Facoltà di Economia e Management
Cattedra di Matematica Finanziaria

IL TEOREMA DI FISHER E WEIL NELL'ATTUALE CONTESTO EUROPEO: UN'APPLICAZIONE PRATICA

RELATORE
Prof.ssa Gabriella Foschini

CANDIDATO
Matteo Leombroni
Matr. 152251

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

INTRODUZIONE

Fisher e Weil introducono nel 1971 un modello di costruzione del portafoglio con l'obiettivo di indicare all'investitore una strategia utile per salvaguardare il proprio investimento da eventuali variazioni dei tassi di interesse che potrebbero alterare in modo sfavorevole il valore dell'attivo e del passivo. La preoccupazione maggiore è quella di insolvibilità, situazione in cui il valore del passivo è maggiore del valore dell'attivo e il valore netto risulterà pertanto minore di zero. L'intuizione sottostante l'immunizzazione finanziaria è data dal bilanciamento di perdite e guadagni causati da variazioni dei tassi di interesse. Fisher e Weil, sulla base degli studi sulla duration, indicatore della durata finanziaria, e della variabilità di un titolo in conseguenza di una variazione del tasso di riferimento, individuarono una strategia di protezione dal rischio di tasso, attraverso la costruzione di un portafoglio (in cui il passivo è caratterizzato da un unico esborso a scadenza) nel quale la duration dell'attivo è uguale all'orizzonte temporale del finanziamento. Ma nella realtà non è così semplice effettuare investimenti immuni dal rischio. Vedremo come le curve di riferimento di un finanziamento sono distinte da quelle dell'investimento e come i movimenti delle curve non sono poi così identici.

Nel primo capitolo saranno esposti gli strumenti finanziari che sono stati utilizzati per le analisi effettuate nei capitoli successivi. I titoli a cui ci riferiremo sono titoli a reddito fisso e in particolare obbligazioni emesse dallo stato. Inoltre verrà sintetizzato il cammino che ha portato al teorema di Fisher e Weil del 1971, a partire dalla "scoperta" della duration da parte di Frederik Macaulay nel 1938, passando per Redington che nel 1952 ha introdotto il termine immunizzazione finanziaria e il cui teorema è alla base dell'analisi teorica di Fisher e Weil. Nel secondo capitolo analizzeremo la costruzione del portafoglio secondo le ipotesi di Fisher e Weil e verificheremo la tenuta dell'immunizzazione finanziaria in conseguenza di uno shift delle curve dei rendimenti. Ciò sarà fatto ipotizzando la costruzione di due portafogli aventi passivo identico ma con capitale investito nel primo caso in titoli italiani e nel secondo caso in titoli tedeschi. Nel terzo capitolo l'andamento del portafoglio sarà fotografato otto mesi dopo la data dell'investimento con riferimento alle curve dei rendimenti correnti a quella data.

Questa volta l'esperimento non fornirà gli esiti sperati e saranno quindi esposti quei fattori che hanno causato la distorsione dei risultati rispetto a quelli espressi attraverso l'applicazione dei principi di Fisher e Weil effettuata nel capitolo precedente. Questi fattori sono particolarmente attuali e per questo sono verranno analizzati nel quarto capitolo con la massima attenzione e con riferimento al contesto economico che ha caratterizzato questi ultimi mesi in particolare l'Europa e soprattutto l'Italia.

CAPITOLO 1. TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

1.1. L'EVOLUZIONE DELLA TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA – BREVI CENNI STORICI

Il termine immunizzazione finanziaria identifica una metodologia matematica finalizzata a neutralizzare gli effetti della variazione del tasso di valutazione su di un portafoglio attivo (crediti) o passivo (debiti).

L'immunizzazione finanziaria è quindi una tecnica che è stata sviluppata per cercare di strutturare le attività e le passività in modo da ridurre o addirittura eliminare le possibili perdite causate dalle variazioni nel livello dei tassi d'interesse. La teoria fornisce quindi un metodo di copertura dal rischio di tasso, studiando le strategie di protezione da questo rischio.

La genesi dell'applicazione del calcolo delle probabilità nella valutazione di portafogli finanziari si fa risalire a Luis Bachelier (1900) che in uno studio sulla teoria della speculazione, anticipò numerose proprietà del modello di Einstein - Wiener del moto browniano[1,] tentandone un'applicazione alle fluttuazioni dei valori mobiliari rimasta a lungo insuperata.

1Il termine "moto browniano" deriva dal botanico scozzese Robert Brown, che lo osservò nel 1827 mentre stava studiando al microscopio le particelle di polline della Pulchella Clarkia in acqua; egli osservò che i granuli di polline erano in continuo movimento e in ogni istante tale moto avveniva lungo direzioni casuali. Dopo avere appurato che il movimento non era dovuto a correnti o evaporazione dell'acqua, Brown pensò che queste particelle fossero "vive", analogamente agli spermatozoi. Testò quindi la sua teoria eseguendo lo stesso esperimento con una pianta morta, con minuscoli frammenti di legno fossile e con frammenti di vetro, osservando tuttavia lo stesso fenomeno. Ciò significava che il movimento delle particelle non era da attribuire ad alcuna "forza vitale", ma Brown non seppe fornire nessun altra spiegazione a tale fenomeno.Nel 1905 Albert Einstein pubblicò un articolo dal titolo " Über die von der molekularkinetischen Theorie der Bewegung von Wärme geforderte in ruhenden suspendierten Flüssigkeiten Teilchent ", dove fornì una spiegazione del fenomeno del moto browniano, attribuendo la causa del moto agli urti delle molecole d'acqua con i piccoli granuli di polline; Einstein diede inoltre una descrizione quantitativa del fenomeno.

Il lavoro di Bachelier conduce al lavoro di numerosi matematici e economisti quali Wiener (1923), Kolmogorov (1931), Ito (1950), Black e Scholes e Merton (1973).

Norbert Wiener (Columbia,26 novembre 1894 – Stoccolma,18 marzo 1964) è stato un matematico e statistico statunitense. La sua fama è dovuta principalmente alle ricerche effettuate sul calcolo delle probabilità ma soprattutto per gli sviluppi dati alla teoria dell'informazione essendo riconosciuto come il padre della cibernetica moderna. Un processo di Wiener è un processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti ed, è usato per modellizzare il moto browniano e diversi fenomeni casuali osservati nell'ambito della matematica applicata, della finanza e della fisica. Il processo di Wiener ricopre un ruolo importante anche in matematica pura, dove diede vita allo studio della Martingala[2]a tempo continuo, che risultò fondamentale per la descrizione e la modellizzazione di processi stocastici più complessi. Per questo tipo di processo ricopre un ruolo vitale nel calcolo stocastico, nei processi di diffusione e anche nella teoria del potenziale.

Bachelier influenzò anche Andrej Nikolaevič Kolmogorov, matematico russo che sviluppo il processo stocastico *markoviano* nel quale la probabilità di transizione che determina il passaggio ad uno stato di sistema dipende unicamente dallo stato di sistema immediatamente precedente (proprietà di Markov) e non dal come si è giunti a tale stato (in quest'ultima ipotesi si parla di processo non markoviano).

Francis Sowerby Macaulay (1862 – 1937), matematico inglese, diede un significativo contributo allo studio della matematica finanziaria. Nel 1916 pubblicò "The Algebraic Theory of Modular Systems" che ebbe una grande influenza nei successivi studi sulla geometria algebrica: a lui si deve la definizione di duration, chiamata anche Macaulay duration.

---

[2]Nella Teoria della probabilità, una martingala è un processo stocastico Xt, indicizzato da un parametro crescente t (spesso interpretabile come tempo), con la seguente proprietà: per ogni $s \leq t$, l'attesa di Xt condizionata rispetto ai valori di $X_r, r \leq s$, è uguale ad Xs. Il più noto esempio di martingala, in cui il parametro s è continuo, è senz'altro il moto browniano.

Nel periodo storico a ridosso della seconda guerra mondiale, un giapponese, Kiyoshi Itō, sviluppo le sue idee sull'analisi stocastica pubblicandole in molti importanti articoli. Itō è ampiamente noto come il fondatore della moderna teoria delle equazioni differenziali stocastiche, per la quale oggi si usa comunemente anche il nome di calcolo di Itō o calcolo stocastico. L'oggetto principale della sua analisi è l'integrale di Itō, o integrale stocastico; tra i risultati derivati è ricordato il Lemma di Itō, risultato che facilita la comprensione di eventi casuali. Tale teoria è ampiamente applicata, ad esempio, alla matematica finanziaria. "*In strutture matematiche perfettamente costruite, i matematici trovano lo stesso tipo di bellezza che altri trovano in brani musicali incantevoli, o in architetture magnifiche.*"[3]

La possibilità di controllare il rischio connesso all'aleatorietà del valore di un portafoglio finanziario attraverso il "principio di compensazione" fu alla base del lavoro di Harry Markowitz, economista statunitense, vincitore, insieme a Merton Miller e William Sharpe, del premio Nobel per l'economia nel 1990.

Nel 1952 sviluppo la *portfolio theory,* basandola proprio sul concetto di diversificazione e compensazione, già introdotto in un articolo dal de Finetti nel 1940; la teoria indica come misurare il rischio dei vari strumenti finanziari e come combinarli in un portafoglio per ottenere il rendimento massimo per un determinato rischio. Si basa pertanto sulla compensazione dei rischi stessi: il rischio indotto dall'aleatorietà dei valori dei titoli azionari può essere controllato selezionando un numero "sufficientemente grande" di titoli con rendimenti poco correlati tra loro – "*the lower correlation among security return, the greater the impact of diversification*"[4].

I limiti della teoria di Markowitz si estrinsecano in presenza di un portafoglio composto da contratti *interest rate sensitive*, poiché il valore dei flussi che lo compongono dipendono dal tasso di interesse e dalle sue variazioni e pertanto i rischi connessi risultano altamente correlati.

---

3 K Itō, (1998) My Sixty *Years in Studies of Probability Theory*: discorso di accettazione del Kyoto Prize in Basic Sciences

[4]Modigliani F., Porgue G.A., (1974) *An introduction to Risk and Return,* Financial Analyst journal

Un primo utilizzo del termine “immunizzazione” riferito appunto a portafoglio interest rate sensitive, viene fatto risalire a Frank Redington, attuario inglese conosciuto principalmente per la sua *interest rate immunization*.

Il teorema dell’immunizzazione fu sviluppata inizialmente da Redington (1952) come strumento per mantenere il valore delle attività in linea con quelle delle passività. Negli anni ’70 i tassi di interesse subirono delle forti oscillazioni ed è per questo motivo che si diffuse largamente la teoria dell’immunizzazione. Oltre al caso considerato da Redington, gli esempi di utilizzo più frequenti riguardano fondi pensione a prestazione definita, società disinvestimento, banche d’affari.

Un’analisi dell’immunizzazione fu anche sviluppata da Ronald Alme Fisher, statistico e matematico inglese (1890-1962) e André Weil, matematico francese (1906 – 1998) che introdussero nel loro teorema l’ipotesi di soft additivi. La strategia di immunizzazione di Fisher e Weil è stata proposta per superare il criterio secondo cui attivo e passivo devono avere la stessa maturità (maturity matching).

1.2. ALCUNE GRANDEZZE DI MATEMATICA FINANZIARIA

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

Il rendimento di un titolo, nell'ipotesi di cessione o di rimborso a scadenza, non comprende la sola componente interesse ma include anche il guadagno o la perdita in linea capitale e il reinvestimento dei frutti intermedi. Il rendimento globale è rappresentato da:

-rendimento cedolare (componente di reddito staccato, sempre positivo salvo il caso di titoli zero-coupon in cui è nullo);

-rendimento (positivo o negativo) legato allo scarto fra il prezzo di acquisto del titolo e il prezzo di cessione dello stesso mediante vendita o rimborso a scadenza (utile o perdita in c/capitale, componente di reddito incorporato);

-rendimento derivante dal reinvestimento delle cedole.

Il TIR ha il pregio di sintetizzare in un unico indicatore tutte le variabili che incidono sulla redditività dei titoli; tuttavia la verifica *ex post* dei frutti ottenuti può essere ben differente dal valore calcolato *ex ante*:

-il dato ipotizza che tutti i flussi staccati siano reinvestiti; l'ipotesi non è realistica (l'importo della cedola non è sempre reinvestibile, ad esempio perché inferiore al taglio minimo negoziabile);

-il calcolo presuppone una struttura dei tassi piatta e immodificabile; in tale ipotesi i tassi di reinvestimento delle cedole staccate in tempi diversi sono sempre identici e pari al rendimento effettivo calcolato ex-ante.

L'ipotesi crea un'immediata distorsione fra i titoli con lo stesso godimento cedolare, in quanto il mercato di fatto formula ipotesi di reinvestimento a tassi diversi in funzione del rendimento del titolo.
In realtà la curva dei tassi non solo indica rendimenti diversi per scadenze diverse, ma fluttua nel corso del tempo, modificandosi per posizione e/o inclinazione.

Noto il prezzo, la durata, il valore nominale e la cedola è possibile calcolare i TIR, o Tasso Interno di Rendimento, risolvendo l'equazione del VAN con *i* tale che il valore del VAN sia pari a zero.

$$VAN = -CF_0 + \frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+i)^n} = 0$$

Ovvero:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^{2t}} = 0$$

Dove:

t: scadenze temporali;

CF_t: flusso finanziario (positivo o negativo) al tempo *t*[5]

Il rischio e la liquidità possono influenzare i tassi d’interesse. Insieme a questi fattori anche la scadenza delle obbligazioni riveste un ruolo cruciale per determinare l’andamento della curva dei rendimenti. La curva dei rendimenti descrive la struttura per scadenza dei tassi d’interesse in riferimento ad una particolare tipologia di titoli quali i “titoli di stato”. In base all’andamento dei tassi d’interesse determinati in funzione delle diverse scadenze la struttura può assumere varie inclinazioni: può essere piatta, crescente o decrescente. Un’inclinazione positiva indica che i tassi di interesse a lungo termine hanno un valore superiore a quelli a breve termine; viceversa nel caso di inclinazione negativa sono i tassi a breve termine ad essere superiori a quelli a lungo termine. Infine, nel caso di curva “piatta”, i tassi d’interesse a lungo termine e a breve termine risultano allineati.

Empiricamente risultano dei fattori “tipici” che caratterizzano le curve dei rendimenti:

-le curve sono tendenzialmente crescenti;

-i tassi di interesse su obbligazioni diverse tendono a muoversi insieme;

[5] Caparelli F., D’Arcangelis A.M., (1999), La gestione del portafoglio obbligazionario, Guida agli strumenti di analisi e alle scelte di investimento, Milano, Edibank

-nel caso che i tassi di interesse a breve termine siano bassi, con molta probabilità avremo curve di rendimento con un'inclinazione positiva; viceversa nel caso opposto.

Le teorie più accreditate per spiegare la struttura per scadenza dei tassi di interesse sono: la teoria delle aspettative, la teoria della segmentazione del mercato e quella del premio per la liquidità.

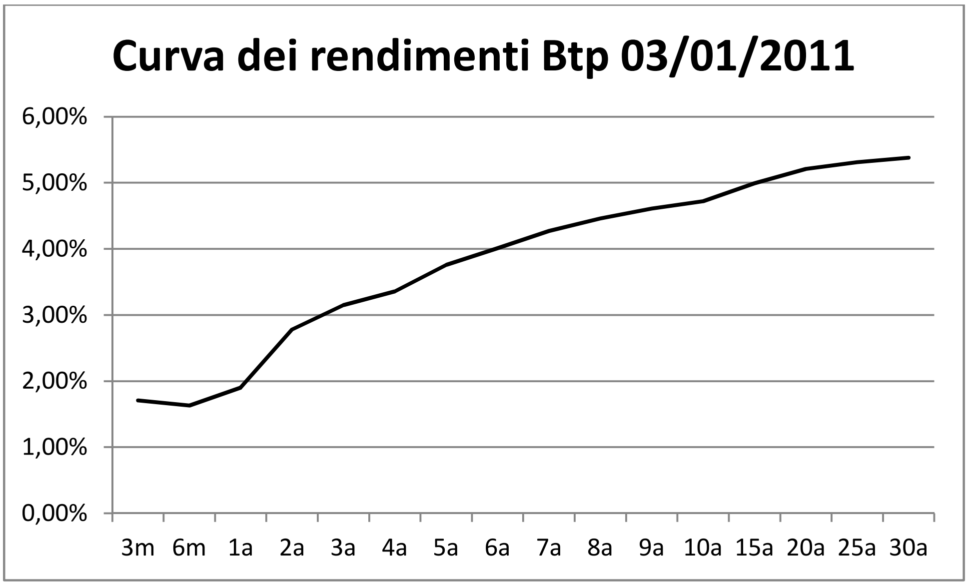
La teoria delle aspettative si basa sulla concezione secondo cui il tasso d'interesse su un'obbligazione a lungo termine sarà uguale alla media dei tassi di interesse a breve termine che i risparmiatori si aspettano di ricevere durante la vita dell'obbligazione. Le ipotesi sottostanti questa teoria sono l'indifferenza degli investitori per obbligazioni di una scadenza rispetto a un'altra; le obbligazioni risultano pertanto sostituti perfetti. La teoria delle aspettative spiega alcuni fattori che caratterizzano la curva dei rendimenti ma, d'altra parte non riesce a fornire una spiegazione del tipico comportamento della curva dei rendimenti: l'inclinazione positiva.

La teoria della segmentazione del mercato considera i mercati delle obbligazioni con scadenze diverse come mercati completamente separati. All'interno del mercato della singola obbligazione il tasso d'interesse sarà determinato dalla domanda e dall'offerta di quella singola obbligazione indipendentemente dai rendimenti delle altre con scadenze differenti. Quest'argomentazione si basa sul presupposto secondo cui gli investitori hanno preferenze per le obbligazioni con una determinata scadenza, cosicché la classe di investitori che ha un orizzonte temporale breve preferirà avere nei propri portafogli obbligazioni a breve termine. In genere le obbligazioni a lungo termine hanno prezzi inferiori e tassi di rendimento maggiori, per cui la curva dei rendimenti ha, nella maggioranza dei casi, una inclinazione verso l'alto. D'altra parte, considerando che questa teoria si bassa sull'ipotesi di indipendenza delle obbligazioni con scadenze diverse, non si riesce a comprendere perché i tassi di interesse tendano a muoversi insieme.

La teoria maggiormente accreditata è la teoria del premio per la liquidità che raccorda le teorie precedentemente enunciate: il tasso d'interesse riferito a un'obbligazione a lungo termine sarà uguale alla media tassi di interesse a breve termine attesi sulla durata dell'obbligazione a lungo termine, più un premio per la liquidità che dipende dalle condizioni della domanda e dell'offerta per quell'obbligazione. L'assunto alla base di questa teoria è che obbligazioni con scadenze differenti siano sostituti, il che significa che il rendimento atteso su un'obbligazione influenza quello su obbligazioni con scadenze diverse. Ammette inoltre che gli investitori tendono a preferire obbligazioni più a breve termine, perché sopportano un minore rischio di tasso di interesse. Per questo è necessario un premio positivo per la liquidità, che li induca a detenere le obbligazioni con scadenza più lunga. La teoria del premio per la liquidità viene quindi rappresentata così:

$$i_{nt} = \frac{i_t + i_{t+1}^e + i_{t+2}^e + \cdots + i_{t+(n-1)}^e}{n} + l_{nt} ,$$

dove l_{nt} rappresenta il premio per la liquidità per l'obbligazione a n anni nel momento t; il premio per la liquidità è sempre positivo e aumenta con la durata n dell'obbligazione. [6]



[6]F.S.Mishkin, S. G. Eakins, G. Forestieri, (2010) *Istituzioni e mercati finanziari*, seconda edizione, Torino, Pearson Addison Wesley

1.3. STRUMENTI FINANZIARI : LE OBBLIGAZIONI

OBBLIGAZIONI

Una obbligazione è un titolo rappresentativo di un rapporto di credito/debito fra un emittente (debitore) e un investitore (creditore).

I titoli obbligazionari sono emessi dallo Stato o da società, che prendono in prestito il capitale e si impegnano a restituirlo maggiorato degli interessi

Un'obbligazione è un certificato di debito che specifica gli obblighi del debitore verso il creditore o, più semplicemente, è un titolo di credito che stabilisce il momento nel quale il prestito verrà rimborsato e il tasso di interesse che verrà periodicamente corrisposto prima della scadenza. Chi acquista un'obbligazione presta il proprio denaro all'emittente, in cambio della promessa degli interessi e della restituzione del capitale prestato.

L'acquirente, o sottoscrittore, può detenere l'obbligazione fino a maturazione o negoziarla in una data precedente.

Le caratteristiche fondamentali dei titoli obbligazionari sono tre: la durata, il rischio di credito e il trattamento fiscale. Questi elementi definiscono il rischio del singolo titolo e sono fondamentali per la definizione del suo prezzo. Per la valutazione di un titolo di debito, oltre a queste caratteristiche, vanno considerati anche il tasso d'interesse e la vita residua.

La sempre più scarsa remunerazione offerta dalle obbligazioni ha portato dapprima alla ricerca di cedole attraenti rivolgendosi a debitori meno affidabili (Paesi emergenti) e quindi al diffuso utilizzo della cosiddetta «ingegneria finanziaria», con la produzione da parte dei principali intermediari di prodotti innovativi per rispondere alla crescente domanda del grande pubblico.

Le grandi banche internazionali ed italiane hanno così iniziato a produrre in modo sempre più veloce titoli sintetici, costruiti «impacchettando» in un singolo prodotto una normale obbligazione più una serie di opzioni e strumenti derivati, finora accessibili solo ai grandi investitori.

A partire dalla fine del 1996 abbiamo assistito ad una serie continua di nuovi prodotti obbligazionari, solitamente venduti attraverso gli sportelli bancari, apparentemente in grado di offrire maggiori rendimenti per gli investitori.

Gli emittenti, quando realizzano queste strutture, predispongono una serie di coperture che rende il loro costo dell'indebitamento certo ed inferiore rispetto a quello delle forme obbligazionarie classiche. Nel mondo dei titoli di debito, è difficile che qualcosa possa rilevarsi estremamente conveniente per entrambe le parti.

Nel portafoglio che si andrà a costruire, oggetto della valutazione per la determinazione dell'equilibrio finanziario, saranno presi in considerazioni titoli obbligazionari a struttura lineare, cioè senza componenti opzionali, quali i BTP emessi dal Tesoro dello Stato italiano e i Bund dello Stato tedesco.

Il Buono del Tesoro Poliennale (BTP) rappresenta un certificato di debito con scadenza superiore all'anno.

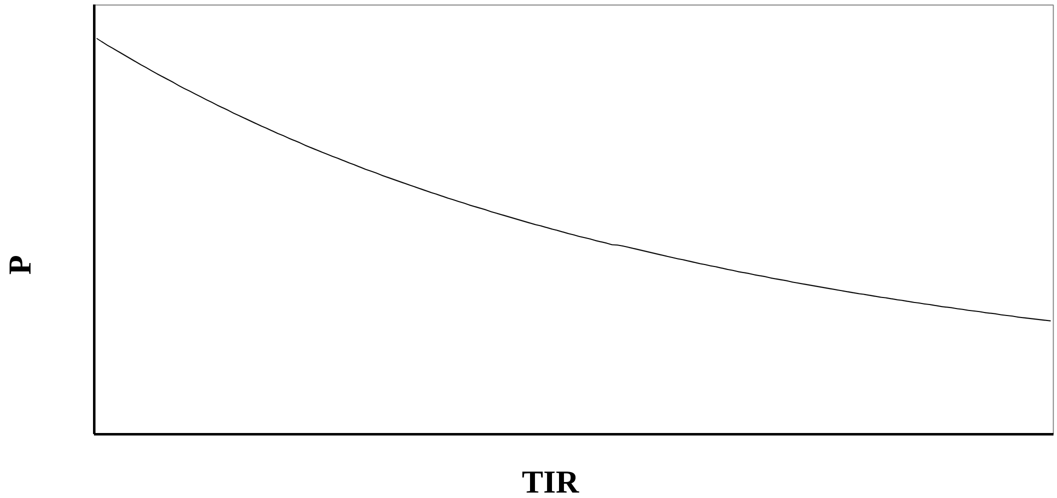
I BTP emessi dallo Stato Italiano sono negoziati al Mercato generale dei Titoli di Stato per le somme superiori ai 2,5 milioni di euro e al MOT per i lotti di dimensione inferiori.

Il titolo ha durata poliennale (usualmente con scadenze di 3,5,10,15 o 30 anni) e presenta cedole annuali pagate semestralmente (ad esempio, un BTP al 5% paga due cedole semestrali del 2,50% l'una). Il rendimento è dato dal tasso fisso della cedola e dalla differenza tra il prezzo di emissione e quello di rimborso (scarto d'emissione). Si tratta di un titolo 'a capitale garantito', ossia che prevede alla scadenza il rimborso dell'intero valore nominale. Il prezzo di un BTP è dato dalla somma del valore attuale di una rendita posticipata le cui rate corrispondono al valore costante della cedola C più il valore attuale del valore nominale V che si riceverà alla scadenza :

$$P = C \cdot \frac{(1+i_*)^n - 1}{i_*(1+i_*)^n} + \frac{V}{(1+i_*)^n}$$

con i_* tasso interno di rendimento.

Essendo il BTP uno strumento con cedole a tasso fisso è soggetto a oscillazioni di prezzo durante la sua "vita finanziaria", che saranno più marcate in funzione della durata del titolo (duration). In particolare si può dimostrare che se il TIR aumenta il prezzo diminuisce e viceversa:



Le emissioni avvengono due volte al mese con asta marginale. Come per tutti gli altri Titoli di Stato italiani, il taglio minimo è di 1.000 €.[7]

RISCHIO DI TASSO DI INTERESSE

Il rischio di tasso d'interesse è l'esposizione a variazioni sfavorevoli dei tassi d'interesse che modificano il valore dei contratti finanziari in essere.[8] Il rischio connesso all'aleatorietà del valore di un portafoglio può essere controllato utilizzando un principio di compensazione, sulla base della costruzione di un portafoglio che mantenga bilanciati guadagni e perdite, su un gran numero di operazioni aleatorie non correlate. Prendendo in esame portafogli costituiti da

---

[7] Caparelli F., D'Arcangelis A.M., (1999), La gestione del portafoglio obbligazionario, Guida agli strumenti di analisi e alle scelte di investimento, Milano, Edibank

[8]Principi per la gestione del rischio di tasso di interesse, Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, Basilea 1997

contratti interest rate sensitive, dato che i flussi dipendono dal tasso di interesse, i rischi sono altamente correlati. Per teoria dell'immunizzazione finanziaria si intende una teoria di portafoglio riferita a contratti rate sensitive di investimento e di debito, incentrata sul controllo del rischio di tasso di interesse. Di fronte all'incertezza ci si può comportare in modo diverso. Si ha il modo "adeguato e corretto": si può considerare tutte le ipotesi e in base alle probabilità connesse ad ogni scenario si vagliano i pro e i contro di ogni decisione in relazione a tutte le conseguenze possibili. Ci si può invece porre in modo "semplicistico e distorto" scegliendo ex ante un unico scenario nel campo di quelli possibili sulla base e decidere come se quello potesse essere certo. Le teorie sull'immunizzazione a cui si fa riferimento sono teorie semi-deterministiche, la cui costruzione si basa sul concetto di duration, *"corner stone of the strategy for immunization"*.[9]

1.4. IL CONCETTO DI DURATION

MACAULAY DURATION

Frederik Robertson Macaulay introdusse il concetto di duration in un articolo del 1938 in cui analizzava i movimenti dei tassi di interesse e i prezzi delle azioni dal 1856 negli USA. L'economista statunitense affermava che per uno studio delle relazioni tra un tasso di interesse di lungo o breve termine, sembrerebbe desiderabile avere un'adeguata misura della "longness". Viene usato il termine "duration" per rappresentare l'essenza del tempo in un contratto finanziario. È chiaro che il "numero di anni alla scadenza" è una inadeguata misura della duration: bisogna infatti ricordare che la "maturity" di un obbligazione è la data dell'ultimo e finale pagamento e che esso nulla ci dice sulla entità di ogni altro pagamento o sulla data in cui sono stati fatti. È chiaro che la duration è una realtà di cui la "maturity" è solo un fattore. Per confrontare due bond bisogna tenere

[9] Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bond holders from Naïve and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, The University of Chicago Press

conto del “coupon rates” e dei rispettivi “yelds”. Nell’esaminare il significato di duration sembrerebbe naturale assumere che la duration di ogni prestito che contiene più di un pagamento futuro, dovrebbe essere una sorta di media ponderata delle “maturities” dei singoli prestiti che corrispondono ad ogni futuro pagamento. Due serie di pesi si presentano immediatamente: i valori attuali e futuri dei vari singoli prestiti. Ora se deve essere usato il valore attuale ponderato, la duration di un bond è una media delle duration dei singoli pagamenti separati nel quale il bond può essere diviso. Per calcolare questa media la duration di ogni singolo pagamento-prestito deve essere pesata in proporzione al peso del singolo prestito; in altre parole, attraverso il rapporto del valore attuale del singolo futuro pagamento con la somma di tutti i valori attuali, che è il prezzo pagato per il bond.

Considerando

F = il valore facciale del bond in dollari,

I = la quantità di dollari pagati semestralmente, la quantità di dollari per un Coupon

P = la quantità di dollari pagati per il bond, il prezzo

n = il numero di semestri

R = il “rate” semestrale del tasso d’interesse; ad esempio se il titolo è venduto a un tasso del 4% annuo, R = 1.02

Q = il rapporto del valore facciale del titolo con il pagamento del Coupon

D = la duration del titolo in termini semestrali

$$D = \frac{\frac{I}{R} + \frac{2I}{R^2} + \frac{3I}{R^3} + \ldots + \frac{nI}{R^n} + \frac{nF}{R^n}}{\frac{I}{R} + \frac{I}{R^2} + \frac{I}{R^3} + \ldots + \frac{I}{R^n} + \frac{F}{R^n}}$$

e il prezzo è:

$$P = \frac{I}{R} + \frac{I}{R^2} + \frac{I}{R^3} + \ldots + \frac{I}{R^n} + \frac{F}{R^n} = \frac{I}{R-1} - \frac{\frac{I}{R-1} - F}{R^n}$$

Sommando i termini del numeratore e al denominatore e sostituendo QI per F, noi troviamo che:

$$D = \frac{R}{R-1} - \frac{QR + n(1 + Q - QR)}{R^n - 1 - Q + QR}$$

La duration cresce con n, sebbene, se R è maggiore di 1 + 1/Q, cioè se il titolo viene venduto sotto la pari, D raggiunge il massimo prima che n raggiunga l'infinito, scendendo gradualmente a R/(R-1), il valore raggiunto quando n eguaglia l'infinito.[10]

Quando l'autore introdusse la duration nel 1938, affermò che il concetto era, sicuramente pieno di difficoltà teoriche. Macaulay fece riferimento soprattutto alle difficoltà connesse con il tentativo di scoprire il reale tasso di sconto per ogni periodo semestrale nel futuro. Inoltre le difficoltà connesse con il problema di definire un concetto completamente soddisfacente di duration sono enormi e ogni soluzione proposta necessariamente contiene alcuni paradossi. L'autore concluse il capitolo in cui introdusse il "rivoluzionario" concetto di duration con una particolare esortazione al lettore:

---

[10] L'argomentazione e la dimostrazione è tratta da: Macaulay, Frederick R. (1938*), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, Chapter Title: II The Concept of Long Term Interest Rates, NBER

"We have tried to open the reader's eyes to the existence of the problem. The logical atmosphere in which the analysis has had to be carried on may seem to have been somewhat rarefied at times; but we believe that, if the reader has followed the arguments carefully, he will at least not accuse the writer of being like the good Puritan knight who, in religious controversy,

…could raise scruples dark and nice
And after solve 'em in a trice
As if Divinity had catch'd
The itch, on purpose to be scratch'd."[11]

La durata media è ancora utilizzata, per consuetudine, fra le caratteristiche dei prestiti obbligazionari ed è una delle variabili di manovra nei modelli tradizionali di gestione dell'intermediazione finanziaria. Generalizzando quanto espresso da F.Macaulay definiamo la duration di un contratto finanziario caratterizzato dal vettore di importi non negativi $x_{1,}$ $x_{2,}$, …., x_n esigibili rispettivamente ai tempi $t_{1,}$ t_2….t_n è:

$$D(t,x) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)x_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t,t_k)}$$

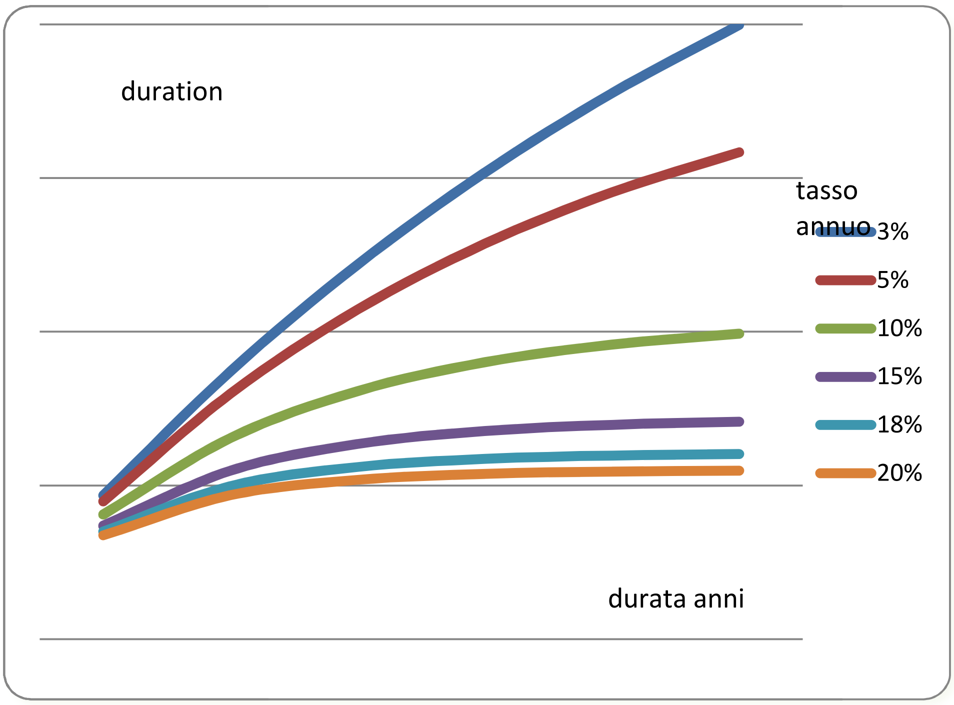
dove v(t, s) rappresenta la struttura dei prezzi di mercato considerata espressiva in t. Considerando quindi la duration di un flusso **x** con scadenze t_k= t+k, con k = 1,2, …m, in funzione della struttura dei tassi a pronti i (t, s) è data da:

[11]Macaulay, Frederick R. (1938*), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, Chapter Title: II The Concept of Long Term Interest Rates, NBER

$$D(t,x)=\sum_{k=1}^{m} k x_k [1+i(t,t_k)]^{-k} \Big/ \sum_{k=1}^{m} x_k [1+i(t,t_k)]^{-k}$$

Qualora si consideri una struttura per scadenza dei tassi di interesse costante ad un livelli i* la durata media finanziaria è detta, in particolare, flat yield curve duration. In numerose applicazioni, specialmente nella valutazione dei titoli, è invalso l'uso di utilizzare una versione semplificata della duration, in cui i valori attuali sono calcolati con il tasso interno di rendimento del flusso **x** valutato al prezzo di mercato.

È espressivo immaginare la duration come baricentro della distribuzione normalizzata dei valori attuali delle poste dei flussi di cassa sull'asse dei tempi. Facendo riferimento alla sua immagine fisica risulta intuitivo esprimere la proprietà per cui la duration è sempre minore o uguale alla vita a scadenza e maggiore o uguale dell'istante t_1, in cui viene corrisposta la prima posta (il baricentro non può essere esterno al segmento su cui sono distribuiti i pesi); coincide con la maturity nel caso il flusso sia costituito da un'unica posta (il baricentro è coincidente col punto di allocazione della massa, nel caso di distribuzione concentrata in un punto; nel caso in cui gli importi intermedi siano di valore trascurabile rispetto all'ultimo, la durata media finanziaria è prossima



alla maturity).
Il grafico mostra la relazione tra il numero degli anni del contratto finanziario e la duration per diversi tassi di interesse. Come si evince dalle curve rappresentate la duration aumenta col numero di anni alla scadenza ma decresce all'aumentare del tasso di rendimento con cui è calcolata.

DURATION E VOLATILITY

Macaulay volle definire una misura scalare che indicasse la lunghezza (in termini di tempo) di una obbligazione. Per esempio e contro esempio, egli propose e scartò varie misure prima di descrivere la duration. Egli mostrò che questa misura si comportava nel modo che egli voleva e derivò diverse proprietà.[12] Hicks pubblicò "Value and Capital" nel 1939, un anno dopo la pubblicazione del libro di Macaulay. Hicks definì e usò "an elasticity [of a capital value] with respect to a discount ratio"[13] che è l'equivalente della duration di Macaulay. Egli chiamò questa misura "average period"; Hicks usò questa misura per rendere concreta l'intuitiva nozione secondo cui, quando il tasso di interesse scende, i produttori sostituiranno la moneta (o il capitale che possono comprare) con altri mezzi di produzione e il periodo medio di produzione crescerà.

Lawrence Fisher nel 1966, al fine di calcolare il rendimento di un investimento, mostrò come dV/di = - D/V, dove V è il valore attuale di una serie di pagamenti, *i* il tasso di interesse utilizzato in regime di capitalizzazione composta nel continuo. Fisher sviluppò il suo procedimento ipotizzando di trovare il tasso di rendimento degli investimenti di un fondo pensione. Dato il valore attuale delle attività del fondo:

---

[12] Argomentaziane tratta da: Roman L. Weil, *Macaulay's Duration: An Appreciation*, The Journal of Business, Vol. 46, No. 4 (Oct.,1973), pp. 589-592, The University of Chicago Press
[13] J. Hics, (1946),*Value and capital*, Oxford, UK, Clarendon Press

$$\sum_{j=1}^{n} P_j e^{i(T-t_j)} = V_T,$$

dove:

i = il tasso interno di rendimento composto nel continuo

P = l'ammontare dei pagamenti del fondo

t_j= la data del j-esimo pagamento

T = la data in cui il tasso di rendimento deve essere calcolato

Una volta trovato i, si può facilmente ricavare r (tasso di rendimento annuale in capitalizzazione composta):

$$r = e^i - 1.$$

Data la Duration:

$$D = \frac{\sum_{j=1}(t_j - T)P_j(1+r)^{T-t_j}}{\sum_j P_j(1+r)^{T-t_j}},$$

$$D = \frac{-\sum_j(T - t_j)P_j e^{i(T-t_j)}}{\sum_j P_j e^{i(T-t_j)}},$$

o

$$D = \frac{-\sum(T - t_j)\, P_j(1+r)^{T-t_j}}{V_T} =$$

$$= \frac{-\sum_j(T - t_j)P_j e^{i(T-t_j)}}{V_T}$$

dove D = duration

Fisher afferma che la duration può essere utile per mostrare come cambia il valore di un'obbligazione se in regime di capitalizzazione continua i tassi di interesse variano. Fisher afferma come possa essere dimostrato che:

$$\frac{dV}{V} = -Ddi$$

o,

$$\frac{dV}{V} \approx -D\Delta i.$$ [14]

Generalizzando i risultati di Hicks e Fisher per un vettore di importi:

x= $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

esigibili nelle epoche

$t = t_1, t_2, t_3, \dots t_n$

Il valore in t=0 del flusso è

$$W(0,x) = \sum_{s=1}^{n} x_s \cdot (1+i)^{-t_s} = \sum_{s=1}^{n} x_s \cdot e^{-\delta t_s}$$

a seconda se consideriamo la capitalizzazione composta annualmente o quella continua. Il prezzo del titolo sarà quindi funzione del flusso di importi **x** (nel caso di un obbligazione ed in particolare un titolo di stato sono i flussi cedolari) e del tasso utilizzato. Per studiare l'effetto che ha una variazione del tasso di interesse

[14]Lawrence Fisher,1966, *An Algorithm for Finding Exact Rates of Return*, The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security Prices (Jan.,1966), pp. 111-118

sul prezzo del titolo e di conseguenza sul reddito dell'investitore sfruttiamo la derivata della funzione prezzo rispetto a variazioni del tasso di rendimento.

$$\frac{dW(\partial)}{d\partial} = -\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}$$

che esprime la sensibilità del prezzo a variazioni infinitesime di tasso. Dividendo la funzione per W(∂) si ottiene invece l'elasticità rispetto al tasso:

$$\frac{\frac{dW(\partial)}{d\partial}}{W(\partial)} = \frac{-\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{W(\partial)} = -\frac{\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{\sum_{s=1}^{n} x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}} = -D(\partial).$$

Risulta infatti che l'elasticità coincide con la duration; il fatto che il valore sia negativo sta a testimoniare la relazione negativa tra le variazioni di tasso e le variazioni di prezzo. Da ciò risulta chiaramente che l'elasticità aumenterà proporzionalmente al crescere della duration. Per questo titoli con duration alta risultano fortemente sensibili a lievi variazioni dei tassi. Sfruttando lo sviluppo della serie di Taylor, si mostra come la duration possa essere utilizzata per una stima della variazione subita dal prezzo del titolo in seguito ad uno shift del tasso di interesse: ipotizzando uno shift di ∂, con $\partial_2 = \partial + \Delta\partial$ risulterà:

$$W(\delta + \Delta\delta) \cong W(\delta) + \frac{dW(\partial)}{d\partial} \cdot \Delta\delta = W(\delta) - D(\delta) \cdot W(\delta) \cdot \Delta\delta$$

ed elaborando dalla precedente formula risulta:

$$\frac{W(\delta + \Delta\delta) - W(\partial)}{W(\partial)} \cong -D(\delta) \cdot \Delta\delta,$$

che mostra come la variazione percentuale del prezzo sia proporzionale alla duration del titolo e alla variazione del tasso.

Come sottolineato in precedenza nell'ambito dell'utilizzo della duration si fa riferimento al tasso interno di rendimento corrispondente al titolo; misura quindi le variazioni del prezzo in corrispondenza di variazioni del proprio tasso di rendimento e non già alle variazioni della struttura dei tassi in generale. Passando dal continuo al discreto, sfruttando sempre la derivata, risulta che la volatilità tende a coincidere con la modified duration ottenuta dividendo la duration per (1+i). Derivando come in precedenza otteniamo:

$$\frac{dW(i)}{di} = -\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot (1+i)^{-(s+1)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot (1+i)^{-s}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\frac{dW(i)}{di}}{W(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot (1+i)^{-s}}{W(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{n} s \cdot x_s \cdot (1+i)^{-s}}{\sum_{s=1}^{n} x_s \cdot (1+i)^{-s}} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(i)$$

che risulterà pari alla volatilità. Da quest'ultima calcoliamo, sfruttando sempre la serie di Taylor[15], la variazione del valore attuale, cioè il prezzo in corrispondenza dello shift del tasso:

---

15 La serie di Taylor di una funzione f(x) definita in un intervallo aperto (a − r, a + r) a valori reali o complessi e infinite volte derivabile è la serie di potenze

$$f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots,$$

che può essere scritta più compattamente come

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

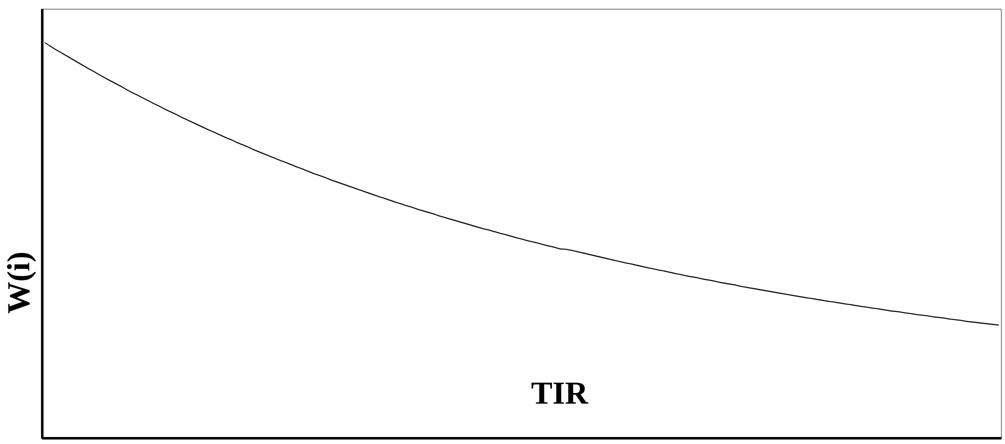
$$W(i+\Delta i) \cong W(i) + \frac{dW(i)}{di} \cdot \Delta i = W(i) - \frac{D(i)}{1+i} \cdot W(i) \cdot \Delta i$$

da cui,

$$\frac{W(i+\Delta i) - W(i)}{W(i)} \cong -\frac{D(i)}{1+i} \cdot \Delta i .$$

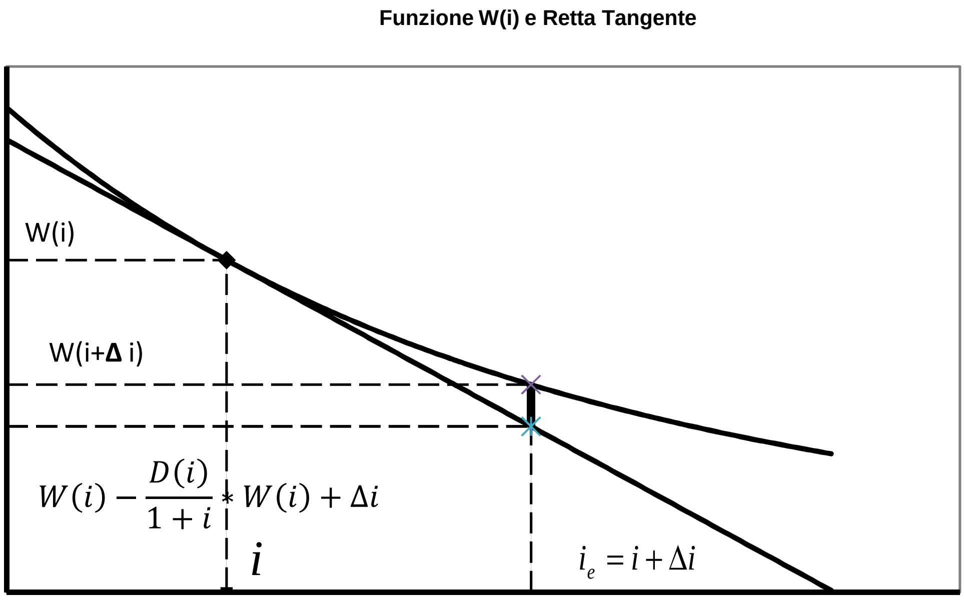
In particolare la duration nell'accezione presentata da Hicks e Fisher ha un valore teorico importante nella valutazione del rischio di tasso di interesse, inteso come variazione del prezzo di un titolo in seguito ad una variazione dei tassi di interesse. Essa infatti può essere intesa come volatilità.

Rappresentando graficamente la funzione prezzo:



Qui n! denota il fattoriale di n ed f (n)(a) denota la n-esima derivata della f valutata nel punto a. Se a = 0, la serie viene chiamata anche serie di Maclaurin.

La duration modificata misura la variazione del prezzo non sulla curva rappresentante il prezzo ma sulla retta tangente:



DURATION E CONVEXITY

Il problema di approssimare una funzione data per mezzo di funzioni più semplici è molto importante in matematica in quanto permette di descrivere l'andamento qualitativo della funzione, studiarne alcune proprietà e, pur di controllare l'approssimazione, fornire anche alcune valutazioni di tipo quantitativo. Fra le funzioni più semplici che solitamente vengono usate ci sono i polinomi: attraverso la piano tangente il differenziale dà la miglior approssimazione alla funzione per mezzo di un polinomio di primo grado. Si possono ottenere analoghe approssimazioni anche per gli ordini superiori, purché la funzione sia derivabile abbastanza volte. Questo vale in generale per funzioni in più variabili reali. Nel caso di funzioni in una sola variabile y = f(x) sarà la retta tangente la migliore approssimazione lineare di primo ordine.

Ciò significa che la variazione stimata attraverso la duration modificata è un'approssimazione della variazione del prezzo. Come si nota dal grafico l'approssimazione è soddisfacente solo per shift minimi. Un altro fattore rilevante è la simmetria nella variazioni di prezzo misurate attraverso la duration modificata per shift positivi o negativi dello stesso ordine. Questo effetto non è riscontrabile nella realtà.

Una migliore approssimazione lineare si potrebbe avere nel caso la funzione y=f(x) sia derivabile due volte attraverso un'approssimazione al secondo ordine: questa approssimazione si ottiene attraverso il polinomio di Taylor (dal nome del matematico inglese Brook Taylor) che ha la forma:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Questa è la "miglior" parabola con asse parallelo all'asse delle y che approssima la funzione in x_0.[16]

Per questo una migliore approssimazione della curva del prezzo si può attuare attraverso la Convexity. Nel continuo si ottiene:

$$\frac{d^2W(\partial)}{d\partial^2} = \sum_{s=1}^{n} s^2 \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s},$$

e dividendo per W(∂) si ottiene:

$$\frac{\frac{d^2W(\partial)}{d\partial^2}}{W(\partial)} = \frac{\sum_{s=1}^{n} s^2 \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{W(\partial)} = \frac{\sum_{s=1}^{n} s^2 \cdot x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{\sum_{s=1}^{n} x_s \cdot e^{-\partial \cdot s}} = D^2(\partial).$$

[16] Betti R., (2010), *Geometria e complementi di analisi matematica*, Bologna, Progetto Leonardo

Il coefficiente ottenuto è la cosiddetta duration di secondo ordine calcolabile come la media quadratica al quadrato ponderata delle scadenze. Nel continuo coincide esattamente con la convexity. Sfruttando il polinomio di Taylor otteniamo:

$$W(\delta+\Delta\delta)\cong W(\delta)+\frac{dW(\partial)}{d\partial}\cdot\Delta\delta+\frac{d^2W(\partial)}{d\partial^2}\cdot\frac{\Delta\delta^2}{2!}=W(\delta)-D(\delta)\cdot W(\delta)\cdot\Delta\delta+D^2(\delta)\cdot W(\delta)\cdot\frac{\Delta\delta^2}{2!}$$

Questo polinomio permette un'approssimazione tramite parabola. Prendendo la variazione percentuale:

$$\frac{W(\delta+\Delta\delta)-W(\partial)}{W(\partial)}\cong -D(\delta)\cdot\Delta\delta+D^2(\delta)\cdot\frac{\Delta\delta^2}{2!}.$$

La variazione percentuale è ora funzione non solo della duration ma anche di un secondo termine, nella quasi totalità dei casi positivo, che corregge la variazione del prezzo, aumentandone la dimensione in caso di rialzo e attenuandola in caso di ribasso. Nel discreto, prendendo la derivata seconda:

$$\frac{d^2W(i)}{di^2}=\sum_{s=1}^{n}s\cdot(s+1)\cdot x_s\cdot(1+i)^{-(s+2)}=\frac{1}{(1+i)^2}\cdot\sum_{s=1}^{n}\left(s+s^2\right)\cdot x_s\cdot(1+i)^{-s}$$

e dividendo per W(i) si ottiene:

$$\frac{d^2V(i)}{\frac{di^2}{V(i)}}=\frac{1}{(1+i)^2}*\frac{\sum_{s=1}(s+s^{2)*}*R_s*(1+i)^{-s}}{\sum_{s=1}R_s*(1+i)^{-s}}=\frac{1}{(1+i)^2}*D^2(i)=conv$$

SAMUELSON, UNA PRIMA APPLICAZIONE DELL'IMMUNIZZAZIONE

Nel 1945 Paul Anthony Samuelson (Gary, 15 maggio1915 – Belmont, 13 dicembre2009), economista statunitense, ignaro del lavoro di Macaulay (come scrisse in una lettera privata a Roman Weil), analizzò l'effetto dei cambi del tasso d'interesse su istituzioni quali le università, compagnie di assicurazione e banche. Egli sviluppò la misura del "*weighted average time period of payments*", essenzialmente equivalente alla duration. Samuelson esplicò la sua teoria affermando:

"*The following theorem will indicate the exact conditions under which interest rates help or hurt a given person or institution: Increased interest rates will help any organization whose (weighted) average time period of disbursements is greater than the average time period of its receipts.*"[17]

Samuelson fornì la seguente derivazione del risultato teorico necessario per la sua conclusione principale:

N = entrate "t" anni da oggi

C = le corrispondenti uscite

V = valore attuale

i = tasso di interessa annuo medio nel tempo

$$V = \sum \frac{N_t}{(1+i)^t} - \sum \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

e

---

[17] Paul A. Samuelson, *The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System*, American Economic Review 35 (March 1945):pagg 16-27.

$$\frac{dV}{di} = -\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^2}\left\{\sum \frac{tN_t}{(1+i)^{t-1}} - \sum \frac{tC_t}{(1+i)^{t-1}}\right\}$$

e si trova che (dV/di) > 0, = 0, < 0 a seconda che $\bar{N} > \bar{C}, \bar{N} = \bar{C}, \bar{N} < \bar{C}$ dove $\bar{N}$ e $\bar{C}$, sono rispettivamente le durate medie ponderate delle entrate e delle uscite, i cui pesi sono proporzionali all'ammontare attualizzato. Ciò significa che una crescita del tasso di interesse sarà favorevole a quelle istituzioni la cui durata media ponderata degli esborsi è maggiore della durata media dei ricavi; questo è dovuto alla presenza del segno negativo che giustifica la relazione inversa.

Roman Weil trovò un errore nella dimostrazione di Samuelson. Nella presentazione del lavoro di Samuelson nell'articolo del British Journal, "*Macaulay's Duration: An Appreciation*" aggiunse in nota la sua considerazione sul fatto che secondo la teoria di Samuelson il successivo aumento dei tassi d'interesse nel dopoguerra avrebbe favorito le banche il cui passivo ha una duration minore dell'attivo: la sua formula contiene un errore in quanto il termine ln(1+i) non sarebbe dovuto apparire.[18]

Samuelson non identificò l'applicazione di questo risultato alla gestione di un portafoglio a reddito fisso; ma come scrive Geoffrey Poitras: "*What Samuelson do espartially anticipate is the solution given by Rendington to the immunization problem*".[19]

---

[18]Roman L. Weil, Macaulay's Duration: *An Appreciation, The Journal of Business*, Vol. 46, No. 4 (Oct.,1973), pp. 589-592, The University of Chicago Press

[19] Geoffrey Poitras, *Friederick R. Macaulay, Frank M. Redington and the Emergence of Modern Fixed Income Analysis*", Simon Fraser University chapter 4 in Pioneers of Financial Economics (vol.2), Cheltenham, UK Edward Elgar

1.5. IL TEOREMA DI REDINGTON

Frank Mitchell Redington ha introdotto il termine immunizzazione finanziaria e ha dato il via allo sviluppo di questa tematica. Il titolo del capitolo a cui si fa riferimento è "*Matching of investment-Immunization*"; capitolo appartenente all'opera "*Review of the Principles of Life-Office Valuations*". L'opera, come afferma lo stesso autore, è volta ad esaminare la pratica e i principi delle valutazioni del "*life-office*". Rilevanza particolare riveste il terzo capitlo succitato dove l'autore definisce il termine matching: "*The word 'matching' implies the distribution of assets to make them, as far as possible, equally as vulnerable as the liabilities to those influences which affect both. In its widest sense this principle includes such important aspects as the matching of assets and liabilities in currencies.*"[20] Il termine matching però ha una connotazione troppo ampia; l'accezione rilevante implica una distribuzione delle scadenze delle attività in relazione alle scadenze degli esborsi in modo da ridurre la possibilità di perdite che scaturiscono da una cambiamento nei tassi d'interesse. Per evidenziare il significato specifico di matching Redington introduce una nuova etichetta al termine ed è per questo che userà l'espressione "immunization". Adottando certe semplificazioni del problema pratico sarà assunto che, in uno specifico momento, i titoli possono essere ottenuti per produrre un tasso di interesse uniforme qualunque sia la scadenza, e che tutti i fondi siano investiti in titoli a reddito fisso che siano redimibili o irredimibili a una data prefissata. Il teorema di Rendington può essere formalizzato nel modo seguente:

Sia $\delta(t,s)$, l'intensità istantanea di interesse corrispondente alla struttura a termine osservata al tempo t, siano **x** e **y** due flussi ad elementi non negativi con scadenze t_1, t_2, $\dots t_m$ e valori uguali al tempo t:

$$W(t,x) = W(t,y)$$

[20] Frank M. Redington,1952, *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Institute of Actuaries

Se la curva dei rendimenti subisce nell'istante t^+, immediatamente successivo a t, uno shift additivo di ampiezza aleatoria infinitesima, allora il valore post-shift del flusso x sarà non minore del valore post-shift di y:

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y)$$

se la durata media finanziari di **x** è uguale alla durata media finanziaria di **y**:

$$D(t, x) = D(t, y)$$

e se il momento di second'ordine di **x** è non minore del momento di second'ordine di **y**:

$$D^{(2)}(t, x) \geq D^{(2)}(t, y).$$

La dimostrazione del teorema è la seguente:
Si indichi con $W_N(t)$ il valore netto dei flussi **x** e **y**, calcolato con $\delta(t, s)$;sia quindi:

$$W_N(t) = W(t, x) - W(t, y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t,u) du}.$$

Se in t^+ ha effetto uno shift di ampiezza aleatoria Y, risulterà:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y$$

ed il valore netto post-shift sarà una funzione di Y nella forma:

$$W_N(t^+, Y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e^{-\int_t^{k} \delta(t^+,u) du} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t^+,u) du} e^{-Y(t_k - t)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)}.$$

Le derivate prima e seconda di $W_N$rispetto a Y sono date dalle:

$$W_N' = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\,(x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)},$$

$$W_N'' = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2\,(x_k - y_k)\, v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)}.$$

Se si considera lo sviluppo in serie di Taylor della funzione$W_N(Y)$ intorno a Y=0, arrestato al second'ordine, si ha:

$$W_N(Y) = W_N(0) + Y W_N'(0) + \left(\frac{1}{2}\right) Y^2 W_N''(0).$$

Il vincolo di bilancio assicura che sia $W_N = 0$; inoltre, la condizione di duration D(t, **x**) – D(t, **y**) = 0, con il vincolo di bilancio, garantisce che è $W_N'(Y) = 0$. Quindi l'immunizzazione locale (cioè la condizione di $W_N(Y) \geq 0$, per valori di Y appartenenti ad un intorno dello zero) sarà conseguita se $\left(\frac{1}{2}\right) Y^2 W_N''(0)$risulta non negativo, cioè si ha:

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2\, x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2\, y_k\, v(t, t_k),$$

che per il vincolo di bilancio, equivale alla condizione

$$D^{(2)}(t, x) \geq D^{(2)}(t, y).$$

Redington conclude il capitolo in cui sviluppa il teorema sull'immunizzazione finanziaria esplicando l'essenza del teorema; egli afferma che essa è contenuta in "*two definitions, two rules and a rider*":

"'liability-outgo': the expected net outgo of the existing business in calendar year t, viz. claims and expenses less premiums.

'asset-proceeds': the expected proceeds from the existing assets in year t, viz. interest plus maturing investments.

Rule 1. The mean term of the value of the asset-proceeds must equal the mean term of the value of the liability-outgo.

Rule 2. The spread about the mean of the value of the asset-proceeds should be greater than the spread of the value of the liability-outgo.

Rider. The mean term of the asset-maturity dates is considerably greater than that of the value of the asset-proceeds."[21]

Nel 1957 David Durand, riprese l'argomentazione di Redington e affermò che che le uniche attività con una duration abbastanza lunga da eguagliare la duration del passivo, nel caso di istituzioni come i fondi pensione (che presentano solitamente una duration del passivo molto lunga), sono le "Growth Stocks". Le "Growth Stocks" sono titoli ad alto potenziale di crescita, come ad esempio le azioni emesse da società che operano nel comparto dell'alta tecnologia. Durand afferma che nel caso di titoli obbligazionari è estremamente difficile costituire un

---

[21]Frank M. Redington,1952, *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Institute of Actuaries

portafoglio che abbia una duration uguale a quella del passivo, quando quest'ultima è particolarmente lunga.[22]

1.6. IL TEOREMA DI FISHER E WEIL

Il modello di immunizzazione finanziaria di Redington viene ripreso da Fisher and Weil nel 1971. Redington, aveva caratterizzato il suo modello considerando una struttura dei rendimenti nota nell'istante decisionale t. La struttura dei rendimenti era ipotizzata essere rappresentata da una intensità istantanea di interesse costante sull'intero periodo di attività dell'investitore, che potesse evolvere soltanto per una traslazione di ampiezza aleatoria, con effetto immediatamente successivo a t. Da ciò si evince una forte semplificazione della realtà: il modello della struttura dei rendimenti è deterministico per quanto riguarda la forma della funzione dell'intensità di interesse, il tipo e l'istante di perturbazione. L'incertezza peserà quindi solamente sull'ampiezza e sul segno dello shift additivo. Fisher e Weil riprendono il modello dello shift additivo con una struttura dei rendimenti nota in t, ma non costante.

Fisher e Weil definiscono le basi per un investimento ottimale e le implicazioni metodologiche sottostanti. Affermano che nella teoria del portafoglio, l'orizzonte temporale o *holding period* deve essere specificato sin dall'inizio.
Bisogna considerare che un obbligazione è caratterizzata da diverse dimensioni: la qualità, la maturity, le call properties e il tasso interno di rendimento. Nel costruire il portafoglio Fisher e Weil assumono che l'investitore acquisti solamente titoli della qualità migliore. Macaulay infatti aveva trovato che "*movement of the yields and prices of bonds of the highest grade reflect primarily changes in long term interest rate*".[23] L'investimento è naturalmente influenzato

---

[22] David Durand,1957, *Growth Stocks and the Petersburg Paradox*, The Journal of Finance, Vol. 12, No. 3 (Sep.,1957), pp. 348-363

[23] Frederick R. Macaulay (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, Chapter Title: II The Concept of Long Term Interest Rates, NBER

dagli effetti del rischio di default, ma Fisher e Weil affermano esplicitamente di non tenerne conto. Inoltre nella formulazione dei succitati autori l'investitore è indifferente nei confronti del tasso cedolare perché intende reinvestire i flussi ricevuti. Per questo l'intento di Fisher e Weil è decretare quale siano le maturity dei titoli in cui investire. Gli autori affermano che la strategia più ovvia sarebbe quella di acquistare titoli che nel momento dell'acquisto abbiano una maturity uguale a quella del passivo: "*This strategis the naive one of our title*"**.** Fisher e Weil definiscono la strategia migliore per ottenere un rendimento prefissato: un portafoglio d'investimento è immunizzato per un holding period se il suo valore alla fine dell'holding period, senza riguardo nei confronti dell'andamento dei tassi di interesse durante il periodo di riferimento, sarà sicuramente maggiore o uguale al valore che avrebbe avuto se i tassi di interesse fossero rimasti costanti durante il periodo di riferimento.

Per caratterizzare l'equilibrio finanziario del portafoglio ci riferiamo al teorema di immunizzazione di Fisher e Weil, che è formulato nell'ipotesi classica. Un portafoglio di titoli obbligazionari si dice immunizzato da uno shift additivo, su un certo orizzonte temporale, se il reddito prodotto a fine periodo (reddito da reinvestimento più valore di smobilizzo), nel caso abbia avuto effetto lo shift, è comunque non minore del reddito che sarebbe prodotto in assenza di shift. Con formulazione equivalente, in termini di rendimento (holding period return), se il portafoglio è immunizzato, il rendimento ex ante (il cosiddetto rendimento programmato) è non minore del rendimento ex post. L'immunizzazione finanziaria è un metodo che permette di costruire il portafoglio in modo tale che le distribuzioni temporali delle poste attive e passive siano il più "simili" possibile e quindi "egualmente" vulnerabili rispetto a variazioni della struttura per scadenza. Per fare ciò devono essere soddisfatti i seguenti vincoli:

- il valore attuale dell'attivo all'epoca t deve essere uguale al valore attuale del passivo (sempre in t)
- la duration dell'attivo deve essere uguale alla duration del passivo.

L'ipotesi su cui si basa il concetto di immunizzazione finanziaria di Fisher e Weil è quella di shift additivi.

La struttura del mercato al tempo t è stata identificata con la struttura dei corsi v(t, s), che fornisce le ragioni di scambio fra beni monetari caratterizzati dalla data di esigibilità. La struttura dei corsi può essere esplicata in riferimento all'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$, considerando espressiva la curva dei rendimenti:

$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s \delta(t,u)du.$$

Nell'impostazione classica si ipotizza che la struttura a termine vari a seguito di traslazioni rigide della curva dei rendimenti, intendendo che il grafico della funzione $\delta(t,s)$ possa subire, al variare del tempo t, soltanto spostamenti (shift) paralleli, in senso verticale, di ampiezza e segno incogniti. L'ipotesi, cosiddetta di shift additivi, può essere schematizzata ponendo, per ogni $t' \geq t$ e per ogni $s \geq t'$:

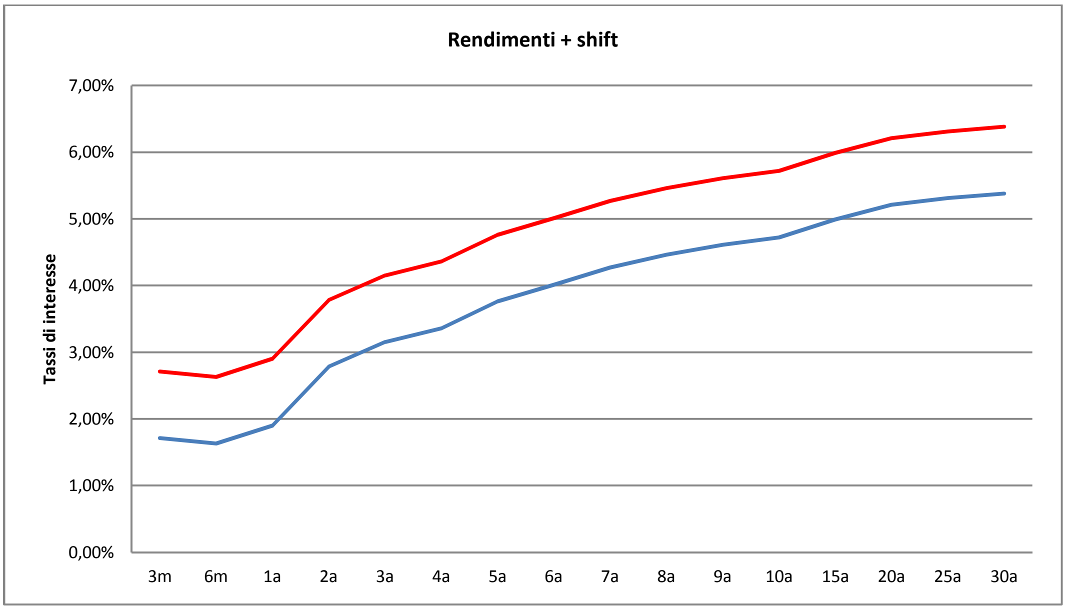
$$\delta(t',s) = \delta(t,s) + Z(t,t'),$$

dove Z è una variabile aleatoria, indipendente da s, che rappresenta l'ampiezza dello shift additivo subito dalla curva dei rendimenti nell'intervallo di tempo tra t e t'. Proprio per l'indipendenza di Z da s le perturbazioni avvenute tra t e t' non alterano la forma della curva $\delta(t,s)$, ma provocano traslazioni di ampiezza casuale Y che influenzano identicamente le intensità istantanee di interesse di qualsiasi scadenza.
L'ipotesi classica di shift paralleli può essere formulata anche in termini di intensità di rendimento:

$$h(t',s) = \frac{1}{s-t'}\int_{t'}^{s}\delta(t',u)du = \frac{1}{s-t'}\int_{t'}^{s}\delta(t,u)du + \frac{1}{s-t'}\int_{t'}^{s}Zdu = h(t,t',s) + Z.$$

Per cui l'intensità di rendimento a pronti in t' (per ogni t'>t) ha stessa forma dell'intensità implicita in t per l'istante t', modificata per un termine additivo Z, indipendente da s ed uguale alla somma delle ampiezze degli shift tra t e t'.

Rappresentando graficamente una traslazione rigida dei tassi di interesse:



Sotto queste ipotesi il teorema di Fisher e Weil afferma che, data l'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$ corrispondente alla struttura a termine osservata al tempo t, siano

$L > 0$, un importo esigibile al tempo H>t,

x un flusso di importi non negativi con scadenze t_1, t_2, $t_3 \ldots t_m$

i cui valori sono uguali al tempo t,

W(t.x)=W(t, L).

Sotto l'ipotesi descritta precedentemente di uno shift additivo nell'istante t^+: il valore post shift del flusso di importi **x** (l'attivo), sarà non minore del valore post shift di L (il passivo):

$$W(t^+, x) = W(t, L)$$

se e solo se la duration dell'attivo e del passivo (che coincide con la maturity data l'ipotesi di un passivo caratterizzato da un'unica uscita):

$$D(t, x) \geq H - t.$$

Sia Q(t, x, L), il rapporto tra i valori attuali dell'attivo e del passivo al tempo t:

$$Q(t, x, L) = \frac{W(t, x)}{W(t, L)}.$$

Al tempo t questo rapporto sarà uguale a uno per l'ipotesi sopra esposte.
Lo shift additivo comporterà una variazione della struttura dei rendimenti:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y, s \geq t^+.$$

In ogni istante t antecedente a t^+, corrispondente alla data del primo flusso, si ha:

$$Q(t^+, x, L, Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{m} x_k è^{\int_{t_k}^{H} \delta(t,u)du},$$

quindi il valore post shift sarà:

$$Q(t^+, x, L, Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{m} x_k e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t^+,u)du} = \frac{1}{L} \sum\nolimits_{k=1}^{m} x_k e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t,u)du} \; e^{Y(H-t_k)}$$

dato che per Y=0, Q sarà uguale a uno.

Calcolando la derivata prima e seconda di $Q(t^+)$ rispetto a Y si ha:

$$Q'(Y) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{m}(H - t_k)x_k e^{\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} e^{Y(H-t_k)},$$

$$Q''(Y) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{m}(H - t_k)^2 x_k e^{\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} e^{Y(H-t_k)},$$

e dato che la derivata seconda risulta sempre maggiore o uguale a 0 la funzione risulta convessa. Se la derivata prima calcolata rispetto a Y in Y=0 risulta uguale a zero allora, la funzione $Q(t^+)$ assumerà valori maggiori o al più uguali a uno per qualsiasi entità dello shift.

$$Q'(0) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{m}(H - t_k)\, x_k e^{\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} = 0,$$

che coincide con la soluzione D(t, x)=H-t. Si può scrivere infatti:

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k v(t, t_k)}{L v(t, H)} = H.$$

Questo teorema in riferimento alla sua formulazione originaria fornisce le basi per la costruzione di un portafoglio di investimento che vuole garantire un rendimento prefissato proteggendo il valore del portafoglio (attivo e passivo) da eventuali variazioni dei tassi di interesse. L'intuizione che si estende dietro al teorema è basata sulla duration, *"corner stone of the strategy for immunization"*[24]. Costruendo un attivo e un passivo che abbiano un uguale valore attuale e una stessa duration, eventuali variazioni dei tassi di interesse modificheranno il valore dell'attivo e del passivo in ugual modo. Fisher e Weil sostengono inoltre che

[24] Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bond holders from Naïve and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, No. 4, pp 415

eventuali flussi ricevuti devono essere reinvestiti in titoli che abbiano una duration tale da mantenere le duration dell’attivo e del passivo allineate.

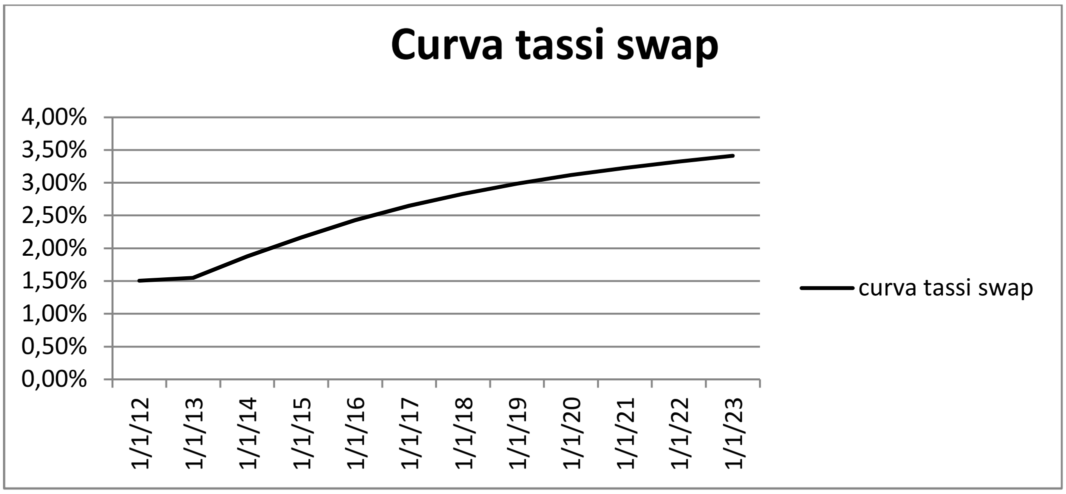
CAPITOLO 2. L'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA SOTTO LE IPOTESI DI FISHER E WEIL

1.7. COSTRUZIONE DEL PASSIVO

Al fine di confutare la veridicità del teorema di Fisher Weil sull'immunizzazione finanziaria sono stati costruiti due portafogli obbligazionari in cui il passivo è identico ed in cui l'attivo è composto in un caso da titoli italiani e nell'altro caso da titoli tedeschi. La provvista è stata creata ipotizzando il finanziamento ottenuto attraverso l'emissione di uno Zero Coupon Bond a 5 anni con le seguenti caratteristiche:

Data inizio finanziamento	03/01/11
Ammontare finanziato	€ 100.000.000,00
Scadenza	02/01/16
Tasso	2,42700%
Term in days	1.825
Maturity	5
Fattore di attualizzazione	0,887008407
Fattore di capitalizzazione	1,127385031
Duration	5
Deflusso	-€ 112.738.503,05

Il tasso a cui ci finanziamo è stato determinato interpolando la curva dei tassi Swap del 03/01/2011:



Fonte:Bloomberg infoprovider

Il tasso Swap a 5 anni desunto dalla precedente curva è del 2,427%; dato che il flusso di cassa è unico (02/01/2016) la duration del contratto finanziario corrisponde, così come per tutti i titoli zero coupon, alla maturity ed è pari a 5 anni. Uno Zero Coupon Bond con queste caratteristiche prevede un deflusso finanziario alla scadenza di € 112.738.503,05 calcolato nel modo seguente:[25]

$$deflusso = €\,100.000.000 * 1{,}127385031,$$

dato che:

$$fattore\ di\ capitalizzazione = (1 + 2{,}42700\%.)^5.$$

Finanziandoci per mezzo del predetto Zero Coupon Bond in data 03/01/2011 abbiamo un capitale disponibile di € 100.000.000,00 con il quale costruiamo due portafogli, costituiti rispettivamente da titoli del tesoro italiani e da titoli del tesoro tedeschi. Dall'analisi dei portafogli si vuole testare la tenuta dell'immunizzazione finanziaria ed esaminare i portafogli in epoca successiva - 01/08/2011- analizzandoli sotto le ipotesi del teorema di Fisher e Weil e

[25] Il regime a cui si fa riferimento è quello di capitalizzazione composta nel discreto

confrontando i risultati ottenuti con quelli effettivamente ottenibili nella realtà. I portafogli saranno denominati rispettivamente Portafoglio Italia e Portafoglio Germania.

1.8. PORTAFOGLIO ITALIA

COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO

IT0003472336: Buono del Tesoro Poliennale
Emittente: Repubblica italiana
Tipo di emissione: Titoli di Stato
Data di godimento: 01/02/2003
Data di stacco prima cedola: 01/08/2003
Data di scadenza: 01/08/2013
Periodicità della cedola: semestrale
Modalità di rimborso: in un’unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale

IT0004019581: Buono del Tesoro Poliennale
Emittente: Repubblica italiana
Tipo di emissione: Titoli di Stato
Data di godimento: 01/02/2006
Data di stacco prima cedola: 01/08/2006
Data di scadenza: 01/08/2016
Periodicità della cedola: semestrale
Modalità di rimborso: in un’unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale

IT0004594930: Buono del Tesoro Poliennale
Emittente: Repubblica italiana

Tipo di emissione: Titoli di Stato

Data di godimento: 01/03/2010

Data di stacco prima cedola: 01/09/2010

Data di scadenza: 01/09/2020

Periodicità della cedola: semestrale

Modalità di rimborso: in un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale[26]

L'investimento è ipotizzato essere effettuato in data 03/01/2011. In questa data i prezzi dei BTP sono:

ISIN	CORSO SECCO	RATEO	PREZZO TEL QUEL	TIME TO MATURITY
IT0003472336	103,07	1,790	104,860	2,578
IT0004019581	99,798	1,579	101,377	5,581
IT0004594930	95,562	1,370	96,932	9,668

Analizzando i flussi di cassa dei titoli calcoliamo il tasso interno di rendimento. Dato il valore attuale $W(t, x_k)$ del flusso x definito dal vettore degli importi non negativi $x_{1,}$ $x_{2,}$, …., x_n esigibili rispettivamente ai tempi $t_{1,}$ t_2….t_n; si definisce tasso interno di rendimento l'unico numero reale *i* soluzione dell'equazione

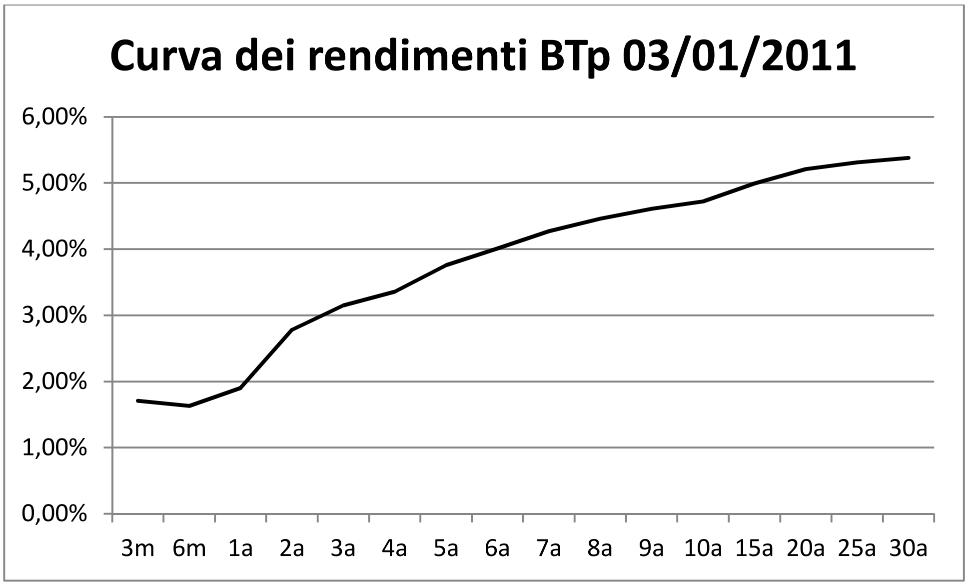
$$W(t,x) = \sum_{K=1}^{n} x_k \,(1+i)^{-(t_k - t)}$$

nell'incognita i. In questo caso specifico il valore all'epoca W(t, x) in t=03/01/2011 è il prezzo Tel Quel del titolo e gli importi x_k sono i flussi cedolari. Analizzando i tre titoli i tassi interni di rendimento sono:

ISIN	TASSI INTERNI DI RENDIMENTO
IT0003472336	3,03%
IT0004019581	3,82%
IT0004594930	4,62%

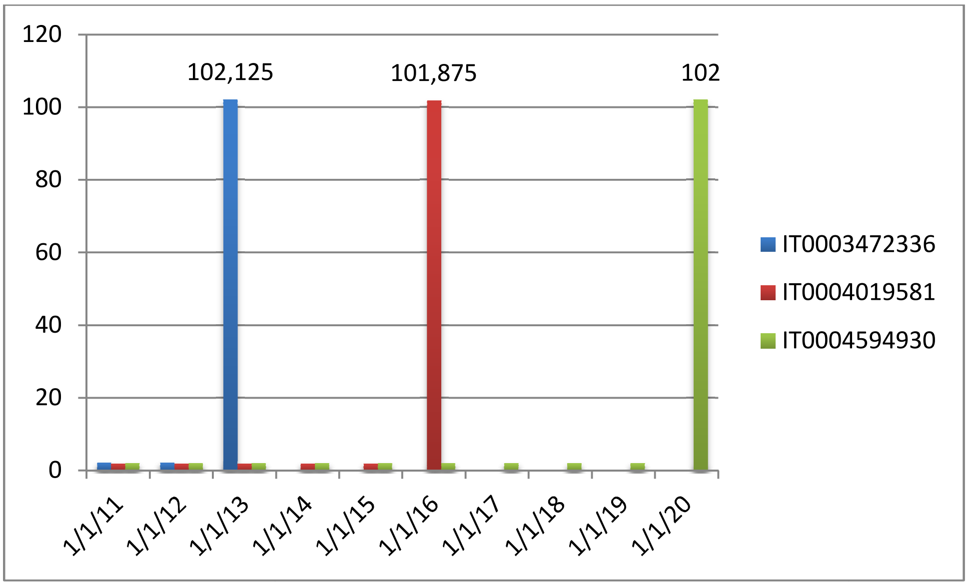
[26] Fonte: Bloomberg infoprovider

I titoli che compongono il portafoglio sono caratterizzati da “time to maturity” crescente e di conseguenza da tassi interni di rendimento crescente come può essere desunto analizzando la curva dei tassi in data 03/01/2011:



Fonte:Bloomberg infoprovider

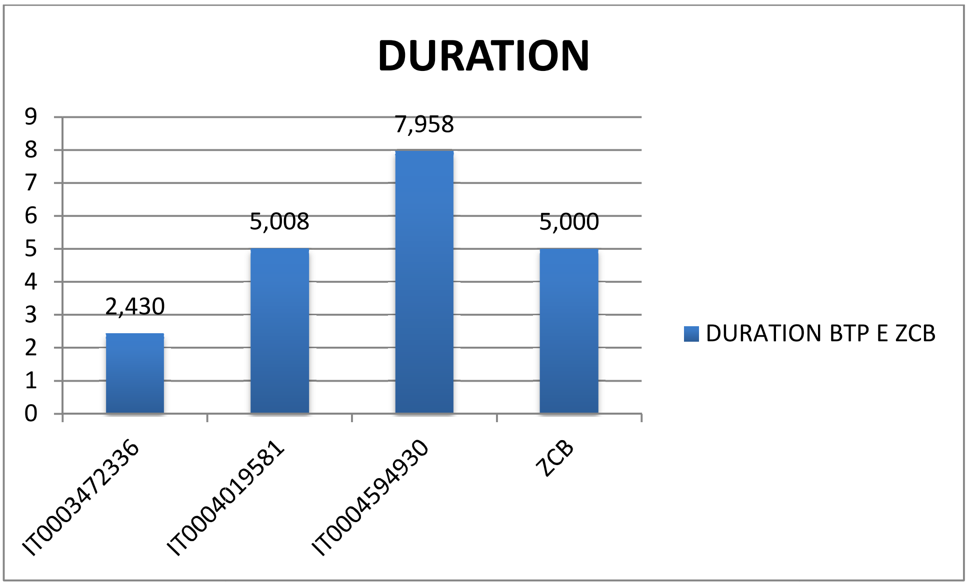
Sulla base dei tassi interni di rendimento si può calcolare la duration dei tre titoli: la duration è la durata media finanziaria, come spiegato nel precedente capitolo.



Il grafico rappresenta i flussi garantiti dai titoli nelle diverse epoche; il flusso alla scadenza (valore nominale del titolo più flusso cedolare) è preponderante rispetto ai flussi cedolari semestrali. Da quest'analisi si può dedurre che le duration dei titoli saranno simili al time to maturity, che rappresenta un valore in termini annui inteso come differenza tra la data in cui il contratto finanziario arriverà a scadenza e la data in cui stiamo effettuando la nostra analisi. Maggiore divergenza tra la duration e il time to maturity si ha nel titolo IT0004594930 dato che esso è caratterizzato da un numero maggiore di flussi intermedi che tenderanno a contrarre la durata media finanziaria del titolo.

La duration dei titoli del Portafoglio Italia sono:

ISIN	DURATION	TIME TO MATURITY
IT0003472336	2,430	2,578
IT0004019581	5,008	5,580
IT0004594930	7,958	9,668



Nel grafico è stata inserita anche la duration dello Zero Coupon Bond con cui è stato effettuato il finanziamento in modo da avere un confronto grafico tra duration dei titoli dell'attivo e duration del passivo.

Per analizzare l'esistenza o meno di un equilibrio finanziario del portafoglio ci riferiamo al teorema di immunizzazione di Fisher e Weil, che è formulato nell'ipotesi classica.

Un portafoglio di titoli obbligazionari si dice immunizzato da uno shift additivo, su un certo orizzonte temporale, se il reddito prodotto a fine periodo (reddito da reinvestimento più valore di smobilizzo), nel caso abbia avuto effetto lo shift, è comunque non minore del reddito che sarebbe prodotto in assenza di shift. Con formulazione equivalente, in termini di rendimento (holding period return), se il portafoglio è immunizzato, il rendimento *ex ante* (il cosiddetto rendimento programmato) è non minore del rendimento *ex post*.

La ricerca delle quantità di titoli da acquistare che permettano di rispettare i vincoli enunciati in precedenza sull'immunizzazione finanziaria, può essere dedotta attraverso un'applicazione di un sistema di programmazione lineare:

trovare a_1, a_2, a_3 tali da minimizzare il costo di acquisto del portafoglio:

,

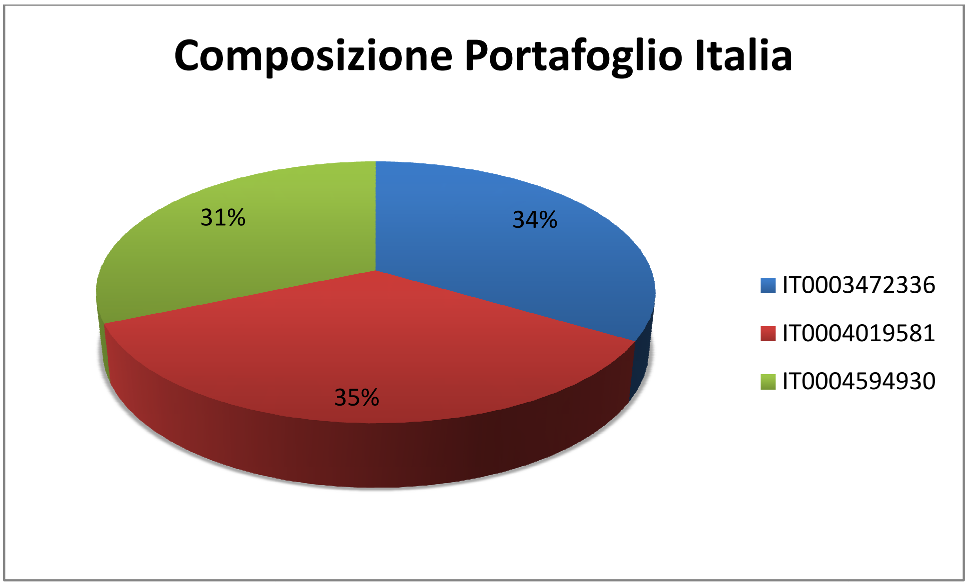
sotto i vincoli:

-Duration attivo = Duration Passivo

-Valore attuale attivo = Valore attuale passivo

Risolvendo il problema di programmazione lineare otteniamo le quantità da acquistare dei vari titoli in modo da rispettare le ipotesi del teorema di Fisher e Weil.

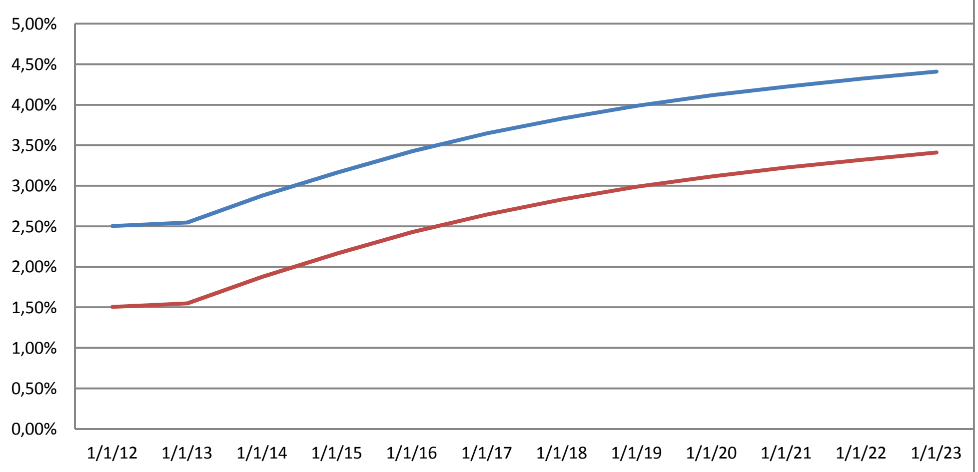
ISIN		PREZZO TEL QUEL	CTV
IT0003472336	33.142.182	104,860	34.752.919
IT0004019581	34.667.063	101,377	35.144.596
IT0004594930	31.055.207	96,932	30.102.485
Totale	98.864.452		100.000.000



Sulla base del portafoglio così costituito il rendimento atteso dell'investimento, calcolato ponderando i tassi interni di rendimento per le quantità e i prezzi dei titoli, è del 3,787%.

IPOTESI DI SHIFT ADDITIVO

Nel nostro caso ipotizziamo uno shift additivo dei tassi dell'ordine dell'1% che traslerà la curva dei tassi swap determinante il passivo e la curva dei rendimenti dei Btp determinante l'attivo. La traslazione dei tassi swap è rappresentata dal seguente grafico. La traslazione è rigida e per ogni istante di tempo il tasso risulterà maggiorato di una quantità pari ad un punto percentuale.



	1/3/12	1/3/13	1/3/14	1/3/15	1/3/16	1/3/17	1/3/18	1/3/19	1/3/20	1/3/21	1/3/22	1/3/23
curva tassi + shift (1%)	2,50%	2,55%	2,88%	3,16%	3,43%	3,65%	3,83%	3,99%	4,12%	4,23%	4,32%	4,41%
curva tassi swap	1,50%	1,55%	1,88%	2,16%	2,43%	2,65%	2,83%	2,99%	3,12%	3,23%	3,32%	3,41%

Interpolando la nuova curva dei tassi swap, troviamo che il tasso swap a 5 anni è del 3,427%. Con questo nuovo tasso possiamo calcolare il valore attuale ipotetico al 03/01/2011 dello Zero Coupon Bond e risulterà:

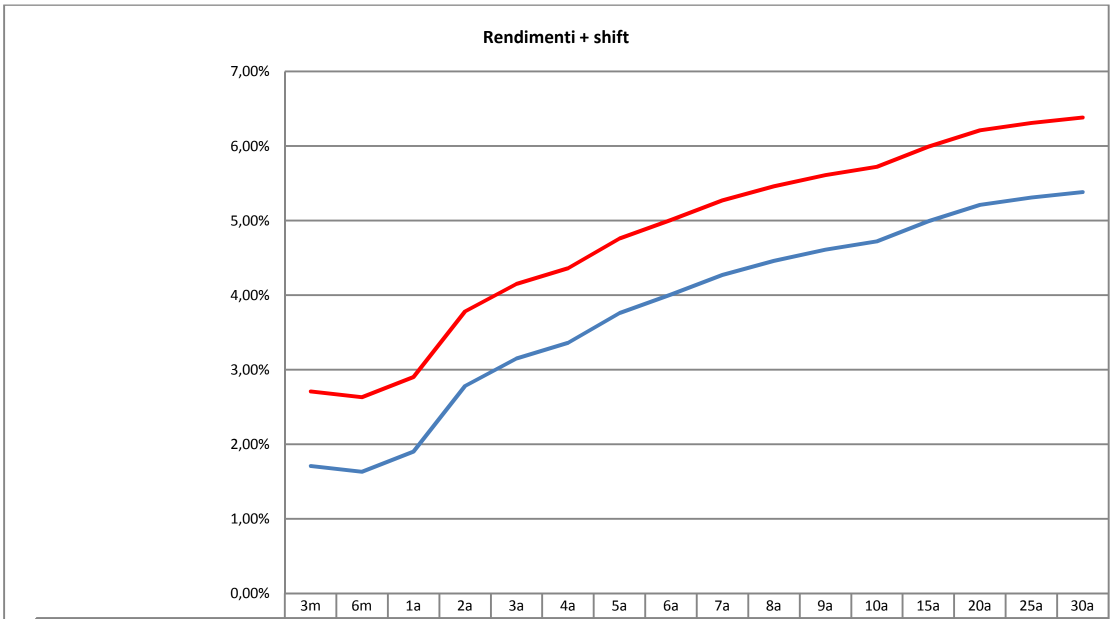
$V.A. = € \, 112.738.503 * (1 + i)^{-5},$

V.A. = € 95.258.255,81.

Il valore attuale del finanziamento all’epoca t=03/01/2011 è chiaramente diminuito essendo funzione inversa del tasso di interesse.

VALUTAZIONE POST SHIFT SULLA TENUTA DELL’IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

Una traslazione rigida della curva dei tassi con uno shift dell’ordine dell’1% cambierà la curva dei rendimenti dei BTP .



	3m	6m	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	15a	20a	25a	30a
Rendimenti BTP	1,71%	1,63%	1,90%	2,78%	3,15%	3,36%	3,76%	4,01%	4,27%	4,46%	4,61%	4,72%	4,99%	5,21%	5,31%	5,38%
Rendimenti BTP +shift (1%)	2,71%	2,63%	2,90%	3,78%	4,15%	4,36%	4,76%	5,01%	5,27%	5,46%	5,61%	5,72%	5,99%	6,21%	6,31%	6,38%

L’ipotesi di una variazione dei tassi secondo uno shift additivo porterà ad una variazione dei prezzi dei titoli in portafoglio. Sommando al tasso interno di rendimento dei BTP nel Portafoglio Italia un punto percentuale i prezzi dei titoli diminuiranno.

Considerando la formula:

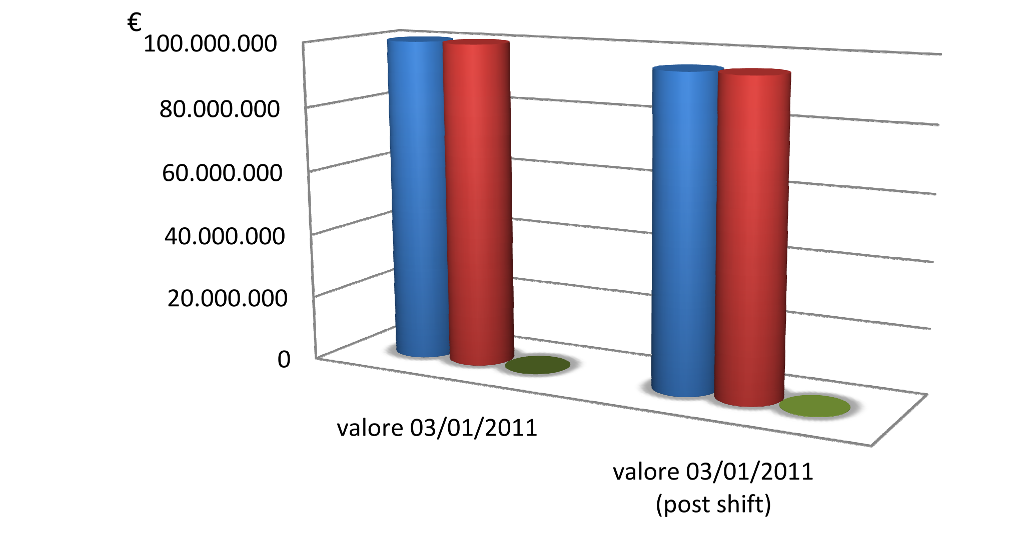
$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} + \frac{V.N.}{(1+i)^n},$$

calcoliamo i prezzi ipotetici in funzione dei nuovi tassi di rendimento:

ISIN	TASSI INTERNI DI RENDIMENTO	PREZZI AL 3/01/2011
IT0003472336	4,03%	102,43
IT0004019581	4,82%	96,63
IT0004594930	5,62%	89,90

La variazione dei prezzi dei titoli comporta una variazione del valore dell'attivo. Il valore attuale del nostro portafoglio sarà in data 03/01/2011 pari a € 95.366.122,32. L'aumento ipotizzato dei tassi ha quindi comportato una variazione di segno negativo del valore del nostro investimento di € 4.633.877,68.

Alla luce delle analisi effettuate possiamo verificare la veridicità dell'immunizzazione finanziaria secondo Fisher e Weil all'interno delle ipotesi sottostanti il teorema.



	valore 03/01/2011	valore 03/01/2011 (post shift)
valore attivo	€ 100.000.000	€ 95.366.122
valore passivo	€ 100.000.000	€ 95.258.256
val netto	€ 0	€ 107.867

Il valore netto del portafoglio ottenuto dalla differenza tra l'attivo e il passivo è di poco superiore al valore netto determinato nelle condizioni implicite dalle curve dei tassi in data 03/01/2011. La differenza tra il valore netto iniziale e il valore netto finale è del 0,11%. Da ciò si deduce che nonostante la variazione delle curve dei rendimenti, il nostro portafoglio risulta protetto dal rischio di tasso di tasso di interesse. Il risultato ottenuto è una conseguenza della variazione sincrona nei valori dell'attivo e del passivo, che, sulla base della disposizione temporale e delle entità dei flussi risultano sensibili in egual misura a variazioni dei tassi di interesse.

1.9. PORTAFOGLIO GERMANIA

COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO

La costruzione di un portafoglio costituito da titoli tedeschi risponde all'intento di analizzare gli effetti di uno shift dei tassi di interesse identico a quello del caso precedente, ma con riferimento ad un'altra curva dei rendimenti: quella dei Bund tedeschi. La provvista è effettuata in maniera identica al caso precedente: uno Zero Coupon Bond a 5 anni. I titoli che ipotizziamo acquistare con il capitale disponibile (100.000.000) sono i seguenti:

DE0001135234: Bund tedesco
Emittente: Repubblica Federale Tedesca
Tipo di emissione: Titoli di Stato
Data di godimento: 04/07/2003
Data di stacco prima cedola: 04/07/2004
Data di scadenza: 04/07/2013

DE0001135309: Bund tedesco
Emittente: Repubblica Federale Tedesca
Tipo di emissione: Titoli di Stato
Data di godimento: 19/05/2006
Data di stacco prima cedola: 04/07/2007
Data di scadenza: 04/07/2016

DE0001135408: Bund tedesco
Emittente: Repubblica Federale Tedesca
Tipo di emissione: Titoli di Stato
Data di godimento: 30/04/2010
Data di stacco prima cedola: 04/07/2011
Data di scadenza: 04/07/2020[27]

[27] Fonte: Bloomberg infoprovider

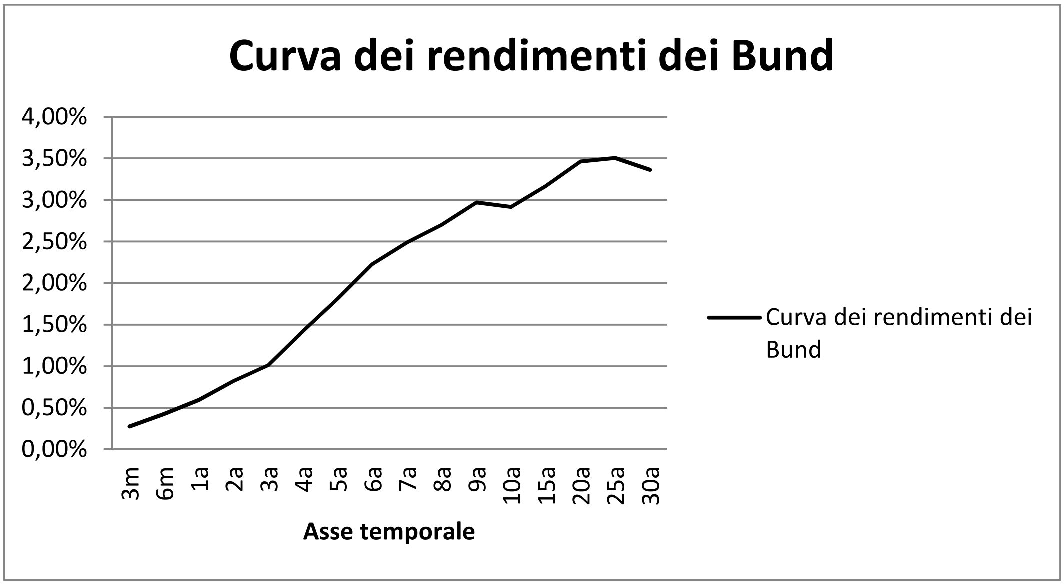
L’investimento è ipotizzato essere effettuato in data 03/01/2011; in questa data i prezzi dei titoli sono i seguenti:

ISIN	CORSO SECCO	RATEO	PREZZO TEL QUEL	TIME TO MATURITY
DE0001135234	106,854	2,78	109,64	2,260
DE0001135309	109,853	2,97	112,82	5,263
DE0001135408	100,569	2,23	102,80	9,266

Analizzando i flussi cedolari, possiamo calcolare il tasso di rendimento dei titoli in portafoglio.

ISIN	TASSI INTERNI DI RENDIMENTO
DE0001135234	0,68%
DE0001135309	2,00%
DE0001135408	2,93%

I tassi interni di rendimento fanno trasparire una curva dei rendimenti crescente come può essere desunto dal grafico che rappresenta la curve dei rendimenti dei Bund in data 03/01/2011.

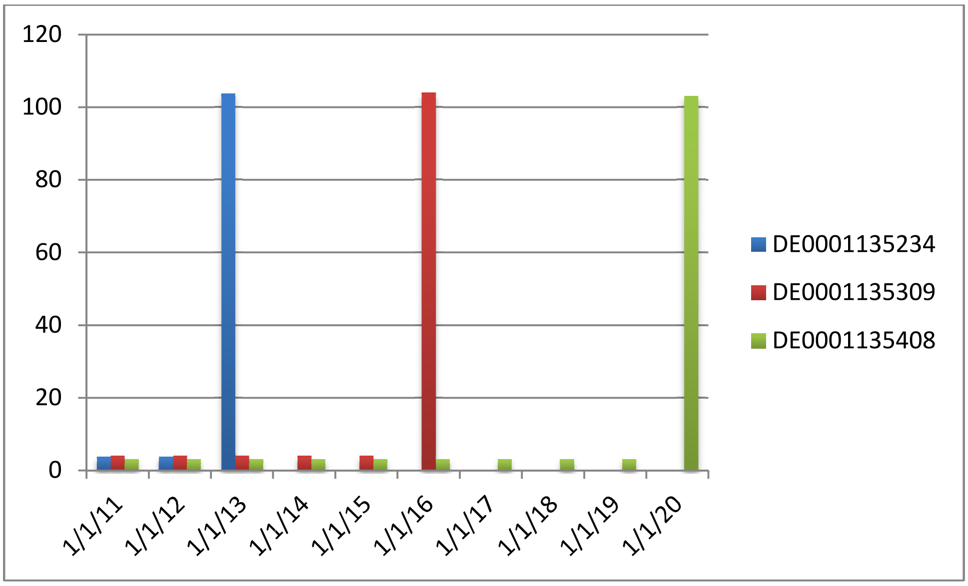


Fonte: Bloomberg infoprovider

In base ai tassi interni di rendimento possiamo calcolare la duration dei titoli nel Portafoglio Germania utilizzando la formula per il calcolo della durata media finanziaria dei titoli:

$$D(t,x) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)x_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t,t_k)}$$

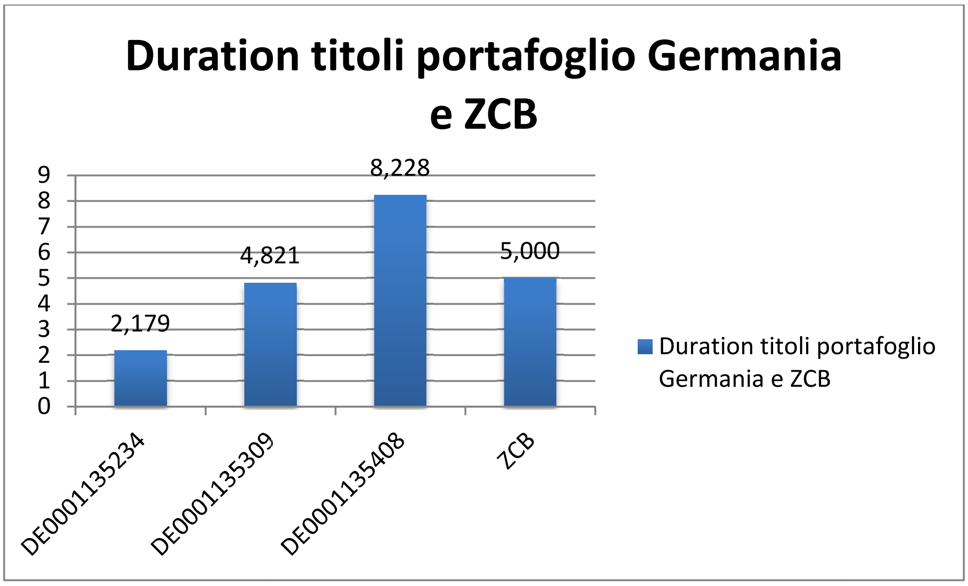
Facendo riferimento ai flussi che caratterizzano i titoli che compongono il Portafoglio Germania:



Le duration dei titoli nel nostro portafoglio risulteranno:

ISIN	DURATION	TIME TO MATURITY
DE0001135234	2,179	2,260
DE0001135309	4,821	5,263
DE0001135408	8,228	9,266

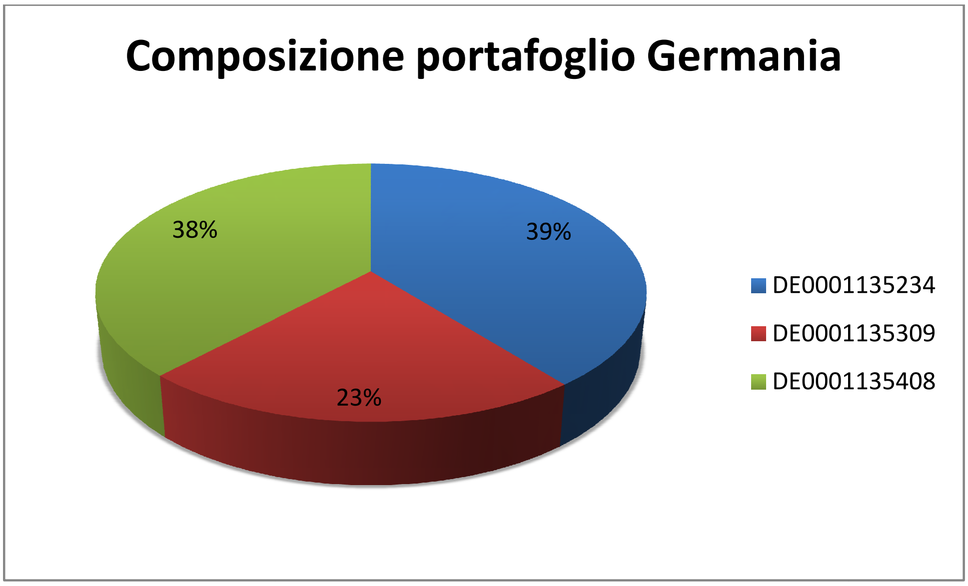
Confrontando i titoli in portafoglio risulta che la divergenza tra duration e time to maturity è maggiore nel DE0001135408, il titolo con time to maturity maggiore dato che esso è caratterizzato da un maggiore flusso cedolare intermedio.



Come nel caso del Portafoglio Italia per stabilire quali sono le quantità di titoli da acquistare bisogna far riferimento alle ipotesi sottostanti il teorema di Fisher e Weil, ossia mantenere un profilo di investimento in cui la duration dell'attivo eguaglia la duration del passivo e in cui il valore attuale dell'attivo eguaglia il valore attuale del passivo.

Risolvendo il problema di programmazione lineare otteniamo le quantità da acquistare dei vari titoli in modo da rispettare le ipotesi del teorema di Fisher e Weil.

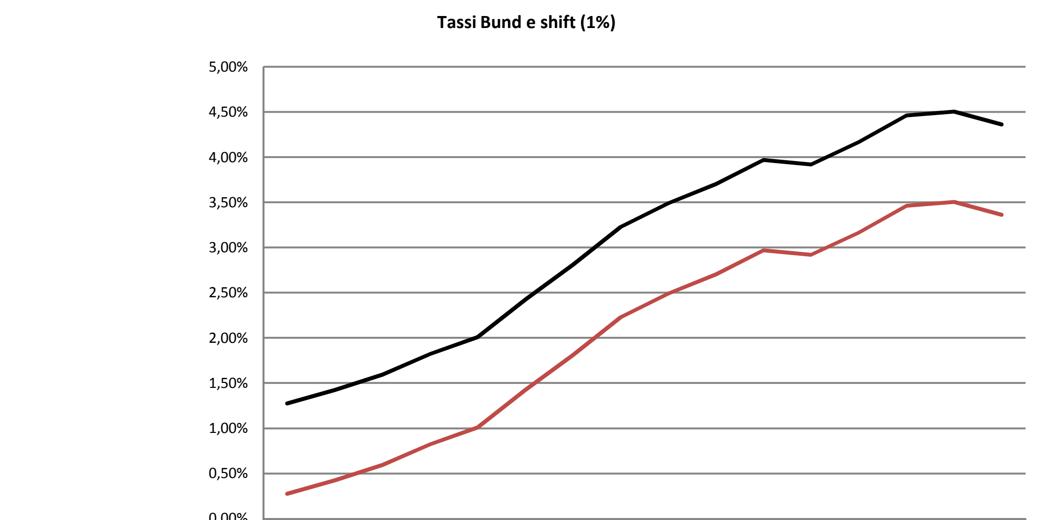
ISIN		PREZZO TEL QUEL	CTV
DE0001135234	36.531.294	109,64	40.052.270
DE0001135309	20.948.942	112,82	23.635.196
DE0001135408	35.324.714	102,80	36.312.533
Totale	92.804.950		100.000.000



Sulla base del portafoglio così costituito, il rendimento atteso dell'investimento, calcolato ponderando i tassi interni di rendimento per le quantità e i prezzi dei titoli è dell'1,8 %. Confrontando il rendimento atteso del Portafoglio Germania con quello del Portafoglio Italia, sembrerebbe di gran lunga più allettante quest'ultimo. In realtà dietro questa affermazione si nascondono tematiche molto delicate che verranno analizzate in seguito.

IPOTESI DI SHIFT ADDITIVO

Ipotizzando sempre uno shift additivo dell'ordine dell'1% la curva dei rendimenti dei Bund analizzata in data 03/01/2011 varia nel modo rappresentato dal grafico sottostante.



	3m	6m	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	15a	20a	25a	30a
tassi Bund + shift (1%)	1,28%	1,42%	1,60%	1,82%	2,01%	2,42%	2,81%	3,23%	3,49%	3,70%	3,97%	3,92%	4,17%	4,46%	4,50%	4,36%
tassi Bund 03/01/2011	0,28%	0,42%	0,60%	0,82%	1,01%	1,42%	1,81%	2,23%	2,49%	2,70%	2,97%	2,92%	3,17%	3,46%	3,50%	3,36%

L'ipotesi di una variazione della curva dei tassi secondo una traslazione rigida, caratterizzata dall'aumento dei rendimenti dei titoli di un punto percentuale, modifica i prezzi dei titoli in portafoglio: sfruttando la formula

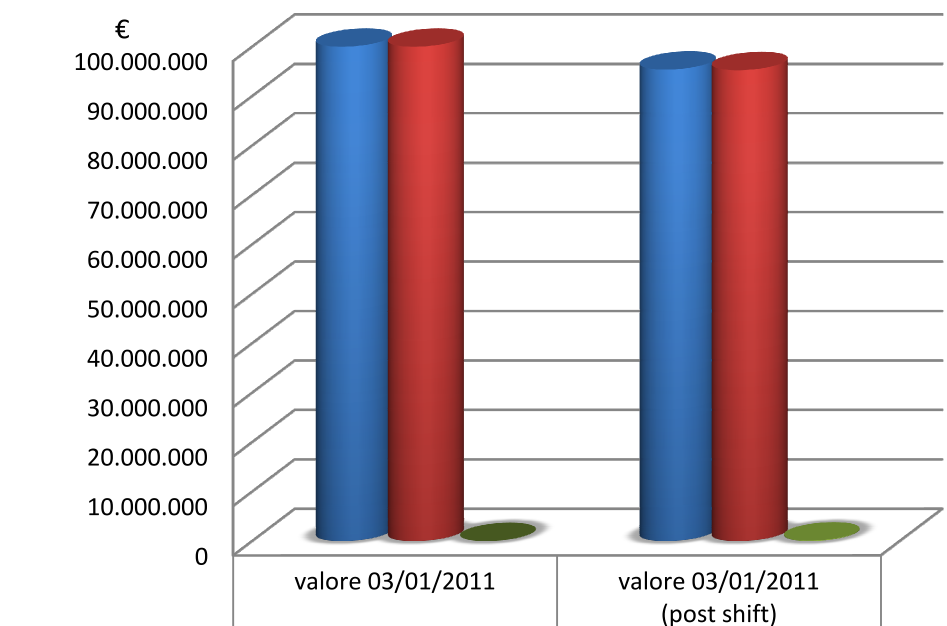
$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} + \frac{V.N.}{(1+i)^n},$$

calcoliamo i prezzi ipotetici in funzione dei nuovi tassi interni di rendimento.

ISIN	TASSI INTERNI DI RENDIMENTO	PREZZI AL 3/01/2011
DE0001135234	1,68%	107,33
DE0001135309	3,00%	107,73
DE0001135408	3,93%	95,12

VALUTAZIONE POST SHIFT SULLA TENUTA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

La variazione dei prezzi dei titoli in portafoglio modificherà il valore dell'attivo; in particolare la riduzione dei prezzi dei titoli che lo compongono porterà ad una diminuzione del suo valore. Considerando inoltre il valore netto come differenza tra il valore dell'attivo e il valore del passivo, composto quest'ultimo dallo ZCB con cui ci siamo finanziati, analizziamo la tenuta dell'immunizzazione.



	valore 03/01/2011	valore 03/01/2011 (post shift)
valore attivo	€ 100.000.000	€ 95.376.885,06
valore passivo	€ 100.000.000	€ 95.258.255,81
valore netto	€ 0	€ 118.629,25

Analizzando le variazioni del valore dell’attivo e del passivo in seguito allo shift dei tassi di rendimento ipotizzato, notiamo che entrambi diminuiscono in maniera sincrona. Come nel caso del Portafoglio Italia anche nel caso del Portafoglio Germania il valore netto è positivo a conferma della veridicità del teorema di Fisher e Weil sotto le ipotesi del teorema stesso. La variazione del valore netto è del +0,012%. L’analisi dell’immunizzazione di un portafoglio di titoli a reddito fisso sotto le ipotesi del teorema enunciato da Fisher e Weil ha fornito risultati soddisfacenti sia nel caso del Portafoglio Italia sia nel caso del Portafoglio Germania.

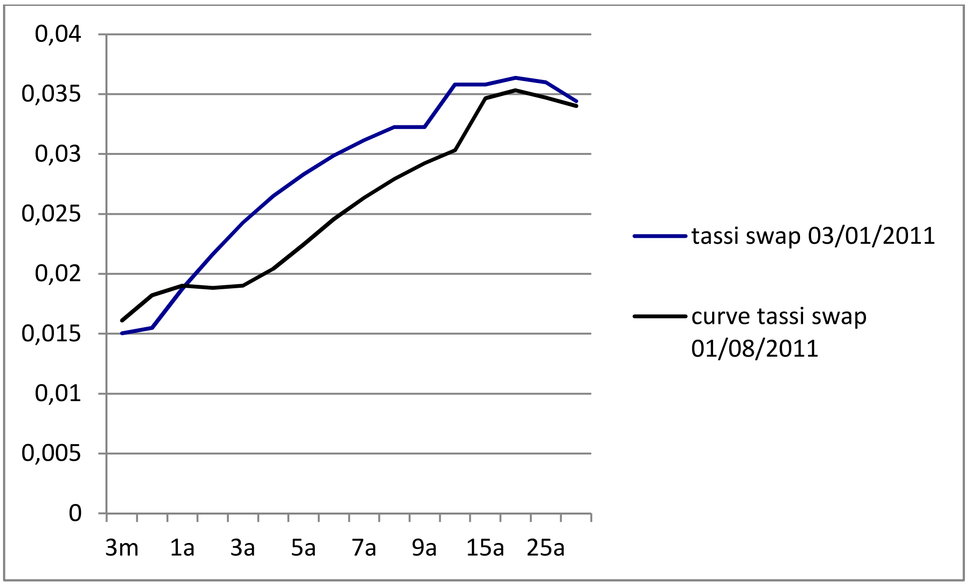
CAPITOLO 3. VALUTAZIONE DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA NELLA REALTA'

1º AGOSTO

Al fine di provare la tenuta dell'immunizzazione finanziaria si potrebbe ipotizzare di verificare i valori dell'attivo e del passivo dopo alcuni mesi sulla base dei prezzi e dei rendimenti effettivamente riscontrabili sul mercato. La data scelta per effettuare la verifica è l'1/08/2011 (il periodo di riferimento è particolarmente significativo per le vicende che hanno caratterizzato le economie europee).

1.10. VARIAZIONE DI VALORE DEL PASSIVO

Il valore attuale dello Zero Coupon Bond con cui abbiamo ipotizzato esserci finanziati in data 01/08/2011 è pari a € 100.787.999,65. Il valore si è modificato rispetto al valore calcolato in data 03/01/2011 conseguentemente alla variazione dei tassi swap:



Fonte: Bloomberg infoprovider

Il time to maturity dello ZCB in data 01/08/2011 è pari a 4,42. Il tasso corrispondente è calcolato mediante interpolazione lineare e risulta del 2,565%. Come si evince dal grafico la nuova curva dei tassi swap si trova al di sotto di quella rilevata al 3/01/2011; ciò testimonia un abbassamento dei tassi e giustifica un valore attuale del passivo in data 1/08/2011 maggiore rispetto a quello calcolato in precedenza.

1.11. RIBILANCIAMENTO DEL PORTAFOGLIO ITALIA

Il valore dell'investimento del portafoglio Italia in data 1/08/2011 è influenzato dai flussi cedolari ricevuti: il portafoglio è costituito da due titoli la cui data di stacco delle cedole è il 1/02/2011 e un titolo la cui data di stacco è il 1/03/2011. In data 1/02/2011 i flussi sono i seguenti:

ISIN	PREZZI	CEDOLE	α_s	FLUSSI
IT0003472336	103,40	2,125%	33.142.182	704.271,36
IT0004019581	100,20	1,875%	34.667.063	650.007,43
IT0004594930	97,80	0	31.055.207	0
TOTALE			98.864.452	1.354.278,79

L'inflow totale è di € 1.354.278,79 che ipotizziamo di reinvestire nei titoli già in portafoglio. Fisher e Weil ipotizzano di reinvestire i flussi percepiti in modo da mantenere allineate le duration dell'attivo e del passivo. Per fare ciò utilizziamo un sistema di programmazione lineare in cui si minimizza il valore dei titoli acquistati:

$$\min c(0) = \sum_{s=4}^{6} \alpha_s c_s,$$

dove $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$sono le nuove quantità da acquistare e P_4, P_5, P_6 sono i prezzi dei titoli in data 1/02/2011; sotto i vincoli

Duration dell’attivo = Duration del passivo

Valore titoli acquistati = Flusso cedolare percepito

Il problema non presenterà una soluzione ma la migliore approssimazione è caratterizzata da un acquisto di una quantità pari a 13.097,47 del titolo IT0003472336. Il vincolo della duration non sarà soddisfatto dato che risulterà impossibile riallineare le duration dei titoli:

Duration passivo (4,9205) ≠ Duration attivo (4,9575)

L’impossibilità di mantenere le duration dell’attivo e del passivo allineate è un primo segno dell’impossibilità della tenuta dell’immunizzazione finanziaria. Ciò è dovuto all’andamento divergente delle curve dei rendimenti dell’attivo e del passivo.

In data 01/03/2011 il titolo IT0004594930 pagherà la cedola per un flusso totale di € 621.104,15. In questa data ipotizziamo di riacquistare delle quantità incognite dei titoli in portafoglio con lo stesso procedimento utilizzato in data 1/02/2011. In data 01/03/2011 il portafoglio è così costituito:

ISIN	PREZZI	CEDOLE	α_s	FLUSSI
IT0003472336	103,29	0	344.519.290	0
IT0004019581	99,87	0	346.670.630	0
IT0004594930	94,87	2	310.552.070	621.104,15
TOTALE			1.001.741.990	621.104,15

La risoluzione del sistema di programmazione lineare non porterà ad una soluzione reale e come nel caso precedente il vincolo dell’uguaglianza delle duration non sarà rispettato:

duration passivo (4,84) ≠ duration attivo (4,88)

Al fine di mantenere la duration il più possibile allineate bisognerà acquistare una quantità pari a 6.016,78 titoli per un valore di € 621.104,15 del titolo IT0003472336.

VALUTAZIONE AL 01/08/2011

In data 1/08/2011 il nostro portafoglio di investimento avrà una composizione differente rispetto al 3/01/2011; la differenza è dovuta al reinvestimento dei flussi cedolari:

ISIN	PREZZI	α_s
IT0003472336	101,70	35.053.607
IT0004019581	95,71	34.667.063
IT0004594930	89,70	31.055.207
TOTALE		100.775.877

I prezzi in data 1/08/2011 sono prezzi tel quel e nel caso dei titoli IT0003472336 e IT0004019581 nei prezzi sono contenute le cedole per il loro intero valore, in quanto l'epoca in cui si analizza il portafoglio coincide con la data di godimento. La semplificazione è dovuta all'intento di comprendere nel computo del valore dell'attivo tutti i flussi ricevuti. I prezzi sono sostanzialmente differenti da quelli misurati nella data in cui è stato effettuato l'investimento: ciò è dovuto alla variazione della curva dei rendimenti dei BTP tra la data di investimento e il 1/08/2011.

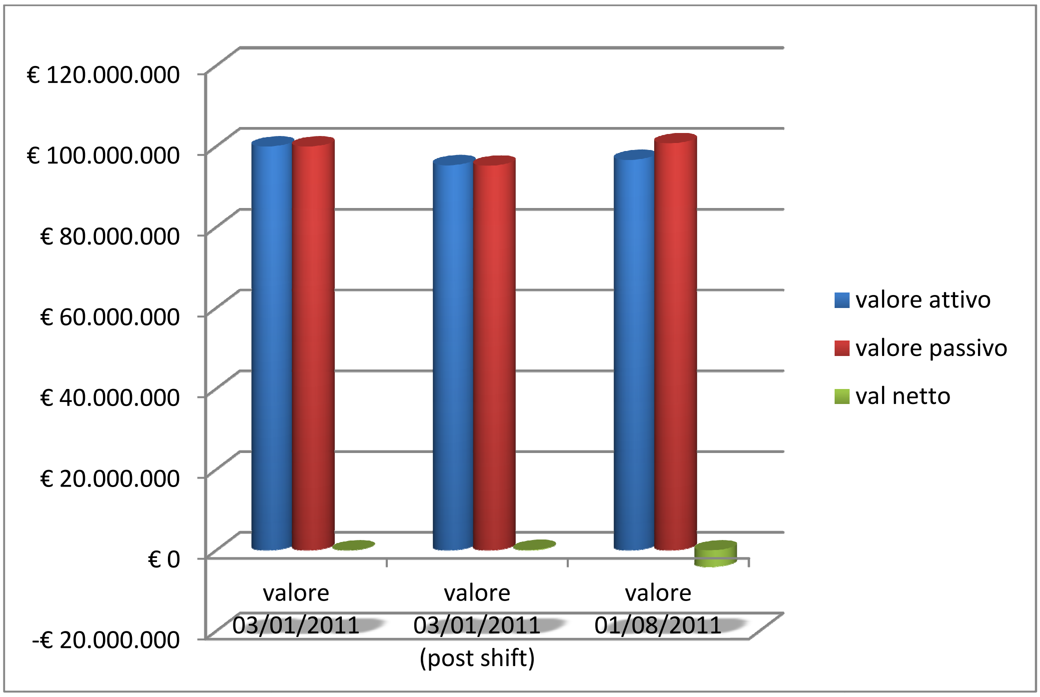
Per consentire di misurare la tenuta dell'immunizzazione in questa data valutiamo il valore dell'attivo come sommatoria dei prezzi dei titoli moltiplicati per le quantità possedute. Il valori dell'attivo e del passivo sono i seguenti:

Valore attivo = € 96.685.515,38

Valore passivo = € 100.787.999,65

Per questo il valore netto ottenuto come differenza tra l'attivo e il passivo sarà pari a :

Valore netto: - € 4.102.484,27



Come emerge dalle analisi sostenute in data 1/08/2011 il valore netto risulterà rilevantemente negativo, segno della mancata tenuta dell'immunizzazione.

1.12. RIBILANCIMENTO DEL PORTAFOGLIO GERMANIA

Il portafoglio Germania è composto da titoli la cui data di godimento è il 7/4/2011. In questa data i flussi registrati sono i seguenti:

ISIN	CEDOLE		FLUSSI
DE0001135234	3,75%	36.531.294	1.369.923,52
DE0001135309	4,00%	20.948.942	837.957,69
DE0001135408	3,00%	35.324.714	1.059.741,43
TOTALE		92.804.950	3.267.622,64

Calcolando l'inflow totale in data 7/04/2011 come sommatoria dei flussi otteniamo € 3.267.622,64, da reinvestire nei titoli del portafoglio. Sfruttando lo stesso sistema utilizzato per il Portafoglio Italia otteniamo:

ISIN	PREZZI	α_s
DE0001135234	107,00	38.917.801
DE0001135309	108,40	21.607.669
DE0001135408	101,20	35.324.714
TOTALE		95.650.184

Questa è la nuova composizione del portafoglio ipotizzando di aver acquistato una quantità pari a 23.865,08 del titolo DE0001135234 ed una quantità pari a 6587,27 del titolo DE0001135408. In questo caso, diversamente da quanto accaduto nella composizione del Portafoglio Italia con il ribilanciamento del portafoglio e il reinvestimento dei flussi cedolari le duration del passivo e dell'attivo sono allineate.

VALUTAZIONE AL 01/08/2011

Sulla base dei dati del 1/8/2011 si può calcolare il valore dell'attivo e del passivo:

Valore attivo = € 99.827.321,30

Valore passivo = € 100.787.999,65

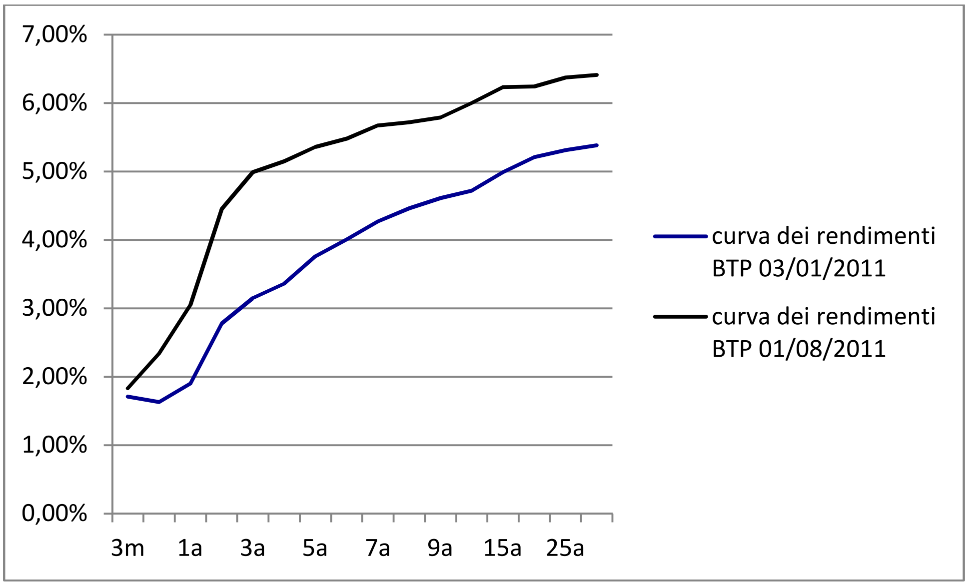
Valore netto = - € 960.678,35

Il valore netto anche in questo caso risulta negativo, ma in modo meno rilevante rispetto a quanto misurato nel Portafoglio Italia. Per dare una misura immediata in termini di percentuale le perdite sono:

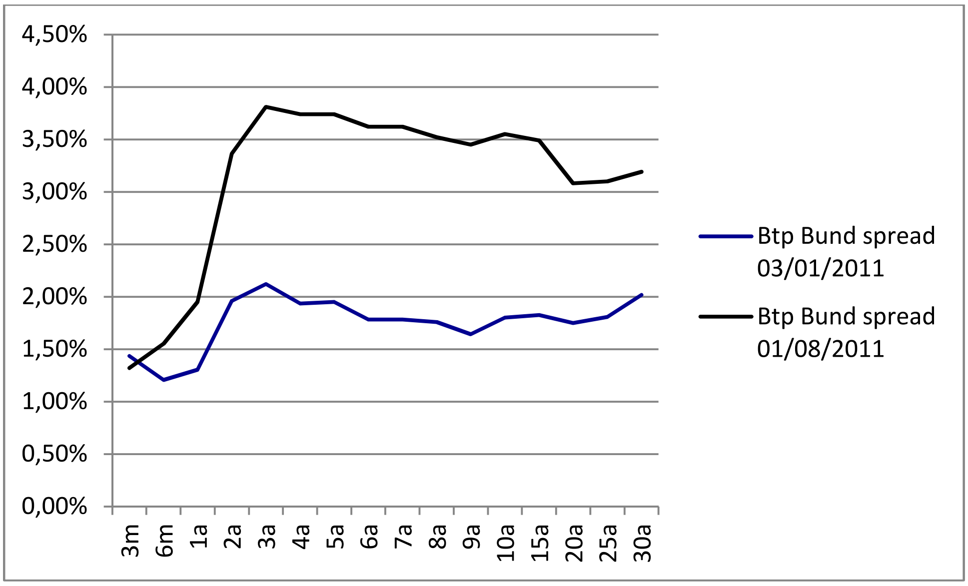
Portafoglio Italia: -4,1%
Portafoglio Germania: -0,96%

In base ai risultati ottenuti si osserva come il Portafoglio Germania sia stato sostanzialmente immunizzato contro il rischio di tasso a differenza del Portafoglio Italia. La chiave per capire il motivo per cui i portafogli, seppur costruiti in utilizzando gli stessi vincoli, abbiano avuto un comportamento differente è data dall'andamento dei tassi di rendimento.

Confrontando graficamente le curve dei rendimenti dei BTP in gennaio e in agosto osserviamo un incremento molto forte dei tassi di rendimento con un differenziale massimo dell'ordine del due percento. Ciò ha comportato un abbassamento dei prezzi dei titoli in portafoglio molto ampio.



Una misura della volatilità dei tassi di rendimento dei titoli italiani può essere mostrata confrontandoli con i titoli tedeschi. Il differenziale di rendimento viene chiamato Btp-Bund spread (solitamente quando ci si riferisce al Btp Bund spread i rendimenti confrontati sono quelli dei Btp e dei Bund a 10 anni). La curva dei rendimenti dei Bund tedeschi è la curva di benchmark per i titoli italiani, dato che l'Economia tedesca è una delle economie più stabili, come si evince dalla stabilità dei tassi (bassa volatilità) e dai loro bassi valori. Tra gennaio ed agosto il Btp-Bund spread ha subito delle forti variazioni:



Il differenziale tra titoli tedeschi e titoli italiani subisce nel periodo in cui i titoli sono tenuti in portafoglio un brusco incremento. Il primo agosto il rendimento a 10 anni dei Btp è di 355 basis point superiore a quello tedesco.

La tabella seguente elenca i valori dell'attivo, del passivo e del valore netto risultanti dalle analisi svolte. La prima riga si riferisce alla valutazione del portafoglio iniziale, la seconda a quella svolta in seguito allo shift additivo ipotizzato e la terza sintetizza i valori calcolati sulla base dei dati e delle curve in data 01/08/2011. Le variazioni percentuali forniscono, infine, la chiave per mostrare il modo in cui le variazioni dei tassi di interesse hanno influito sui portafoglio costrituiti.

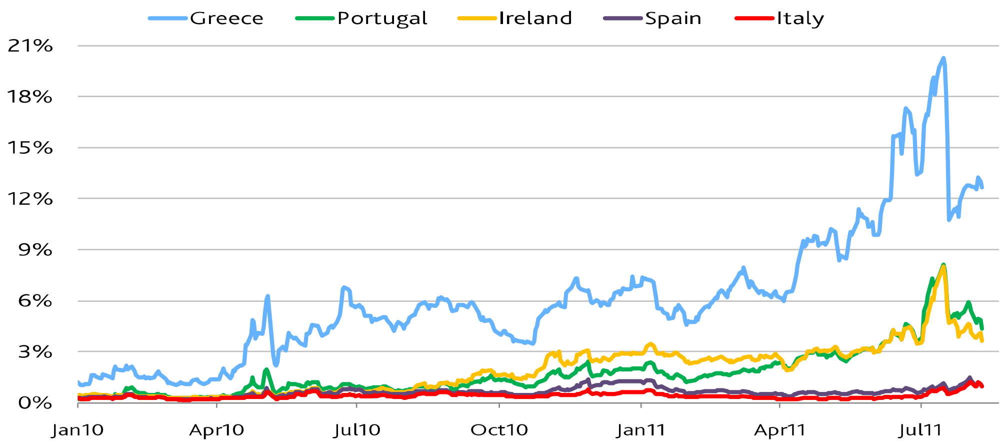
PORTAFOGLIO ITALIA	Attivo	Passivo	Val. Netto	Varizione Percentuale
Valori 03/01/2011	100000000	100000000	0	
Valori post shift	95366122,32	95258255,81	107866,51	+0.108%
Valori 01/08/2011	96685515,38	100787999,65	-4102484	-4.1%

PORTAFOGLIO GERMANIA	Attivo	Passivo	Val. Netto	Varizione Percentuale
Valori 03/01/2011	100000000	100000000	0	
Valori post shift	95376885,06	95258255,81	118629,25	+0.119
Valori 01/08/2011	99827321,3	100787999,65	-960678	-0.97%

CAPITOLO 4. SCENARIO MACROECONOMICO

L’immunizzazione finanziaria nella realtà non ha dato risultati soddisfacenti a causa dell’andamento divergente del passivo e dell’attivo. L’esperimento di Fisher e Weil proponeva tassi di interesse dell’attivo e tassi di interesse del passivo nei quali le fonti del rischio erano uguali; ma ciò non è riscontrabile (se non in casi particolari) nella realtà. In particolare nel caso del Portafoglio Italia l’immunizzazione non ha prodotto i risultati sperati a causa delle forti variazioni riscontrate nel mercato dei Buoni ordinari del Tesoro. Le problematiche connesse alle forti variazioni e all’allontanamento della curva dal benchmark di riferimento, si inseriscono nella problematica trafila in cui alcuni stati europei si sono trovati nel 2011. L’instabilità delle cosiddette PIGS (Portogallo, Irlanda, Grecia e Spagna) inevitabilmente seguite dall’Italia, ha scosso fortemente il mercato dei titoli di stato. In particolare risulta drammatica la situazione greca in cui la crisi ha prodotto risultati devastanti contagiando le economie periferiche più deboli. Una proxy dell’entità del rischio delle economie è rappresentata dai credit default swap. In una research della Moody’s, società di rating americana, sono rappresentati gli andamenti dei credit default swap degli stati maggiormente coinvolti nella crisi.

Figure 1. One-year CDS-implied EDF metric of the five GIIPS nations



Il grafico rappresenta l'andamento dei Credit default swap tra gennaio 2010 e luglio 2011 di Grecia, Portogallo, Irlanda, Spagna e Italia. L'andamento di questi derivati di credito esprime le considerazioni del mercato sui debiti sovrani dei paesi in questione ed è significativo notare l'accostamento dell'Italia ai cosiddetti PIGS. Come si evince dal grafico gli effetti più disastrosi sono quelli che hanno caratterizzato l'economia greca.[28] Le analisi sulle curve dei rendimenti dei Buoni ordinari del Tesoro italiani svolte precedentemente testimoniano le turbolenze avutesi negli stati presi a riferimento per gli effetti avutesi sull'economia italiana. L'incertezza che aleggiava sulla capacità delle autorità europee di risolvere la crisi greca ha prodotto il temuto effetto contagio destabilizzando in maniera rilevante il mercato italiano, nonostante le previsioni investissero la Spagna come erede prossimo dell'onda d'urto che ha travolto le piazze europee. L'Italia è stata particolarmente segnata dall'entità del debito pubblico, dal deficit e dalla mancata crescita economica. Di seguito riportiamo le statistiche OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development)* sul debito pubblico il deficit e il Pil.

"General government gross financial liabilities" in percentuali del GDP[29]

	2007	2008	2009	2010	2011
Germany[2]	65,3	69,3	76,4	87,0	87,3
Greece	112,9	116,1	131,6	147,3	157,1
Ireland	28,8	49,6	71,6	102,4	120,4
Italy	112,8	115,2	127,8	126,8	129,0
Portugal	75,4	80,6	93,1	103,1	110,8
Spain	42,1	47,4	62,3	66,1	73,6

[28]Tempelman J. H., Choi Y., (2011), Impact of European Sovereign Debt Crisis Continues to Spread, Moody's
[29] OECD statistics

Confrontando i rapporti tra debito e Pil nei paesi europei si evince come la situazione italiana risulti problematica avendo un debito molto elevato. Lo stato delle cose è il frutto di una politica ricorrente nella storia italiana: il deficit spending, consistente nel finanziare la crescita economica aumentando la spesa pubblica con un forte deficit e finanziandosi con l'indebitamento. L'indebitamento italiano risulta di gran lunga superiore a quello spagnolo ed è anche maggiore di quello portoghese ed irlandese. Nella tabella seguente si rappresenta invece il rapporto tra deficit e Pil evidenziando un divario rilevante tra l'Italia e la Germania.

General government financial bilance. Surplus (+) Deficit (-) come percentuale del Pil.

	2007	2008	2009	2010	2011
Germany	0,3	0,1	-3,0	-3,3	-2,1
Greece	-6,7	-9,8	-15,6	-10,4	-7,5
Italy	-1,5	-2,7	-5,3	-4,5	-3,9
Portugal	-3,2	-3,6	-10,1	-9,2	-5,9
Spain	1,9	-4,2	-11,1	-9,2	-6,3

L'economia italiana ha inoltre mostrato la non sostenibilità di crescita economica come emerge dalle statistiche sul prodotto interno lordo dei paesi europei e come risulta dalla tabella seguente:

Real GDP, percentuale della differenza rispetto all'anno precedente

	2007	2008	2009	2010	2011
Germany	2,8	0,7	-4,7	3,5	3,4
Greece	4,3	1,0	-2,0	-4,5	-2,9
Italy	1,4	-1,3	-5,2	1,2	1,1
Portugal	2,4	0,0	-2,5	1,3	-2,1
Spain	3,6	0,9	-3,7	-0,1	0,9

La crescita è infatti un dato fondamentale per valutare lo stato di salute di un economia. Nel mese di giugno Standard & Poor’s aveva infatti posto l’Italia in outlook negativo per questo motivo. Inoltre le prospettive di crescita risultavano poco convincenti: tra lo 0,7% e l’1,4%. L’instabilità politica segnata dagli avvenimenti nei mesi di maggio e giugno: le sconfitte nelle elezioni elettorali di Milano e Napoli e l’esito del referendum, hanno contribuito ad aumentare il clima di incertezza sulla effettiva capacità del governo di attuare una riforma strutturale in grado di risollevare il paese dalla difficile situazione. Il risultato di questa incertezza si è inevitabilmente riversato sul mercato influenzando le valutazioni sul debito di stato e scaturendo in un innalzamento dei rendimenti. L’aumento della rischiosità del debito comporterà un aumento del suo costo e di conseguenza una maggiore difficoltà di rimborso. Il processo appena presentato è raffigurato dalla seguente equazione che consente di calcolare il disavanzo primario di un paese che permette di stabilizzarne il rapporto tra debito pubblico e PIL:

$$PD^* = -\frac{Debt \cdot (r - y)}{(1 + y)}$$

dove

PD* = deficit primario target come % del PIL

Debt = Debito pubblico come percentuale del PIL

r = tasso di interesse reale sul debito

y = tasso di crescita reale

Questa equazione esprime un effetto ricorsivo in cui debito, deficit, tasso di crescita e tasso di interesse reale sul debito si influenzano vicendevolmente causando uno scenario a spirale e da cui è sempre più difficile risollevarsi. Il clima di incertezza che ha caratterizzato l’Italia è rappresentato in modo significativo nella variazioni dei rendimenti tra gennaio e agosto (Grafico BTP). In riferimento allo spread BTp-Bund dei titoli a 10 anni nel periodo di esame, il differenziale ha avuto il minimo ad aprile quando la “burrasca” finanziaria e la speculazione che colpirà l’Italia sono lontane ed ha avuto il picco massimo il 4 agosto quando la Bce annuncia l’acquisto di bond irlandesi e portoghesi, ma non italiani o spagnoli:

lo spread sfiora quota 400 punti base. Significativa è l'asta dei BTp del 30 agosto 2011, asta che segue il varo della manovra Decreto legge n. 98/2011, convertito con modificazioni dalla legge n. 111/2011. In quella data il Tesoro ha collocato 6,7 miliardi di Btp a 3-10 anni e 994,5 milioni di CcTeu a 7 anni raccogliendo una discreta domanda e segnando in chiusura un differenziale di 297 punti base (Btp Bund spread) e un rendimento superiore al 5%. I rendimenti sono inferiori a quelli rappresentati nelle aste di fine luglio ma superiori a quelli di giugno. Il differenziale tenderà a muoversi nuovamente verso l'alto nel periodo seguente: il motivo per cui gli spread tendono a riallargarsi è sia dovuto all'ingente rimborso dei titoli in settembre, a conferma di un fenomeno empiricamente riscontrabile nel passato (l'innalzamento dei rendimenti nel periodo a ridosso della scadenza dei titoli), sia alla fragilità della manovra finanziaria, sia ai continui attacchi speculativi. Inoltre risultava imminente il declassamento del rating italiano da parte di Moody's e data l'influenza delle aspettative sui rendimenti i valori scontano già un fenomeno che ex ante risulta ancora (per quanto molto probabile) eventuale. Il downgrade da parte di Moody's non è ancora arrivato, ma nonostante i riflettori fossero tutti rivolti su quest'ultima, è stata S&P's a penalizzare il rating dell'Italia. Il 20 settembre l'Italia è stata declassata da A+ ad A e il rating attuale è in outlook negativo. Il declassamento da parte di Moody's non è automatico ma sicuramente è nell'aria; i giudizi delle due società non sono sempre identici ma nel medio periodo tendono a riallinearsi. Le motivazioni esposte da S&P's riguardano perlopiù la mancanza di prospettive di crescita dell'Italia tra il 2011 e 2014 (dall'1,3% dello scorso maggio allo 0,6%).

Il punto delicato della questione è il modo in cui i giudizi espressi dalle società di rating influenzano le valutazioni di mercato e di conseguenza i rendimenti dei titoli di stato italiani. Questo meccanismo sicuramente tenderà a peggiorare la situazione italiana: considerando l'incremento (notevole) che si prospetta nel costo che l'Italia dovrà sostenere per ripagare il debito, gli effetti benefici della manovra vengono in parte vanificati. Questo spiega le critiche mosse nei confronti delle "spietate" società di rating e il modo in cui i loro provvedimenti alimentano il vortice (in riferimento all'effetto a spirale esposto in precedenza) della crisi.

Questa analisi vuole motivare in parte l'andamento divergente dei rendimenti dei Btp e dei Bund tra gennaio ed agosto in riferimento a ciò che viene chiamato "rischio paese". Questo rischio di credito associato ai diversi debiti sovrani spiega il differenziale di rendimento tra i titoli italiani e tedeschi e l'incremento di questo differenziale nelle valutazioni di gennaio ed agosto. Il rischio è associato alla capacità o meno di un paese di far fronte agli impegni di pagamento impliciti nel titolo: quota di interesse e rimborso di capitale. La rischiosità del debitore è definita dal rating[30], quindi in generale si ha una corrispondenza tra rating e costo del debito. Alle imprese, alle istituzioni, agli stati e agli enti locali, per il loro ruolo di emittenti (debitori), viene assegnato un giudizio di affidabilità (merito di credito) detto rating.[31]

Questo spread assume un ruolo fondamentale se si confrontano le curve con quella dei tassi swap (la curva che definisce il valore del nostro finanziamento). Empiricamente si mostra una correlazione positiva della curva dei rendimenti dei Bund e dei tassi swap ed una correlazione negativa tra quest'ultima e quella dei titoli italiani. Particolare rilevanza nella nostra analisi è la variazione dei tassi tra l'istante in cui abbiamo ipotizzato di effettuare l'investimento e l'istante di smobilizzo. Confrontando quello che è successo nel mercato dei Btp tra gennaio ed agosto con l'ipotesi fatta nel secondo capitolo di uno shift additivo dell'ordine dell'1% vediamo che la realtà è ben diversa dalla teoria.

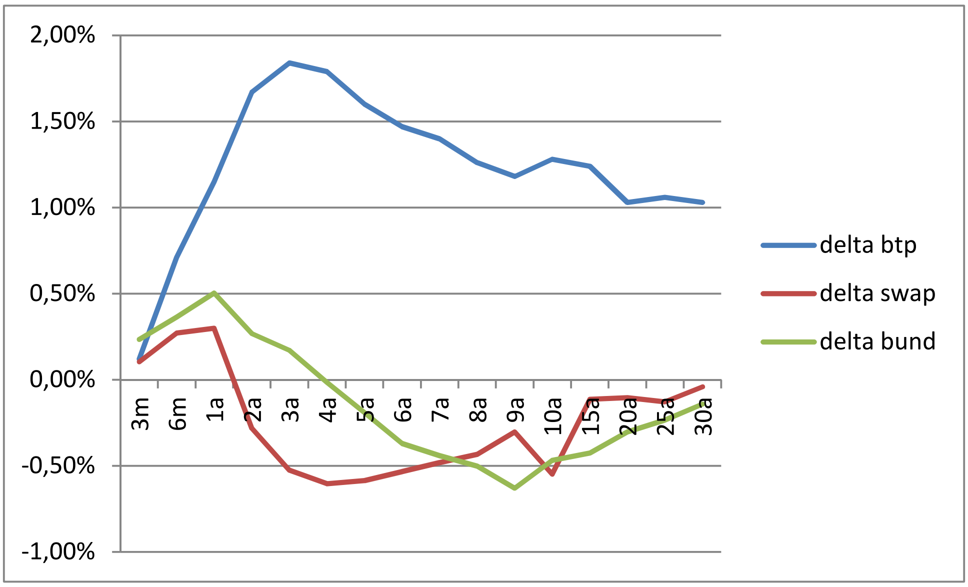
L'ipotesi di Fisher e Weil di uno shift additivo identico per il passivo e per l'attivo risulta non conforme a quanto è accaduto nella realtà; ciò è dovuto al fatto che il tasso dell'investimento è distinto dal tasso del finanziamento. La chiave per

---

[30] Sono attive più di dieci società di rating; Standard&Poor's e Moody's sono tra le più accreditate. I giudizi sono espressi utilizzando "rating simbols"; il rating può riguardare giudizi sul lungo termine o sull'attività di breve termine. Per il lungo termine, la scala di S&P's, in senso decrescente, è data da: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, D (alle classi da AA fino a CCC può essere aggiunto "+" o "-", il "modifier", per precisare la sottoclasse). I rating di Moody's sono rappresentati da: Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C; ciascuna classe di rating è suddivisa in tre sottoclassi caratterizzate dal "modifier" 1,2,3, in ordine decrescente di qualità.

[31] Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005) *Manuale di finanza, Tassi di interesse Mutui e Obbligazioni*, Bologna, Il Mulino

capire come sono andate le cose e il motivo per cui l'esperimento non ha funzionato è rappresentato dal confronto tra le variazioni dei tassi di rendimento dei bund, btp e swap tra gennaio e agosto. Il grafico seguente definisce graficamente il "delta" delle curve in questione:



Dal grafico risulta evidente l'andamento fortemente divergente delle variazioni della curva dei rendimenti dei btp nei confronti delle variazioni delle altre due curve. L'entità del differenziale dei titoli italiani tra gennaio e agosto è molto significativo e testimonia l'alta volatilità ed un profilo di rischio di tasso di interesse molto elevato. Una copertura dal rischio di tasso attraverso il matching delle scadenze risulterà precaria sia perché viene riposta troppa fiducia nell'uso della duration sia perché si trascurano fattori chiave come il rischio paese. Come è stato spiegato nei capitoli precedenti la duration intesa come volatility non è altro che un'approssimazione della vera curva dei prezzi. Ciò significa che ex ante l'immunizzazione non sarà perfetta, ma una discreta approssimazione. Inoltre è dimostrato che una strategia che si basa sul solo matching dell'indebitamento e dell'investimento non preserva il portafoglio da fonti di rischio rilevanti come il rischio di credito legato al richio paese.

CAPITOLO 5. CONCLUSIONI

Le analisi svolte hanno evidenziato i limiti della teoria dell'immunizzazione finanziaria elaborata nel 1971 da Fisher e Weil. Nel secondo capitolo i portafogli sono stati costruiti in modo che il passivo e l'attivo avessero un'uguale duration e un'uguale valore attuale. Ipotizzando uno shift additivo con una traslazione rigida delle curve dei rendimenti del passivo e dell'attivo, i portafogli così costruiti hanno prodotto risultati soddisfacenti: le variazioni del valore netto sono risultate pari a +0.108% per il Portafoglio Italia e +0.119% per il Portafoglio Germania. L'intento dell'immunizzazione finanziaria era fornire gli espedienti necessari per un investimento il cui valore netto (valore dell'attivo meno valore del passivo) fosse sempre ≥0. Osservando i risultati, il teorema di Fisher e Weil sembrerebbe assicurare una metodologia adeguata. Nel terzo capitolo il teorema è stato nuovamente testato: il valore dell'investimento è stato calcolato sulla base delle informazioni su prezzi e curve dei rendimenti vigenti nel mercato in data 01/08/2011. In questo caso le variazioni dei valori netti dei portafogli sono risultate pari a -4.1% per il Portafoglio Italia e -0.97% per il Portafoglio Germania. Le perdite registrate dal Portafoglio Italia invalidano le tesi del teorema di Fisher e Weil, evidenziando variazioni asimmetriche nel passivo e nell'attivo. Nella nostra argomentazione non si è tenuto conto inoltre dei costi di tassazione, costi di transazione e inflazione. Questi avrebbero messo ancor più in risalto la mancata tenuta dell'immunizzazione finanziaria. Fogler afferma infatti*:* "if unanticipated inflation changes the future cash flows of assets and liabilities, standard immunization procedures must be modified — and when the assets are bonds, immunization may be impossible".[32]

[32]Fogler R. H., (1984), *Bond Portfolio Immunization, Inflation, and the Fisher Equation,* The Journal of Risk and Insurance, Vol. 51, No. 2, pp 244-264

BIBLIOGRAFIA

1. Betti R., (2010), *Geometria e complementi di analisi matematica*, Bologna, Progetto Leonardo

2. Bierwag G.O., (1977), Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates, The Journal of Financial and Quantitative Analysis vol. 12 no. 5

3. Brealey R. A., Myers S. C., Allen F., Sandri S., (2007) *Principi di Finanza aziendale,5*th edition, Milano, McGraw-Hill

4. Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F.A., Torrignani M. (1998) *Matematica Finanziari*a, Bologna, Monduzzi

5. Caparelli F., D'ArcangelisA.M., (1999), La gestione del portafoglio obbligazionario, Guida agli strumenti di analisi e alle scelte di investimento, Milano, Edibank

6. Castellani M., Gozzi F. (2006) *Matematica di base per l'economia e l'azienda*, Bologna, Società editrice Esculapio

7. Cacciafesta F. (2006) *Matematica finanziaria (classica e moderna)*, Torino, Giappichelli editore

8. Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005*) Manuale di finanza, Tassi di interesse Mutui e Obbligazioni*, Bologna, Il Mulino

9. Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005) Manuale di finanza, Teoria del portafoglio e del mercato azionario, Bologna, Il Mulino

10. Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Mottura C. (1993) *Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse,* Bologna, il Mulino

11. De Felice M., Moriconi F.(1991), *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie,* Bologna, Il Mulino

12. Di Franco M., Polimeni F., Proietti M., (2002) Opzioni e titoli strutturati, Le recenti evoluzioni dell'ingegneria finanziaria, Ed. Il Sole 24 Ore, Milano

13. Duran D.,1957*, Growth Stocks and the Petersburg Paradox*, The Journal of Finance, Vol. 12, No. 3

14. Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, The University of Chicago Press

15. Fisher L., (1966), *An Algorithm for Finding Exact Rates of Return*, The Journal of Business, Vol. 39, The University of Chicago Press

16. Fogler R. H., (1984), *Bond Portfolio Immunization, Inflation, and the Fisher Equation*, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 51, No. 2, pp 244-264

17. Hics J, (1946)*Value and capital*, Oxford, UK, Clarendon Press

18. Lusignani G., (1996), La gestione dei rischi finanziari nella banca, Il Mulino, Bologna

19. Macaulay F. R. (1938) Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, New York, National Bureau of Economic Research

20. Modigliani F., Porgue G.A., (1974) *An introduction to Risk and Return*, Financial Analyst journal

21. Mishkin F.S, Eakins S. G., Forestieri G., (2010) *Istituzioni e mercati finanziari*, seconda edizione, Torino, Pearson Addison Wesley

22. Principi per la gestione del rischio di tasso di interesse, Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, Basilea 1997

23. Poitras G, Macaulay F.R., *Frank M. Redington and the Emergence of Modern Fixed Income Analysis*, Simon Fraser University chapter 4 in Pioneers of Financial Economics (vol.2), Cheltenham, UK: Edward Elgar

24. Redington F.M., (1952), *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Journal of the Institute of Actuaries

25. Samuelson P.A., (1945) *The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System*, American Economic Review

26. Tempelman J. H., Choi Y., (2011), Impact of European Sovereign Debt Crisis Continues to Spread, Moody's

27. Weil R.L., (1973), *Macaulay's Duration*: *An Appreciation, The Journal of Business*, Vol. 46, No. 4, The University of Chicago Press