziando una **volatilità moderata** e una **buona capacità di recupero** dopo le fasi ribassiste.

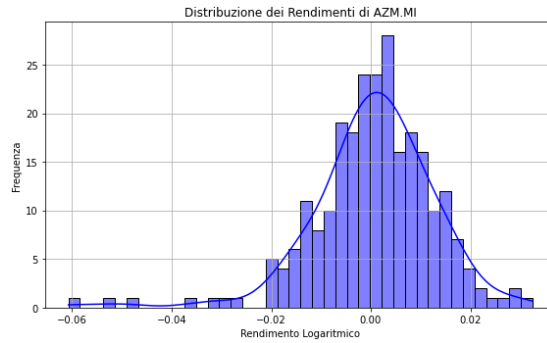


Fig. 6.5: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di **AZM.MI**.

La Figura 6.5 mostra la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di **AZM.MI**, che risulta **asimmetrica a sinistra** e **leptocurtica**, con una maggiore concentrazione attorno alla media e code più pesanti rispetto alla distribuzione normale. Il test di **Shapiro-Wilk** (con $p\text{-value} = 0.0000$) conferma la **non normalità** dei rendimenti. La **skewness negativa** (**-1.0772**) indica la presenza di rendimenti estremi negativi più frequenti, mentre la **kurtosi elevata** (**4.0208**) evidenzia episodi di **volatilità accentuata**. In sintesi, il titolo presenta **rendimenti mediamente positivi**, ma accompagnati da **rischi asimmetrici** e da **fluttuazioni improvvise** di intensità non trascurabile.

6.3 Bami

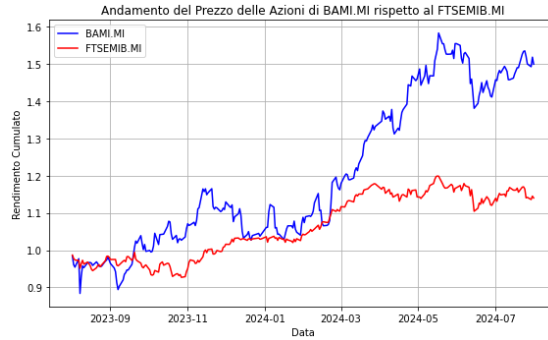


Fig. 6.6: Andamento del prezzo delle azioni di *BAMI.MI* rispetto al *FTSEMIB.MI* (Ago 2023 - Lug 2024)

La Figura 6.6 mostra l'andamento del titolo *Banco BPM S.p.A. (BAMI.MI)* rispetto all'indice *FTSE MIB* nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo un avvio stabile e una breve fase di flessione autunnale, il titolo ha registrato una decisa crescita a partire da dicembre 2023, sovraperformando ampiamente l'indice di riferimento.

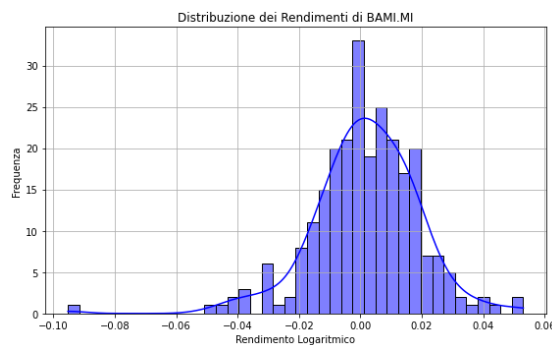


Fig. 6.7: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di *BAMI.MI*

La Figura 6.7 rappresenta la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di *Banco BPM*, che risulta asimmetrica verso sinistra e **leptocurtica**. Il test di

Shapiro-Wilk (p-value = 0,0000) conferma la non normalità della distribuzione. La skewness negativa (-0,7466) indica la presenza di rendimenti negativi estremi più frequenti, mentre la kurtosi (3,8428) segnala code più pesanti rispetto alla normale. Il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0,0017) e volatilità moderata (0,0174).

6.4 Bci

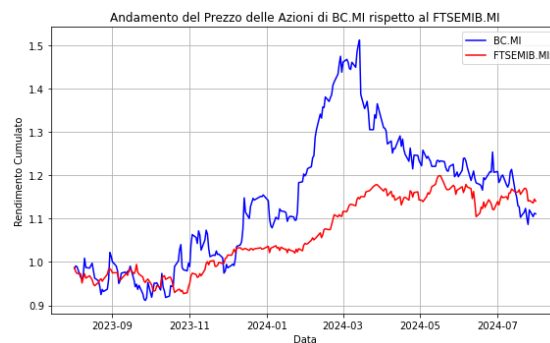


Fig. 6.8: Andamento del prezzo delle azioni di **BC.MI** rispetto all'indice **FTSEMIB.MI** (01/08/2023 - 01/08/2024)

La Figura 6.8 mostra l'andamento del prezzo delle azioni della società **BC.MI** nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024, confrontato con l'indice **FTSE MIB**. Dopo una fase iniziale piuttosto stabile, il titolo ha sperimentato una marcata crescita a partire da dicembre 2023, raggiungendo un picco nel mese di marzo 2024. Successivamente si è verificata una correzione al ribasso, pur mantenendo un andamento complessivamente superiore rispetto all'indice di **FTSE MIB**.

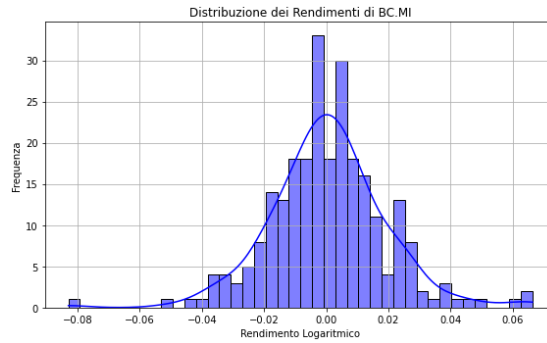


Fig. 6.9: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di **BC.MI**

La Figura 6.9 rappresenta invece la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri del titolo **BC.MI**. La distribuzione appare leggermente asimmetrica verso destra (skewness pari a 0,0707) e meno appuntita rispetto a quella normale (kurtosi pari a 2,2479), indicando una minore frequenza di eventi estremi. Il test di normalità di Shapiro-Wilk restituisce un p-value pari a 0,0001, suggerendo una deviazione significativa dalla normalità statistica. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (media = 0,0006), accompagnati da una volatilità moderata (deviazione standard = 0,0187).

6.5 Banca Mediolanum

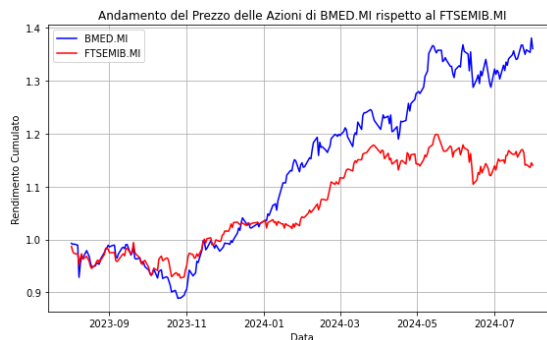


Fig. 6.10: Andamento del prezzo delle azioni di BMED.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.10 mostra l'andamento del titolo **Banca Mediolanum S.p.A.** (BMED.MI) rispetto al FTSE MIB nel periodo agosto 2023 - luglio 2024. Dopo una fase iniziale di stabilità, il titolo ha registrato una forte crescita da dicembre 2023, sovraperformando l'indice di riferimento.

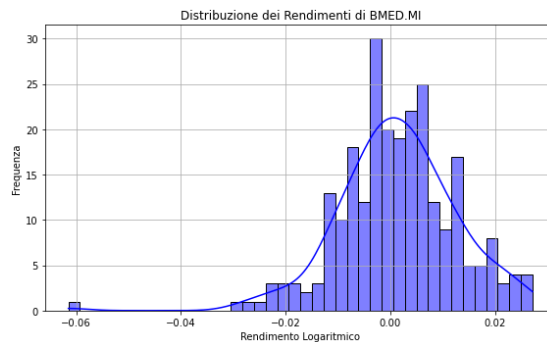


Fig. 6.11: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di BMED.MI

La Figura 6.11 illustra la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, asimmetrica verso sinistra e lievemente leptocurtica. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0000$) evidenzia deviazione dalla normalità. La skewness negativa (-0.6337) segnala rendimenti negativi più estremi, mentre la kurtosi (3.1275) indica una leggera concentrazione attorno alla media. Il titolo mostra rendimenti mediamente positivi (0.0013) e bassa volatilità (0.0113).

6.6 BMPS

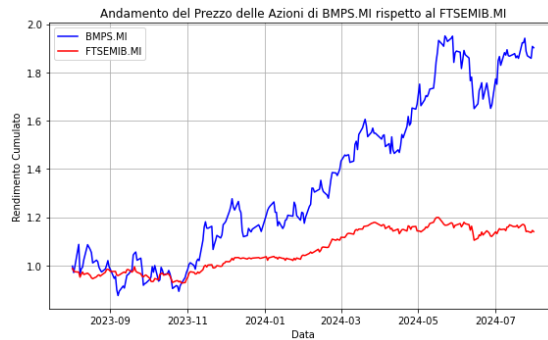


Fig. 6.12: Andamento del Prezzo delle Azioni di BMPS.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.12 mostra l'andamento del titolo *Banca Monte dei Paschi di Siena S.p.A.* (BMPS.MI) rispetto all'indice **FTSE MIB** nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una prima fase di stabilità, il titolo ha registrato una crescita significativa a partire da dicembre 2023,sovraperformando nettamente l'indice di riferimento.

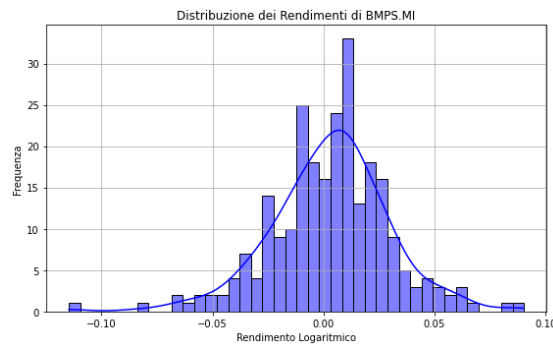


Fig. 6.13: Distribuzione dei Rendimenti di BMPS.MI

La Figura 6.13 illustra la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, che risulta leggermente asimmetrica verso sinistra e più piatta rispetto alla distribuzione normale. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0007$) indica una deviazione

dalla normalità. La *skewness* negativa (-0.3376) suggerisce la presenza di rendimenti negativi più accentuati, mentre la *kurtosi* (1.8042) riflette una distribuzione con code meno pronunciate. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0029) e una volatilità elevata (0.0268).

6.7 BPSO

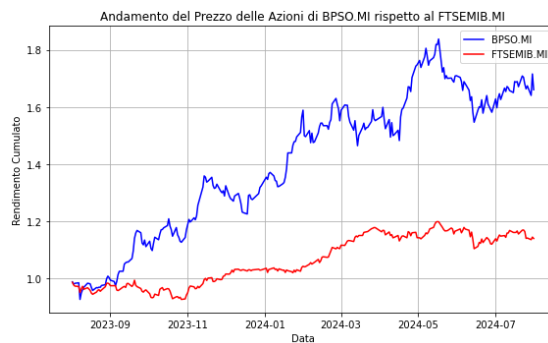


Fig. 6.14: Andamento del Prezzo delle Azioni di BPSO.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.14 mostra l'andamento del titolo Banca Popolare di Sondrio S.p.A. (BPSO.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una breve fase di debolezza iniziale, il titolo ha avviato una crescita costante da novembre 2023, sovraperformando in modo significativo l'indice di riferimento.

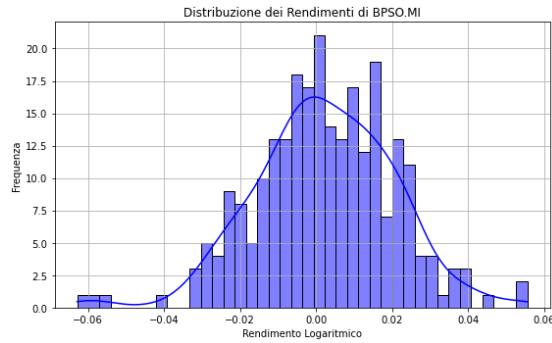


Fig. 6.15: Distribuzione dei Rendimenti di BPSO.MI

La Figura 6.15 illustra la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, che risulta leggermente asimmetrica verso sinistra e più piatta rispetto alla distribuzione normale. Il test di Shapiro-Wilk (p-value = 0,0570) non evidenzia deviazioni significative dalla normalità. La skewness negativa (-0,2317) indica una lieve prevalenza di rendimenti negativi estremi, mentre la kurtosi (0,8085) suggerisce una distribuzione con code meno accentuate. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0,0022) e una volatilità moderata (0,0181), confermando una performance solida e regolare con rischi contenuti.

6.8 ENEL

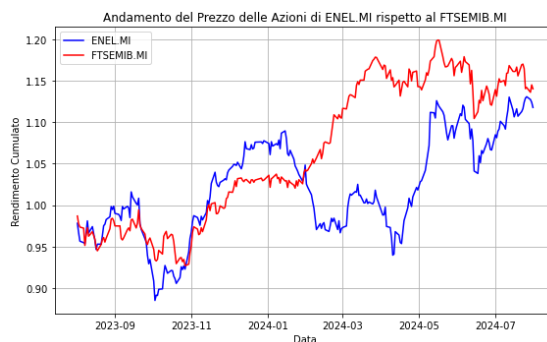


Fig. 6.16: Andamento del Prezzo delle Azioni di ENEL.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.16 mostra l'andamento del titolo Enel S.p.A. (ENEL.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase di debolezza fino a novembre 2023, il titolo ha registrato una parziale ripresa nel primo semestre 2024, mantenendosi tuttavia al di sotto della performance complessiva dell'indice. Nel complesso, *ENEL.MI* ha mostrato una volatilità contenuta e un andamento altalenante.

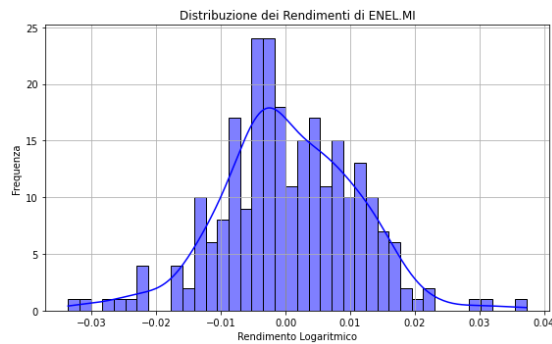


Fig. 6.17: Distribuzione dei Rendimenti di ENEL.MI

La Figura 6.17 rappresenta la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, che risulta lievemente asimmetrica verso sinistra e più piatta rispetto alla distribuzione normale. Il test di Shapiro-Wilk (p-value = 0.0828) non evidenzia deviazioni significative dalla normalità. La skewness leggermente negativa (-0.0238) indica una simmetria quasi perfetta, mentre la kurtosi (0.8020) suggerisce una platicurtosi, con code meno pronunciate. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0005) e una bassa volatilità (0.0104), mostrando una stabilità superiore alla media ma una performance inferiore all'indice di mercato.

6.9 ENI



Fig. 6.18: Andamento del Prezzo delle Azioni di ENI.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.18 mostra l'andamento del titolo Eni S.p.A. (ENI.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo un inizio positivo nei mesi autunnali, il titolo ha mostrato una fase di debolezza all'inizio del 2024, seguita da una ripresa primaverile. Nel complesso, ENI.MI ha registrato una performance in linea con l'indice, mantenendo una volatilità contenuta.

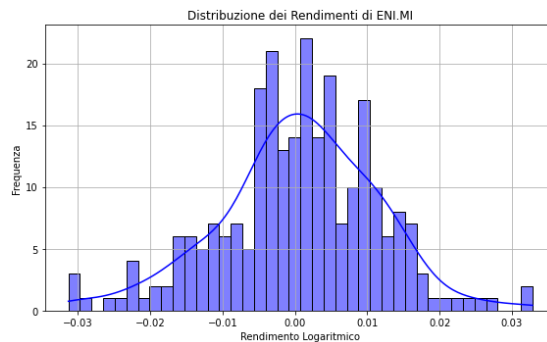


Fig. 6.19: Distribuzione dei Rendimenti di ENI.MI

La Figura 6.19 evidenzia la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, che appare leggermente asimmetrica verso sinistra e più piatta rispetto alla di-

sistribuzione normale. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0547$) non segnala una deviazione significativa dalla normalità. La skewness negativa (-0.2259) indica una lieve prevalenza di rendimenti negativi, mentre la kurtosi (0.5199) suggerisce una platicurtosi, con code meno pronunciate. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0005) e bassa volatilità (0.0109), mostrando una stabilità elevata e un andamento coerente con il mercato di riferimento.

6.10 ERG

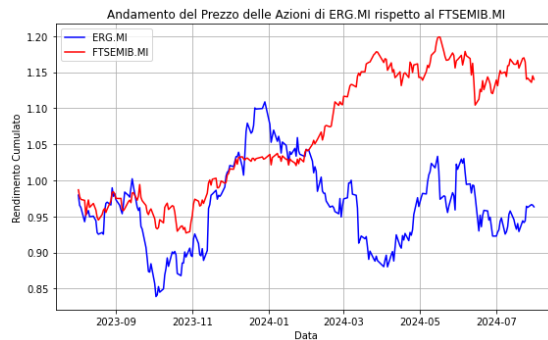


Fig. 6.20: Andamento del prezzo delle azioni di ERG.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura 6.20 mostra l'andamento del titolo ERG S.p.A. (ERG.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo un calo nei mesi autunnali, il titolo ha registrato una fase di recupero a inizio 2024, seguita da nuove flessioni nella parte centrale dell'anno. Nel complesso, ERG.MI ha sottoperformato l'indice di riferimento, mantenendo una tendenza più volatile e un rendimento cumulato inferiore.

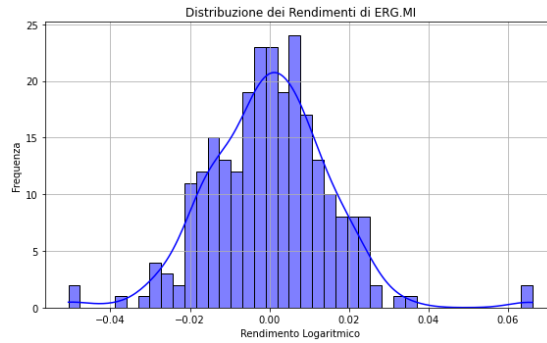


Fig. 6.21: Distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri di ERG.MI

La Figura 6.21 evidenzia la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, che risulta leggermente asimmetrica verso destra e più piatta rispetto alla distribuzione normale. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0000$) conferma la non normalità dei rendimenti. La skewness positiva (0.2902) suggerisce una maggiore presenza di rendimenti positivi estremi, mentre la kurtosi (2.4031) indica code meno accentuate. Il titolo dunque presenta rendimenti mediamente nulli (0.0000) e una volatilità moderata (0.0150).

6.11 FBK

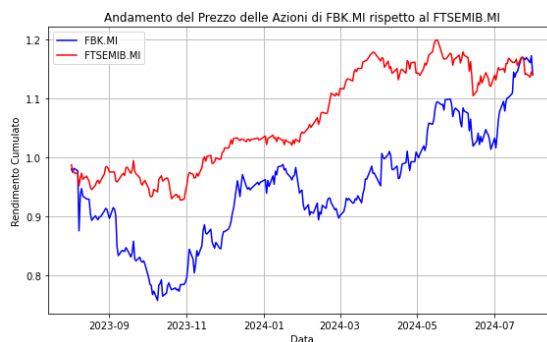


Fig. 6.22: Andamento del Prezzo delle Azioni di FBK.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura mostra l'andamento del titolo FinecoBank Banca Fineco S.p.A. (FBK.MI) rispetto all'indice FTSE MIB tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase di debolezza autunnale, il titolo ha evidenziato una ripresa graduale e costante, mantenendosi complessivamente sotto la performance dell'indice fino alla parte finale del periodo analizzato.

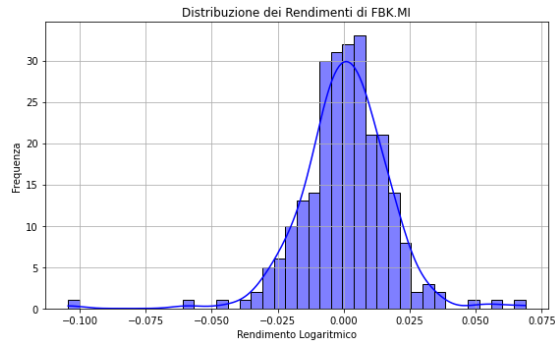


Fig. 6.23: Distribuzione dei Rendimenti di FBK.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri, rappresentata in Figura, risulta asimmetrica verso sinistra e leptocurtica. Il test di Shapiro-Wilk (p-value = 0.0000) conferma la non normalità della distribuzione. La skewness negativa (-0.7136) segnala una prevalenza di rendimenti negativi estremi, mentre la kurtosi (6.6390) indica code molto pronunciate. In conclusione, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0007) e una volatilità moderata (0.0169).

6.12 RACE



Fig. 6.24: Andamento del Prezzo delle Azioni di RACE.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura mostra l'andamento del titolo Ferrari N.V. (RACE.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase iniziale stabile, il titolo ha registrato una crescita significativa a partire da dicembre 2023, mantenendo una costante sovraperformance rispetto all'indice di riferimento.

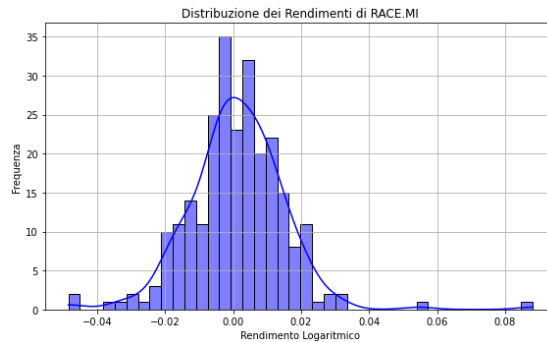


Fig. 6.25: Distribuzione dei Rendimenti di RACE.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri evidenziata in Figura risulta asimmetrica verso destra e leptocurtica. Il test di Shapiro-Wilk (p -value = 0.0000) conferma la non normalità. La skewness positiva (0.6701) indica una

prevalenza di rendimenti positivi estremi, mentre la kurtosi (6.0031) segnala la presenza di code pesanti. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0011) e una volatilità moderata (0.0142), combinando buone performance con una distribuzione dei rendimenti caratterizzata da rischio elevato ma favorevole.

6.13 Generali

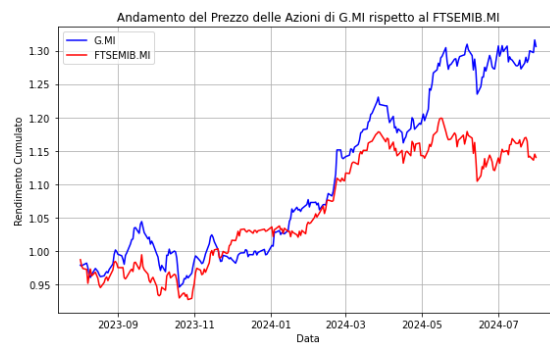


Fig. 6.26: Andamento del prezzo delle azioni di G.MI rispetto al FTSE MIB

La Figura mostra l'andamento del titolo Assicurazioni Generali S.p.A. (G.MI) rispetto all'indice FTSE MIB nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase di stabilità iniziale, il titolo ha iniziato una crescita costante a partire da dicembre 2023, sovraperformando progressivamente l'indice di riferimento.

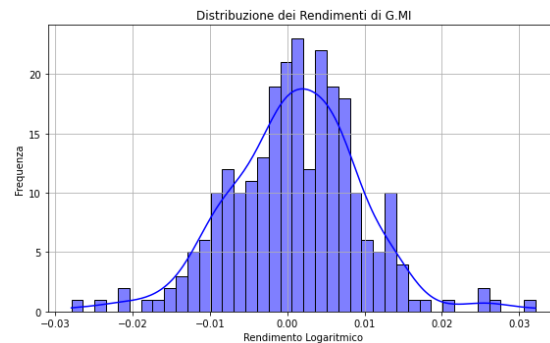


Fig. 6.27: Distribuzione dei rendimenti di G.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri è quasi simmetrica, con una leggera asimmetria positiva ($\text{skewness} = 0.0326$) e una kurtosi di 1.1853 che indica code meno pronunciate rispetto alla normale. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0135$) segnala una lieve deviazione dalla normalità. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0.0011) e bassa volatilità (0.0085), confermando un andamento regolare con rischio contenuto.

6.14 ISP

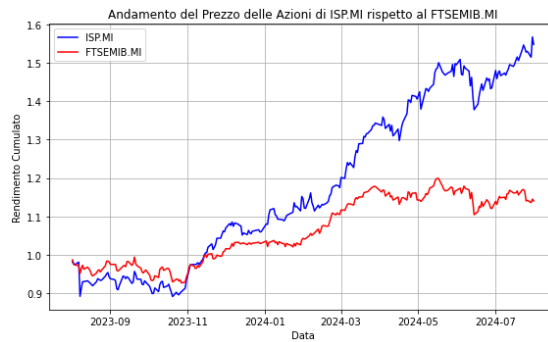


Fig. 6.28: Andamento del prezzo di ISP.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024, il titolo **Intesa Sanpaolo S.p.A. (ISP.MI)** ha registrato una crescita costante a partire da novembre 2023, raggiungendo un rendimento cumulato superiore al 60% e sovraperformando l'indice FTSEMIB. La distribuzione dei rendimenti giornalieri mostra una marcata asimmetria sinistra ($\text{skewness} = -1,3670$) e una leptocurtosi accentuata ($\text{kurtosi} = 8,8938$), suggerendo la presenza di eventi estremi negativi. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0,0000$) conferma la non normalità. In sintesi, il titolo presenta rendimenti mediamente positivi (0,0018) con elevata volatilità (0,0131).

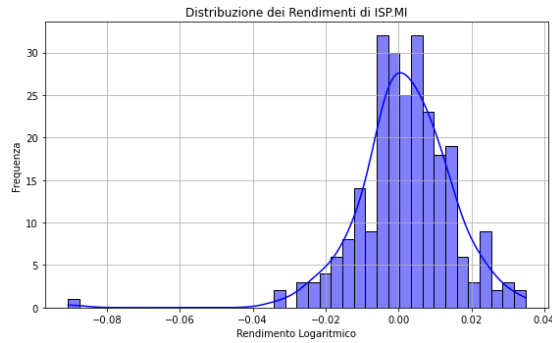


Fig. 6.29: Distribuzione dei rendimenti logaritmici di ISP.MI

6.15 IVECO

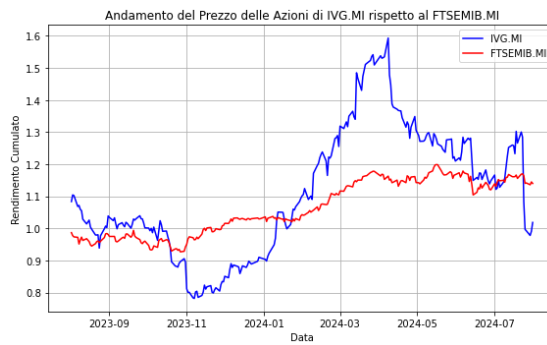


Fig. 6.30: Andamento del prezzo di IVc.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Il titolo **IVG.MI** ha evidenziato una dinamica altalenante nel periodo osservato, con forti rialzi iniziali seguiti da brusche flessioni nella seconda metà del 2024, chiudendo comunque in linea con l'indice di riferimento. La distribuzione dei rendimenti presenta una skewness negativa (-0,8274) e una kurtosi elevata (8,1890), indicando la presenza di code pesanti. Il test di normalità di Shapiro-Wilk restituisce un p -value di 0,0000, confermando la non normalità. Il rendimento medio è pari a 0,0004 con una volatilità giornaliera di 0,0248.

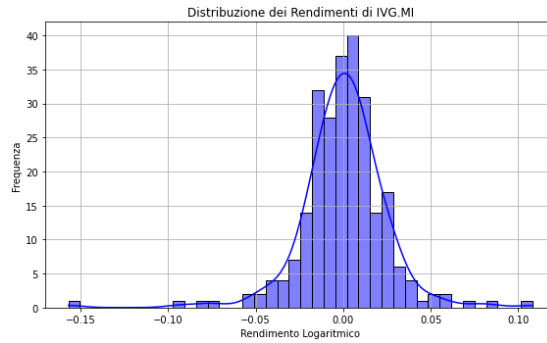


Fig. 6.31: Distribuzione dei rendimenti logaritmici di IVC.MI

6.16 Leonardo

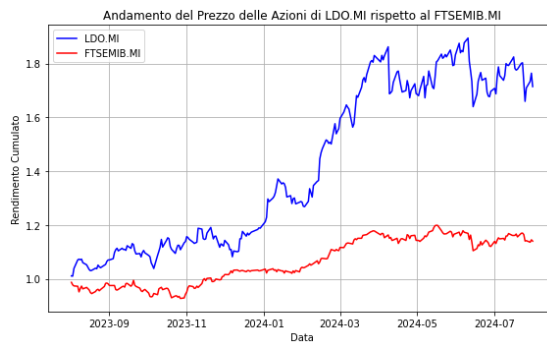


Fig. 6.32: Andamento del prezzo di LDO.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Nel periodo considerato, **LDO.MI** ha evidenziato una crescita sostenuta, sovraperformando l'indice di riferimento. La distribuzione dei rendimenti è marcatamente non normale ($p\text{-value} = 0,0000$), con skewness negativa ($-0,5017$) e kurtosi ($2,7936$) che evidenziano code meno pronunciate. Il rendimento medio giornaliero è positivo ($0,0023$) e la volatilità moderata ($0,0187$), confermando un profilo di crescita elevata con rischi contenuti.

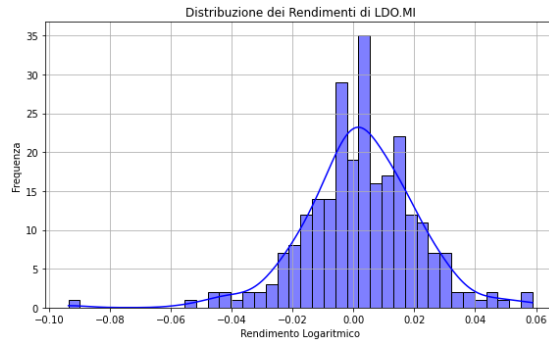


Fig. 6.33: Distribuzione dei rendimenti logaritmici di LDO.MI

6.17 Mediobanca

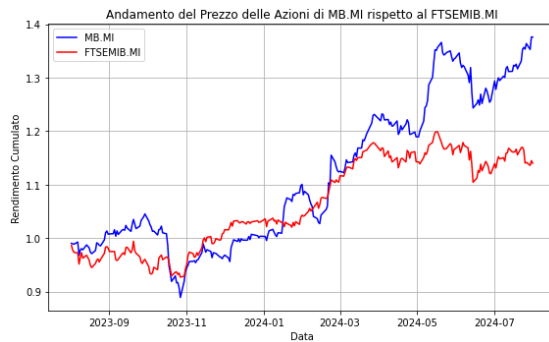


Fig. 6.34: Andamento del prezzo di LDO.MI rispetto al FTSEMIB.MI

La Figura mostra l'andamento del titolo Mediobanca S.p.A. (MB.MI) rispetto al FTSE MIB tra agosto 2023 e luglio 2024. Dopo una fase iniziale laterale, il titolo ha mostrato un progressivo rafforzamento nel primo semestre del 2024, sovraperformando l'indice.

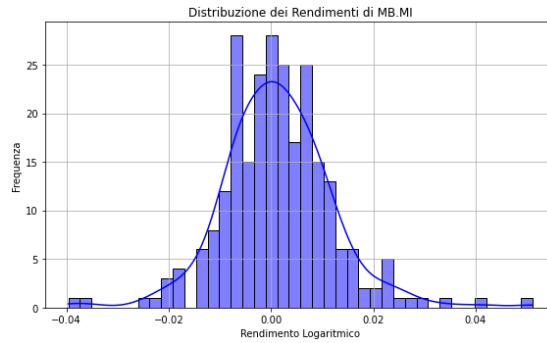


Fig. 6.35: Distribuzione dei rendimenti logaritmici di LDO.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici (Figura a destra) presenta una leggera asimmetria positiva ($\text{skewness} = 0,3846$), suggerendo una maggior incidenza di rendimenti positivi estremi. La kurtosi ($2,9022$) segnala una distribuzione prossima alla normalità ma con leggere code meno accentuate. Il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0,0000$) conferma la non normalità. In media, i rendimenti giornalieri sono positivi ($0,0013$) con una bassa volatilità ($0,0108$), delineando un profilo di rischio moderato con tendenza al rialzo.

6.18 Pirelli

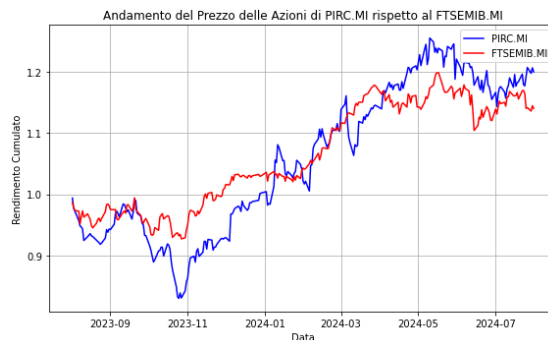


Fig. 6.36: Andamento del Prezzo delle Azioni di PIRC.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Nel periodo compreso tra agosto 2023 e luglio 2024, il titolo **Pirelli & C. S.p.A. (PIRC.MI)** ha mostrato un andamento altalenante, registrando inizialmente un calo e successivamente un recupero significativo a partire da novembre 2023. Il rendimento cumulato ha superato il 20%, consentendo al titolo di sovraperformare moderatamente l'indice di riferimento **FTSEMIB.MI**.

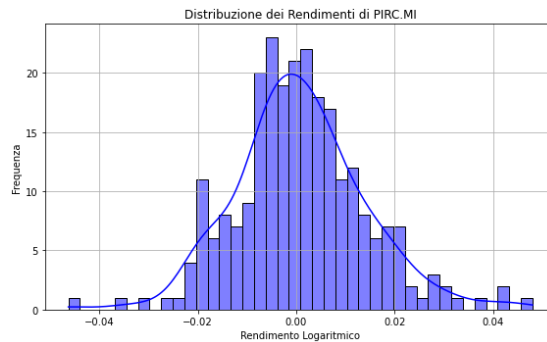


Fig. 6.37: Distribuzione dei Rendimenti di PIRC.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri appare vicina alla normalità, ma il test di Shapiro-Wilk ($p\text{-value} = 0.0065$) evidenzia una deviazione statisticamente significativa. I rendimenti presentano una *skewness* positiva (0.2846), indicando una maggiore frequenza di rendimenti positivi estremi, e una *kurtosi* di 1.1450, che suggerisce una distribuzione leggermente più piatta rispetto alla normale. Il rendimento medio giornaliero è pari a 0.0008, con una volatilità contenuta di 0.0133.

6.19 Poste



Fig. 6.38: Andamento del Prezzo delle Azioni di PST.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Il titolo PST.MI mostra un rendimento medio giornaliero pari a 0,0010 e una volatilità di 0,0104, indicando un rischio moderato. La skewness positiva (0,0377) riflette una leggera asimmetria verso destra, mentre la kurtosi (2,3810) segnala una distribuzione meno appuntita rispetto a quella normale. Il test di Shapiro-Wilk (p-value = 0,0000) conferma una deviazione significativa dalla normalità. Il grafico del rendimento cumulato mostra una sovraperformance rispetto all'indice FTSEMIB.MI a partire da febbraio 2024.

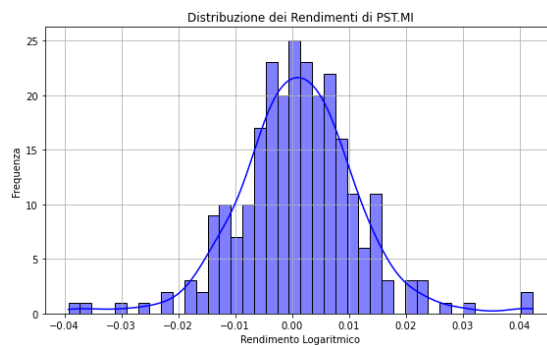


Fig. 6.39: Distribuzione dei Rendimenti di PST.MI

6.20 Stellantis

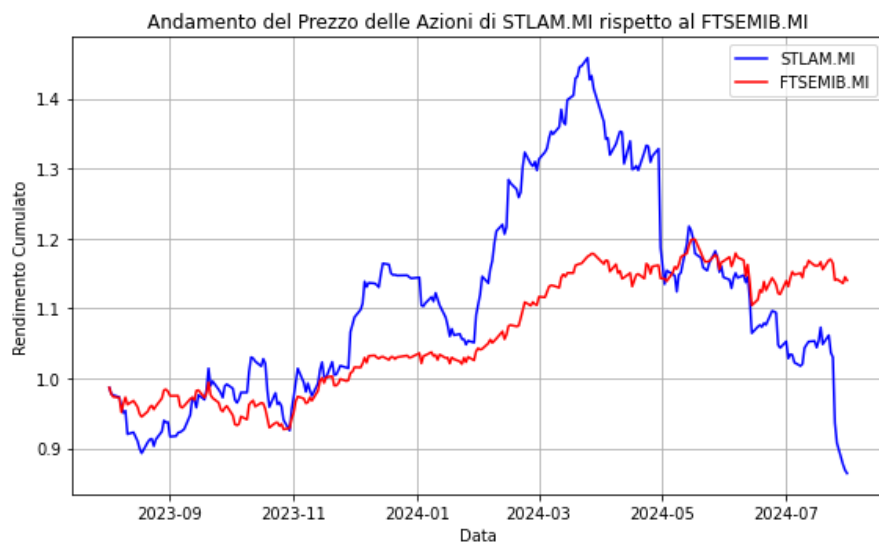


Fig. 6.40: Andamento del Prezzo delle Azioni di STLAM.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Nel periodo tra agosto 2023 e luglio 2024, il titolo **STLAM.MI** ha mostrato un andamento inizialmente positivo. Tuttavia, a partire da maggio si osserva un'inversione di tendenza con un forte calo che porta il rendimento complessivo vicino a quello dell'indice di riferimento FTSEMIB.MI, per poi scendere ulteriormente. Il titolo ha pertanto sottoperformato nel lungo periodo, con una fase finale negativa marcata.

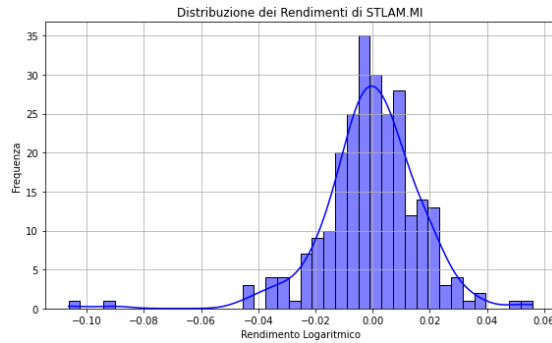


Fig. 6.41: Distribuzione dei Rendimenti di STLAM.MI

Come indicato nella Figura 6.41, la distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri risulta visibilmente asimmetrica verso sinistra ($\text{skewness} = -1,2995$) e leptocurtica ($\text{kurtosi} = 7,2328$), con code molto accentuate. Il test di normalità di Shapiro-Wilk conferma la non normalità della distribuzione ($p\text{-value} = 0,0000$). Il rendimento medio giornaliero è leggermente negativo ($-0,0004$), mentre la volatilità è elevata ($0,0176$), suggerendo una maggiore propensione al rischio per l'investitore.

6.21 Unicredit

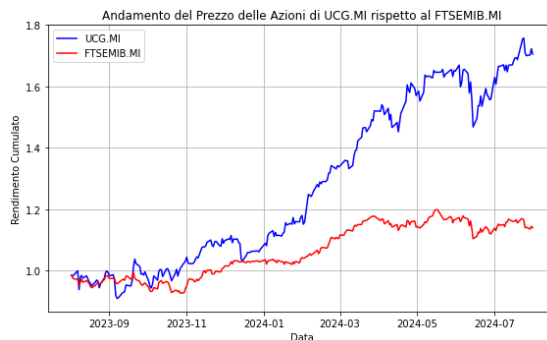


Fig. 6.42: Andamento del Prezzo delle Azioni di UCG.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Il grafico del rendimento cumulato mostra una marcata sovraperformance del titolo **UCG.MI** rispetto all'indice FTSEMIB.MI nel periodo agosto 2023 ,Ài luglio 2024, con una crescita costante e sostenuta a partire da novembre 2023.

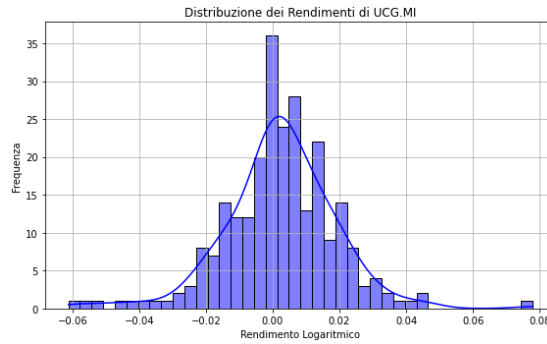


Fig. 6.43: Distribuzione dei Rendimenti Logaritmici di UCG.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici evidenzia una leggera asimmetria sinistra (skewness = -0,1578), con una forma più appuntita della normale (kurtosi = 2,7046). Il test di Shapiro-Wilk conferma una deviazione significativa dalla normalità (p-value = 0,0000).

6.22 Unipol

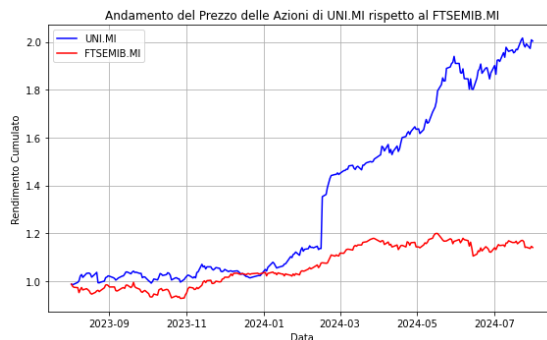


Fig. 6.44: Andamento del Prezzo delle Azioni di UNI.MI rispetto al FTSEMIB.MI

Nel periodo analizzato, il titolo ha registrato una significativa crescita del prezzo, raggiungendo un rendimento cumulato superiore al 100% e sovraperformando con decisione l'indice FTSEMIB.

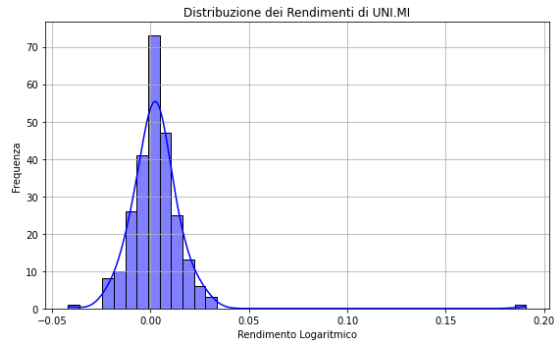


Fig. 6.45: Distribuzione dei Rendimenti di UNI.MI

La distribuzione dei rendimenti logaritmici giornalieri evidenzia una forte **asimmetria positiva** (skewness = 6,4439) e una **kurtosi estremamente elevata** (75,3824), indicando la presenza di code molto pesanti e rendimenti estremi. Il test di Shapiro-Wilk (p-value = 0,0000) conferma una marcata **non normalità** della distribuzione.

Capitolo 7

Analisi dei Risultati Empirici

In questo capitolo verranno analizzati e discussi i risultati degli studi empirici condotti in `Python`, con l'obiettivo di costruire un portafoglio utilizzando i titoli selezionati nel capitolo precedente. l'arco temporale considerato per l'intera analisi va dal 1 settembre 2022 al 1 settembre 2023.

La sezione 6.1 sarà dedicata all'analisi dei risultati ottenuti tramite l'utilizzo del criterio di Kelly, mentre nella sezione successiva verrà esaminato l'approccio di Markowitz.

7.1 Portafoglio di Kelly

La formula di Kelly mira alla massimizzazione del tasso di crescita del capitale nel lungo periodo. In particolare, il criterio suggerisce di scegliere i pesi del portafoglio in modo da massimizzare il rapporto tra il rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio e la varianza del portafoglio. Formalmente, il problema si scrive come:

$$\max_f \frac{f^\top (\mu - r)}{\sigma_{\text{portafoglio}}^2} \quad (7.1)$$

dove:

- f indica il vettore dei pesi del portafoglio;
- μ è il vettore dei rendimenti attesi;
- r rappresenta il tasso privo di rischio;
- $\sigma_{\text{portafoglio}}^2$ è la varianza del portafoglio.

Il portafoglio ottenuto secondo questa metodologia è noto come *portafoglio di Kelly*, e rappresenta una strategia di investimento che tiene conto non solo dell'aspettativa di rendimento, ma anche del rischio complessivo assunto. Tale approccio è particolarmente utile nei contesti in cui si dispone di informazioni attendibili sulla distribuzione dei rendimenti attesi e sulla matrice di varianza-covarianza degli asset. La funzione obiettivo del criterio di Kelly viene ottimizzata imponendo due vincoli principali:

- la somma dei pesi deve essere pari a 1, garantendo che l'intero capitale disponibile venga investito;
- ogni peso individuale f_i deve essere compreso nell'intervallo $[0, 1]$, escludendo così l'uso della leva finanziaria e delle vendite allo scoperto.

L'allocazione del portafoglio di Kelly è stata determinata utilizzando i rendimenti storici dei titoli selezionati, come descritto nel Capitolo 3. I risultati dell'ottimizzazione sono illustrati nella Figura 4.1 e riportano la seguente distribuzione del capitale: Il portafoglio ottimizzato secondo il criterio di Kelly mira a massimizzare il tasso di crescita logaritmico del capitale. La composizione ottenuta assegna i pesi seguenti ai titoli selezionati:

Ticker	Peso (%)
UNI.MI	21.78
G.MI	17.40
ENI.MI	15.83
MB.MI	9.60
LDO.MI	9.14
RACE.MI	7.22
PIRC.MI	6.58
PST.MI	3.83
ERG.MI	3.15
BPSO.MI	1.80
BC.MI	1.79
BMED.MI	1.63
ISP.MI	0.25
STLAM.MI	≈ 0
IVG.MI	≈ 0
FBK.MI	≈ 0
AZM.MI	≈ 0
AMP.MI	≈ 0
ENEL.MI	0.00
BMPS.MI	0.00
UCG.MI	0.00
BAMI.MI	0.00

Tabella 7.1: Allocazione del portafoglio secondo il criterio di Kelly

Il portafoglio composto in questa maniera possiede le seguenti caratteristiche:

- **Rendimento atteso: 37.26%**

- **Volatilità: 11.80%**

Come evidente, il modello di Kelly tende a concentrare i pesi sui titoli con il miglior rapporto rischio/rendimento, portando a una forte esposizione su pochi asset (come UNI.MI, G.MI, ENI.MI), mentre esclude completamente o quasi asset con prestazioni inferiori o distribuzioni sfavorevoli.

7.2 Portafoglio di Markowitz: Massimizzazione dello Sharpe Ratio

All'interno di questa sezione analizziamo la costruzione di un portafoglio secondo l'approccio di Markowitz nella sua variante orientata alla massimizzazione dello *Sharpe Ratio*. L'obiettivo è identificare la combinazione di asset che, a parità di rischio, offra il rendimento atteso più elevato. La formula adottata per la massimizzazione dello Sharpe Ratio è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mu^T \Sigma^{-1} \mu}{\mu^T \Sigma^{-1} \mu - (u^T \Sigma^{-1} \mu)^2}, & \text{se } u^T \Sigma^{-1} \mu > 0 \\ u^T \Sigma^{-1} u, & \text{se } u^T \Sigma^{-1} \mu \leq 0 \end{cases}$$

dove:

- $f(x)$ rappresenta il rendimento atteso in funzione del vettore di allocazione x ;
- μ è il vettore dei rendimenti attesi degli asset rischiosi;
- Σ è la matrice di covarianza dei rendimenti degli asset rischiosi;
- u è un vettore colonna di dimensione n con tutti gli elementi pari a 1, che impone il vincolo di somma unitaria dei pesi del portafoglio;

- $u^T \Sigma^{-1} \mu$ rappresenta il rapporto tra la somma dei pesi e il rendimento atteso ponderato per il rischio.

7.3 Portafoglio di Markowitz: Massimo Sharpe Ratio

Il portafoglio di Markowitz è stato ottimizzato per massimizzare lo *Sharpe Ratio*, ovvero il rapporto tra rendimento atteso e rischio (volatilità). La seguente tabella riporta l'allocazione ottimale dei pesi per ciascun titolo:

Ticker	Peso (%)
UNI.MI	43.04
LDO.MI	19.98
MB.MI	10.19
BPSO.MI	7.75
UCG.MI	5.97
ISP.MI	5.09
RACE.MI	3.72
BMPS.MI	2.14
PIRC.MI	1.91
ENI.MI	0.22
BC.MI	≈ 0
G.MI	≈ 0
AZM.MI	≈ 0
PST.MI	≈ 0
ERG.MI	≈ 0
BMED.MI	≈ 0
ENEL.MI	≈ 0
IVG.MI	0.00
FBK.MI	0.00
STLAM.MI	0.00
BAMI.MI	0.00
AMP.MI	0.00

Tabella 7.2: Allocazione del portafoglio secondo il modello di Markowitz (massimo Sharpe Ratio)

I valori generali del portafoglio sono infine:

- **Rendimento atteso: 58.88%**
- **Volatilità: 17.13%**
- **Sharpe Ratio: 3.26**

Questo portafoglio concentra il capitale prevalentemente su pochi titoli ad alto rendimento corretto per il rischio (in particolare UNI.MI, LDO.MI e MB.MI), escludendo totalmente i titoli con contributo marginale negativo alla frontiera efficiente. Con tale asset allocation, il portafoglio di Markowitz presenta una stima del rendimento atteso pari a $E(R_p) = 58.88\%$ e una deviazione standard pari a $\sigma_p = 17.13\%$. Si osserva che, rispetto al portafoglio costruito secondo il criterio di Kelly, il portafoglio di Markowitz evidenzia un'allocazione più diversificata ed equamente distribuita, coinvolgendo la quasi totalità dei titoli analizzati. Al contrario, il portafoglio di Kelly investe solamente in alcuni, selezionando in modo più concentrato gli asset con miglior rapporto tra rendimento atteso e rischio.

7.3.1 Backtesting

Lo step conclusivo dell'analisi empirica consiste nel *backtesting*, il cui obiettivo è verificare l'efficacia dei metodi di allocazione proposti (Kelly e Markowitz) valutandone le performance e confrontandoli tra loro, nonché rispetto al benchmark di riferimento, ovvero l'indice FTSE MIB.

Backtesting del Portafoglio di Kelly

Il backtest si basa sui pesi ottimali calcolati nella sezione precedente, relativi all'intervallo temporale compreso tra il 01/08/2023 e il 01/08/2024. Tali pesi vengono applicati ai rendimenti degli stessi asset su un nuovo periodo temporale, compreso tra il 01/08/2024 e il 01/08/2025. Per semplicità, si assume un investimento iniziale pari a 33.608 €, corrispondente al valore di apertura dell'indice

FTSE MIB alla data del 01/08/2024. L'applicazione dei rendimenti giornalieri porta alla costruzione di una serie temporale che descrive l'evoluzione del valore del portafoglio nel corso del periodo di backtest. I risultati ottenuti per il portafoglio costruito secondo il criterio di Kelly sono i seguenti:

- **Rendimento annuo: 51.13%**
- **Volatilità annualizzata: 17.80%**
- **Sharpe Ratio: 2.70**

Backtesting del Portafoglio di Markowitz

Analogamente al portafoglio di Kelly, anche per il portafoglio costruito secondo il criterio di Markowitz (massimizzazione dello Sharpe Ratio) si effettua un'analisi di backtesting. Si utilizzano i pesi ottimali ottenuti per l'intervallo temporale che va dal 01/08/2023 al 01/08/2024. Tali pesi vengono applicati ai rendimenti osservati in un periodo successivo, ovvero dal 01/08/2024 al 01/08/2025. Si assume nuovamente un investimento iniziale pari a 33.608€, corrispondente al valore di apertura dell'indice FTSE MIB alla data del 01/08/2024. Il risultato è una serie temporale che descrive l'evoluzione del valore del portafoglio giorno per giorno durante il periodo di analisi. Le principali metriche di performance ottenute dal backtest sono le seguenti:

- **Rendimento annuo: 45.05%**
- **Volatilità annualizzata: 14.39%**
- **Sharpe Ratio: 3.13**

Confronto con l'indice FTSE MIB

- **Rendimento annualizzato: 38.45%**
- **Volatilità annualizzata: 15.04%**
- **Sharpe Ratio: 2.55**

Tabella 7.3: Confronto tra i portafogli analizzati e l'indice FTSE MIB

Portafoglio	Rendimento annuo (%)	Volatilità annua (%)	Sharpe Ratio
Kelly	51.13	17.80	2.70
Markowitz (Sharpe)	45.05	14.39	3.13
FTSE MIB	38.45	15.04	2.55

Conclusione

Il presente lavoro si è posto l'obiettivo di analizzare in profondità il criterio di Kelly, muovendo dalla costruzione delle martingale e dall'esame dei principali betting systems, per giungere alla sua applicazione nell'allocazione ottimale del capitale all'interno di un portafoglio azionario. I risultati ottenuti sono stati successivamente messi a confronto con quelli derivanti da uno dei modelli di riferimento della teoria moderna del portafoglio, il modello media-varianza di Markowitz. L'analisi ha dunque riguardato sia la costruzione teorica dei portafogli, costruiti secondo i due metodi specificati, sia le relative performance empiriche, confrontate con un benchmark di riferimento rappresentato dall'indice FTSE MIB. L'analisi empirica condotta sull'intervallo temporale 01/08/2024 – 01/08/2025 ha evidenziato come l'indice FTSE MIB abbia registrato una performance positiva ma inferiore rispetto ai portafogli ottimizzati sia secondo il criterio di Kelly sia secondo il modello di Markowitz con massimizzazione dello Sharpe Ratio. In particolare, il portafoglio costruito con il metodo di Kelly ha prodotto un rendimento annualizzato pari al 51.13%, mantenendo una volatilità solo leggermente superiore rispetto al benchmark. Il portafoglio ottimizzato mediante la massimizzazione dello Sharpe Ratio ha invece ottenuto un rendimento annuo del 45.05%, accompagnato da una volatilità inferiore. In questo caso, lo Sharpe Ratio è risultato pari a 3.13, superiore sia a quello del portafoglio Kelly (2.70) sia a quello dell'indice FTSE MIB (2.55). Tali risultati riflettono le differenti logiche sottostanti ai due approcci: il portafoglio

ottimizzato secondo il criterio di Kelly è caratterizzato da una forte crescita del capitale nel lungo termine, grazie al suo focus sulla massimizzazione del tasso di crescita logaritmico. Allo stesso tempo il portafoglio costruito seguendo il modello di Markowitz ha presentato un profilo di rendimento leggermente inferiore, ma accompagnato da una minore volatilità. Tali caratteristiche riflettono l'equilibrio tra il desiderio di massimizzare il rendimento e la necessità di una gestione del rischio più prudente. In sintesi, entrambi gli approcci si dimostrano validi e concretamente applicabili in contesti reali, offrendo all'investitore strumenti quantitativi efficaci per la costruzione di portafogli coerenti con differenti preferenze in termini di rischio e rendimento. I risultati ottenuti evidenziano come un'allocazione strategica guidata da modelli quantitativi possa migliorare in modo significativo il profilo rischio-rendimento rispetto alla semplice replica di un indice di mercato.

Appendice

In questa appendice sono riportati risultati di base utilizzati nella trattazione della tesi.

Proposizione A.1 (Disuguaglianza triangolare). *Dati $a, b \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Proposizione A.2 (Legge delle aspettative iterate). *Siano X, Y due variabili aleatorie congiuntamente distribuite. Allora*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X].$$

Proposizione A.3 (Legge dei grandi numeri). *Sia X_1, X_2, \dots una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna con media finita μ . Allora*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu\right) = 1,$$

o equivalentemente, quasi certamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu.$$

Proposizione A.4 (Teorema del Limite Centrale). *Siano X_1, X_2, \dots una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media $\mu < \infty$ e varianza $\sigma^2 < \infty$. Definita $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ la sua normalizzazione, si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$*

$$F_{Z_n}(t) := \mathbb{P}(Z_n \leq t) \xrightarrow{q.c.} \mathbb{P}(Z \leq t) \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Equivalentemente Z_n converge in distribuzione a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ per $n \rightarrow \infty$.

Proposizione A.5 (Teorema di Weierstrass). *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto (ovvero chiuso e limitato). Allora f ammette un minimo e un massimo globale in D .*

Bibliografia

- [1] L. Bachelier, *Calcul des probabilités*, Calcul des probabilités, no. v. 1, Gauthier-Villars, 1912.
- [2] N. J. Balsara, *Money management strategies for futures traders*, vol. 4, John Wiley & Sons, 1992.
- [3] F. Erbetta and L. Agnello, *Le martingale: aspetti teorici ed applicativi*, Working paper CERIS-CNR **12** (2001), no. 7, 36.
- [4] S. N. Ethier, *The doctrine of chances: Probabilistic aspects of gambling*, Probability and Its Applications, Springer, Berlin and Heidelberg, 2010.
- [5] P. A. Griffin, *The theory of blackjack*, Huntington Press, Las Vegas, Revised 1993.
- [6] J. C. Hull and E. Barone, *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, 2009.
- [7] J. L. Kelly JR., *A new interpretation of information rate*, ch. 3, pp. 25–34, 2011 (original version in 1956).
- [8] C. Kempton, *Horse play, optimal wagers and the kelly criterion*, 2011.
- [9] S. Kim, *Kelly criterion extension: Advanced gambling strategy*, Mathematics **12** (2024), no. 11, 1725.

- [10] E.O. Thorp L.C. Maclean and W.T. Ziemba, *Good and bad properties of the kelly criterion*, Chapter 39 in *The Kelly Capital Growth Investment Criterion Theory and Practice*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011, pp. 563–572.
- [11] D. G. Luenberger, *Investment science*, Oxford University Press, 2014.
- [12] L.C. Maclean, W.T. Ziemba, and E.O. Thorp, *Kelly capital growth investment criterion, the: Theory and practice*, World Scientific Handbook In Financial Economics Series, World Scientific Publishing Company, 2011.
- [13] P. Marek, T. Toupal, and F. Vavra, *Efficient distribution of investment capital*, 2016.
- [14] U. Matej, S. Gustav, H. Ondrej, and Z. Filip, *Optimal sports betting strategies in practice: an experimental review*, IMA Journal of Management Mathematics **32** (2021), no. 4, 465–489.
- [15] W. Poundstone, *Fortune’s formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and wall street*, Farrar, Straus and Giroux, 2010.
- [16] L. M. Rotando and E. O. Thorp, *The kelly criterion and the stock market*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 10, 922–931.
- [17] E. O. Thorp, *Optimal gambling systems for favorable games*, Revue de l’Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute **37** (1969), no. 3, 273–293.
- [18] E. O. Thorp, *The kelly criterion in blackjack sports betting, and the stock market*, Chapter 54 in *The Kelly Capital Growth Investment Criterion Theory and Practice*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011, pp. 789–832.

- [19] S. Tran and P. Verhoeven, *Kelly criterion for optimal credit allocation*, Journal Risk and Financial Management **503** (2021), no. 14(9), 16.
- [20] A. Tushia, *Optimal betting using the kelly criterion*, 2014.
- [21] K. Wang and H. Yang, *The price-volume relationship caused by asset allocation based on kelly criterion*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **503** (2018), 8.
- [22] M. Wu and W. Chung, *A novel approach of option portfolio construction using the kelly criterion*, IEEE Access **6** (2018), 53044–53052.