

Dipartimento di Economia e Finanza
Corso di Laurea Magistrale in Finanza dei Mercati e Quantitativa
Cattedra di Scelte di Portafoglio e Gestione del Risparmio

STRUMENTI ECONOMETRICI APPLICATI
A SCELTE DI INVESTIMENTO:
COINTEGRAZIONE PER UNA STRATEGIA
SPECULATIVA

RELATORE:

Prof. Nicola Borri

CANDIDATO:

Cesare Orsini

Matr. 634061

CORRELATORE:

Prof. Giuseppe Ragusa

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

Indice

Introduzione	1
1 Cointegrazione e <i>Pair Trading</i>	5
1.1 Simulazione e descrizione dei dati	5
1.1.1 Generazione di processi integrati	5
1.2 Cointegrazione e definizione della strategia di <i>trading</i>	5
1.2.1 Analisi delle relazioni di cointegrazione e stazionarizzazione del processo	5
1.3 Definizione della strategia di <i>trading</i>	7
1.3.1 Stazionarizzazione del <i>trading period</i>	8
1.3.2 Costruzione di due <i>threshold</i>	8
1.3.3 Generazione di un segnale operativo	8
1.3.4 Definizione di un <i>holding period</i>	8
1.4 Applicazione della strategia	11
1.4.1 Premesse al modello	11
1.4.2 Stazionarietà e implementazione della strategia	11
1.4.3 <i>Back Testing</i> della strategia	15
Conclusioni	24
Bibliografia	24

*

Introduzione

Questo lavoro ha l'obiettivo di sviluppare una strategia di investimento mediante strumenti econometrici utili alla sua costruzione e al *Back Testing* della stessa. In particolare si vuole illustrare l'utilizzo di alcuni dei principali strumenti di econometria finanziaria, applicandoli alla costruzione e alla valutazione di uno specifico modello operativo. Tale modello è basato su una strategia di *pair trading* e cerca di trarre vantaggio dalla cointegrazione che caratterizza le serie storiche di alcuni asset finanziari. Questa tipologia di trading, basata sullo studio econometrico delle relazioni di cointegrazione, rappresenta un nuovo approccio che trova sempre più diffusione tra gli operatori presenti sul mercato¹. Questo ha animato la volontà di verificarne la reale applicabilità.

Tra le scelte di investimento presenti sul mercato, considerando quelle che guardano al titolo da un punto di vista valutativo, l'idea generale è quella di vendere *asset* sopravvalutati e acquistare quelli sottovalutati. A tal proposito è possibile determinare l'eventuale *mispricing* di una attività solo se noto il vero valore del titolo in termini assoluti. Spesso quest'ultimo aspetto costituisce un vera e propria incognita su cui è difficile ottenere certezze utili a fare profitto e a tutelare la nostra iniziativa. L'idea alla base del *Pair Trading* pone questa strategia, basata su una analisi relativa del prezzo, come soluzione operativa a questa difficoltà. Tale tecnica sarà illustrata in maniera più efficace nella parte pratica di questo lavoro, per adesso accenniamo all'idea secondo la quale se due *asset* hanno caratteristiche simili allora il prezzo dovrebbe essere più o meno lo stesso, o almeno legato da una relazione di equilibrio. In questa tipologia di analisi il prezzo specifico del titolo assume una importanza relativa, l'unica cosa importante è che i prezzi delle due attività siano stabilmente vicini. Uno scostamento rilevante potrebbe essere dovuto all'*overpricing* di un titolo, all'*underpricing* dell'altro o ad un errore combinato sul *pricing* di entrambi. Il *Pair Trading* fonda la sua operatività sull'assunzione di posizioni di segno opposto. In particolare viene assunta una posizione lunga sul

¹Alcuni *broker* iniziano ad offrire alla propria clientela delle applicazioni che permettono di andare alla ricerca delle strategie basate su relazioni di questo tipo, con tanto di *back test* e significatività statistica.

titolo che ha un prezzo troppo basso ed una posizione corta su quello che ha un prezzo troppo elevato, nell'attesa che il *mispricing* si corregga. La differenza tra i prezzi delle due attività è catturata dalla nozione di *spread*. L'evoluzione di questa misura fornisce i segnali per l'apertura e la chiusura di posizioni nell'ambito di un vero e proprio modello operativo².

La relazione tra il prezzo dei titoli oggetto della strategia potrebbe essere caratterizzata da un equilibrio di lungo periodo o meglio da una relazione di cointegrazione. A tal proposito anticipiamo l'idea dei due econometrici Engle e Granger, che nel 2003 valse loro il Nobel. I dati che arrivano dal mercato evidenziano come, spesso, le serie storiche dei prezzi di strumenti finanziari presentino delle caratteristiche di non stazionarietà. Tra le varie forme di non stazionarietà consideriamo quella dovuta alla presenza di radici unitarie, che tipicamente caratterizza le serie storiche ($I(1)$) del prezzo di *asset* finanziari. Secondo il lavoro dei due econometrici, due o più serie $I(1)$ sono cointegrate se esiste una combinazione lineare di queste che dia luogo ad un processo stazionario. Quindi nel caso di due serie rappresentate dalle variabili x_1 e x_2 , potremo dire che queste sono cointegrate se, essendo entrambe $I(1)$, esiste un vettore $\beta = [1, -\alpha]$ tale che $z = x_1 - \alpha x_2$ è stazionario. La combinazione z è data dal prodotto vettoriale tra il vettore riga β' , detto vettore di cointegrazione e il vettore colonna formato dalle variabili x_1 e x_2 . A questo punto sostituendo la condizione di vicinanza tra i prezzi di due attività con una relazione di equilibrio, potremmo costruire un modello in grado di sfruttarne gli eventuali scostamenti. Infatti, se consideriamo le variabili integrate date dal logaritmo del prezzo di due generici titoli A e B, individuato il vettore di cointegrazione, la loro combinazione lineare è un processo stazionario. Costruito tale processo, incentriamo la nostra strategia sull'apertura e la chiusura di posizioni utili a far profitto sfruttando il fenomeno di *mean-reversion*, tipico dei processi stazionari. In particolare immaginando tale combinazione come un portafoglio composto da una posizione lunga sul titolo A ed una corta sul titolo B, operiamo monitorando l'andamento del processo. Quindi, acquistiamo il portafoglio quando il processo è al di sotto del suo valore di equilibrio e oltre una certa soglia. Successivamente la

²Inoltre il portafoglio costituito nell'ambito di questa strategia *long-short* presenta, per costruzione, una esposizione minima nei confronti del mercato e rendimenti incorrelati rispetto allo stesso, collocandosi così tra le cosiddette *market neutral strategies*. Queste strategie sono costruite assumendo posizioni di segno opposto su diversi strumenti finanziari, in modo tale che il portafoglio abbia una esposizione pressoché nulla rispetto ad ampi movimenti del mercato. L'obiettivo principale è conseguire un profitto dal *mispricing* relativo tra strumenti più o meno collegati, vendendo quelli percepiti come sovrapprezzati e comprando quelli sottoprezzati, evitando così il rischio sistematico. Nei mercati azionari queste strategie si evolvono nello *statistical arbitrage*. Questa tecnica sviluppa un metodologia basata su una analisi delle serie storiche finalizzata all'individuazione di eventuali errori nel *pricing* di azioni. Il *Pair Trading* è una forma specifica di *Statistical Arbitrage*.

posizione è chiusa nel momento in cui il processo è tornato al valore di equilibrio. Speculare è la strategia adottata nel caso in cui il valore della combinazione si trovi al di sopra del suo valore di equilibrio e oltre una certa soglia.

Il lavoro è composto da un unico capitolo centrale e da una Appendice Teorica. Il capitolo centrale descrive da un punto di vista pratico le fasi necessarie alla costruzione del modello operativo. La prima sezione del capitolo è dedicata alle tecniche di simulazione con cui sono state generate le serie storiche utilizzate. Segue la seconda sezione in cui è illustrata l'applicazione degli strumenti econometrici adatti all'analisi di serie storiche integrate. Nella terza sezione è introdotta la nozione di cointegrazione e la sua potenziale applicabilità nell'ambito di una strategia di investimento. In questa parte sono descritte le regole e i parametri su cui è basata l'operatività. A tale scopo vengono definiti anche i meccanismi di generazione dei segnali utilizzati per l'apertura e la chiusura di posizioni. L'ultima sezione descrive la concreta applicazione del modello operativo. In quest'ultima parte la trattazione è sviluppata mediante un duplice approccio. Da un lato si considera la gestione del portafoglio. Tramite il Back Testing della strategia infatti, vengono rilevati i risultati in termini di rischi e rendimento. Questa analisi è effettuata mediante le tecniche di valutazione delle *performance* e del rischio tipiche dell'*asset allocation*. A questa segue lo studio del modello e la valutazione dei suoi risultati da un punto di vista econometrico. Da ultimo l'Appendice teorica sintetizza la teoria econometrica utilizzata nelle applicazioni pratiche sviluppate nel primo capitolo.

La costruzione ed il *Back Testing* della strategia, con particolare riferimento ai test econometrici, vengono implementati mediante l'utilizzo del software statistico R (www.r-project.org). Tale linguaggio di programmazione è stato scelto per la duttilità e per la sua caratteristica di essere liberamente disponibile ed *open source*. Questo fa sì che i risultati di un lavoro di ricerca sviluppato in R siano verificabili da chiunque intenda effettuare un controllo per dare una valutazione del lavoro. A tale scopo sono riportati in Appendice gli *script* della programmazione utilizzata nella costruzione del modello.

Capitolo 1

Cointegrazione e *Pair Trading*

1.1 Simulazione e descrizione dei dati

1.1.1 Generazione di processi integrati

Per analizzare le difficoltà connesse alla costruzione di un modello in grado di ottenere risultati positivi, si è deciso di generare serie storiche con caratteristiche utili a mettere in luce i punti critici della sua costruzione. Siamo partiti da un campione idoneo a illustrare l'applicazione della strategia, per giungere a delle serie molto vicine a quelle di titoli realmente quotati sul mercato. Sono stati costruiti tre campioni, ciascuno costituito da due serie storiche: il campione 1, contenente 1306 osservazioni relative al logaritmo naturale dei prezzi del titolo A e del titolo B; il campione 2 formato da quelli del titolo C e del titolo D; il campione 3 che include il logaritmo naturale delle quotazioni giornaliere del contratto *future* e dell'ETF appena descritti.

1.2 Cointegrazione e definizione della strategia di *trading*

1.2.1 Analisi delle relazioni di cointegrazione e stazionarizzazione del processo

Consideriamo un processo bivariato integrato di ordine 1 del tipo $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})$. Supponiamo che sia cointegrato, con vettore di cointegrazione $\beta = [1, -\alpha]$, tale che $\beta' \mathbf{y}_t = y_{1t} - \alpha y_{2t}$ è $I(0)$. Si dimostra tramite il famoso Teorema di Rappresentazio-

ne di Granger¹ che: *se le serie sono cointegrate allora esiste una rappresentazione in forma ECM; e se esiste una forma ECM e le serie sono integrate allora sono cointegrate*. Sfruttando il legame definito da questo teorema tra le serie cointegrate e la loro rappresentazione in ECM, ci siamo serviti di quest'ultima per individuare le relazioni di cointegrazione tra le serie prese in esame.

Campione 1

Le serie del *formation period* dei titoli A e B, contenute nella matrice \mathbf{Y}^{1F} di dimensioni (252×2) , sono state sottoposte al test di Johansen, nella sua versione del massimo autovalore² e sotto l'ipotesi della presenza di una costante.

H_0	<i>test</i>	10%	5%	1%
$r \leq 1$	3.49	7.52	9.24	12.97
$r = 0$	66.57	13.75	15.67	20.20

Tabella 1.1: **Risultati del test di Johansen per la coppia di titoli A - B**

Il test di Johansen individua il vettore di cointegrazione $\beta^1 = [1, -0.613, -2.028]$.

Campione 2

Ora consideriamo il periodo di formazione per la coppia di titoli C e D. Il test di Johansen effettuato sul vettore \mathbf{Y}^{2F} restituisce i risultati riportati nella Tabella 1.2. Il vettore di cointegrazione individuato è $\beta^2 = [1, -0.731, -1.437]$.

H_0	<i>test</i>	10%	5%	1%
$r \leq 1$	3.65	7.52	9.24	12.97
$r = 0$	31.94	13.75	15.67	20.20

Tabella 1.2: **Risultati del test di Johansen per la coppia di titoli C - D**

Campione 3

Nel caso delle serie del future e dell'ETF, il test di Johansen sul vettore \mathbf{Y}^{3F} rigetta la nulla di assenza di cointegrazione ad un livello di significatività del 5%. Il vettore di cointegrazione associato è $\beta^3 = [1, -1.026, 0.049]$.

¹Si tratta di un teorema abbastanza complesso, la cui dimostrazione esula dagli obiettivi di questo elaborato. Per un approfondimento più analitico si veda Engle e Granger (1987).

²Tutta la parte in merito alle diverse tipologie del test e alle ipotesi sottostanti trova una esaustiva trattazione nell'Appendice Teorica del lavoro.

H_0	$test$	10%	5%	1%
$r \leq 1$	1.07	7.52	9.24	12.97
$r = 0$	18.08	13.75	15.67	20.20

Tabella 1.3: Risultati del test di Johansen per la coppia di titoli f - E

1.3 Definizione della strategia di *trading*

Una volta identificata la relazione di cointegrazione che lega l'andamento del prezzo di due titoli, procediamo alla definizione della strategia di investimento. L'idea alla base di tale strategia può essere sintetizzata da quanto segue. Consideriamo le serie storiche del logaritmo naturale del prezzo di due titoli x_1 e x_2 , entrambe $I(1)$ e caratterizzate da una significativa relazione di cointegrazione. Identificato il vettore cointegrante $\beta = [1, -\alpha]$ la combinazione lineare³

$$\beta'x = \ln(P_{x_1}) - \alpha \ln(P_{x_2}) \quad (1.1)$$

è un processo stazionario che tenderà ad oscillare attorno al suo valore medio. A questo punto, possiamo intendere la combinazione $\ln(P_{x_1}) - \alpha \ln(P_{x_2})$ come un portafoglio costituito da una posizione lunga sul titolo x_1 e una posizione corta sulla proporzione α del titolo x_2 . Ipotizziamo inoltre di fissare due bande che rappresentino un limite superiore e un limite inferiore per le fluttuazioni della combinazione lineare $\beta'x$. La rottura di una delle bande costituisce un segnale operativo del modello. La strategia infatti, consiste nell'acquistare tale portafoglio in corrispondenza di una rottura del limite inferiore, mantenendo le due posizioni che lo compongono fin quando il processo non è tornato al suo valore di equilibrio. Nel caso di rottura del limite superiore la strategia è speculare. Questo modello si basa sulla proprietà di *mean reversion*, tipica di un processo stazionario. Infatti la chiusura delle posizioni assunte al momento della rottura di uno dei due limiti, avviene in corrispondenza del ritorno al valore medio. L'operatività basata su questo modello richiede una stima preventiva di alcuni parametri. Questi forniscono regole decisionali importanti per il *trading* che si andrà ad effettuare. Di seguito sono descritte le tecniche per la stima di tali parametri necessari a completare l'articolazione del modello.

³Nel caso in cui il vettore β includa un valore c costante allora la combinazione lineare diventa $\beta'x = \ln(P_{x_1}) - \alpha \ln(P_{x_2}) + c$.

1.3.1 Stazionarizzazione del *trading period*

I processi S^{1T} , S^{2T} e S^{3T} sono ottenuti mediante:

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \quad \beta \mathbf{x}_1 = \quad \ln(P_{x_11}) - \alpha \ln(P_{x_21}) \\ t = 2 \quad \beta \mathbf{x}_2 = \quad \ln(P_{x_12}) - \alpha \ln(P_{x_22}) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ t = 126 \quad \beta \mathbf{x}_{126} = \quad \ln(P_{x_1126}) - \alpha \ln(P_{x_2126}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_1^T \\ S_2^T \\ \dots \\ \dots \\ S_{126}^T \end{array} \quad (1.2)$$

1.3.2 Costruzione di due *threshold*

1. Approccio dei percentili
2. Approccio della deviazione standard

Nella fase di *Back Testing* del modello è stata scelta una versione avanzata dell'approccio basato sulla deviazione standard. Si tratta di una versione *rolling* che non genera grosse variazioni, trattandosi infatti di un processo stazionario la deviazione standard dovrebbe presentare un andamento costante. Tuttavia tale evoluzione permette di considerare eventuali variazioni che interessano la variabilità del processo.

1.3.3 Generazione di un segnale operativo

Dopo aver individuato la soglia superiore e la soglia inferiore, illustriamo la dinamica che a seguito della rottura di uno di questi limiti genera un segnale operativo. Consideriamo il caso in cui al tempo t il processo S_t^T si trovi al di sopra del limite superiore, come avviene nella quinta osservazione della figura Figura 1.1. In questo caso la prima rottura della soglia, quella che avviene nel punto 1 del grafico, non costituisce ancora un vero e proprio segnale. L'apertura delle posizioni infatti, avviene in corrispondenza della rottura successiva, quella che si verifica quando il processo oltrepassa il limite superiore dall'alto verso il basso (punto 2).

1.3.4 Definizione di un *holding period*

L'*holding period* ci indica il tempo oltre il quale si deve chiudere la posizione, nel caso in cui, dopo un pò di osservazioni, il processo non sia ancora tornato al suo valore medio. Posto τ la media del tempo che il processo impiega per

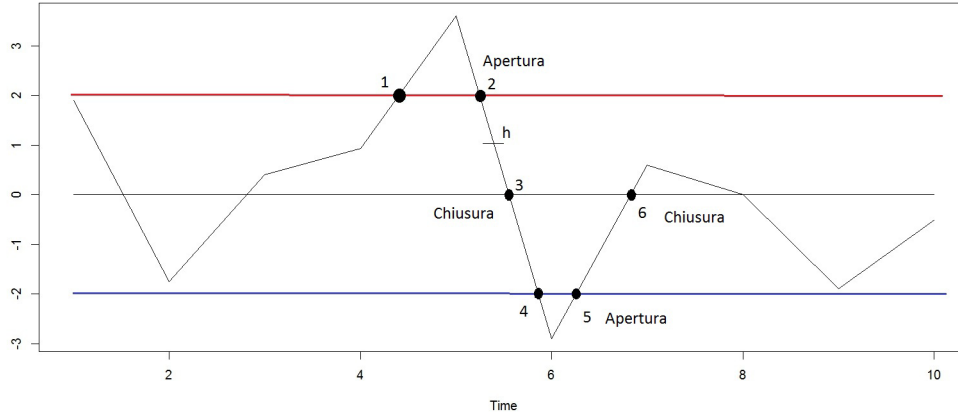


Figura 1.1: Esempio di generazione di un segnale operativo

completare la sua *mean reversion*, il suo valore può essere calcolato mediante una stima campionaria. Il campione utilizzato è costruito in questo modo:

$$\left. \begin{array}{l}
 t = 1 \quad \beta \mathbf{x}_1 = \ln(P_{x_11}) - \alpha \ln(P_{x_21}) \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 t = 252 \quad \beta \mathbf{x}_{252} = \ln(P_{x_1252}) - \alpha \ln(P_{x_2252}) \\
 \\
 t = 253 \quad \beta \mathbf{x}_{253} = \ln(P_{x_1253}) - \alpha \ln(P_{x_2253}) \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 t = t \quad \beta \mathbf{x}_t = \ln(P_{x_1t}) - \alpha \ln(P_{x_2t}) \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 t = 378 \quad \beta \mathbf{x}_{378} = \ln(P_{x_1378}) - \alpha \ln(P_{x_2378})
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 S_1^F \\
 \dots \\
 \dots \quad \textit{formation period} \\
 S_{252}^F \\
 \\
 S_{253}^T \\
 \dots \\
 S_t^T \quad \textit{trading period} \\
 \dots \\
 S_{378}^T
 \end{array} \quad (1.3)$$

dove $\{S_1^F, \dots, S_{252}^F\}$ sono i valori del processo ottenuto stazionarizzando il *formation period* e $\{S_{253}^T, \dots, S_t^T\}$ sono i valori del processo ottenuto stazionarizzando la parte del *trading period* trascorsa fino al tempo t . Quindi al tempo t il campione utilizzato per la stima di τ è $\{S_1^F, \dots, S_{252}^F, S_{253}^T, \dots, S_t^T\}$.

Per illustrare le tecniche utilizzate per la stima di questo parametro, introduciamo il processo di Ornstein-Uhlenbeck (O-U). Tale dinamica trova un diffuso utilizzo nella modellizzazione di processi stocastici *mean reverting*. Consideriamo il processo Aritmetico Ornstein-Uhlenbeck per la variabile stocastica $X(t)$, l'equazione

differenziale stocastica associata è

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t) \quad (1.4)$$

dove $\theta > 0$ è la velocità di *mean reversion*, μ è il valore medio di lungo periodo verso cui il processo tende a tornare, $W(t)$ ⁴ è un moto Browniano e σ è la volatilità del processo. Questa equazione ha soluzione esplicita (Kloeden e Platen, 1992)

$$X(t) = X(0)e^{-\theta t} + (1 - e^{-\theta t})\mu + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta t} dW(t) \quad (1.5)$$

dove $X(t)$ si distribuisce come una Normale (Dixit e Pindyck, 1994). Per stimare il processo mediante un software generalmente si ricorre ad una sua discretizzazione, se consideriamo l'Eq. 1.5 nel discreto si ottiene

$$X_t = X_{t-1}e^{-\theta \Delta t} + (1 - e^{-\theta \Delta t})\mu + \sigma e^{-\theta \Delta t} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\theta \Delta t}}{2\theta}} N(0, 1) \quad (1.6)$$

I parametri del processo O-U possono essere stimati dal campione mediante due tecniche:

1. Calibratura con il metodo dei minimi quadrati

2. Calibratura con il metodo delle stime di massima verosimiglianza

Le due tecniche illustrate ci restituiscono le stime di $\hat{\mu}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}$. Per individuare l'**holding period** introduciamo il concetto di *half life* (H)⁵. Tale misura rappresenta il tempo che il processo $X(t)$ impiega per raggiungere il punto medio del segmento che unisce il valore corrente $X(0)$ al valore μ di equilibrio.

$$H = \frac{\ln(2)}{\theta} \quad (1.7)$$

Dopo aver stimato H con le due tecniche illustrate, possiamo ottenere $\tau = 2H$. Una volta stimato τ possiamo definire l'*holding period* della nostra posizione come un multiplo di questa misura, oppure soltanto aggiungendo una soglia di tolleranza per le deviazioni dal valore stimato.

⁴ $W(t)$ è un moto Browniano allora $dW(t) \sim N(0, \sqrt{dt})$.

⁵La versione originale del concetto di *half life* deriva dalla fisica: nella misurazione del tasso di decadimento di una sostanza, l'*half life* coincide con il tempo richiesto da una certa quantità di sostanza per deteriorarsi fino alla metà della sua massa.

1.4 Applicazione della strategia

1.4.1 Premesse al modello

In questo paragrafo assumeremo che, nella fase di applicazione della strategia, valgano le seguenti condizioni:

1. non esistono costi di transazione, questo elimina l'onere di considerare fattori come il *bid-ask spread*, commissioni applicate dal broker e lotti minimi di negoziazione;
2. tutti i profitti sono soggetti alla stessa aliquota fiscale;
3. la valuta in tutti e tre i campioni è il Dollaro;
4. non ci sono limiti sul *leverage*;
5. il denaro può essere dato o preso in prestito allo stesso tasso risk free pari al 5% composto continuamente;
6. qualora il processo S^T raggiunga il suo valore medio o generi un segnale operativo nel periodo compreso tra due osservazioni, l'operazione è eseguita utilizzando il valore della quotazione disponibile più prossima;
7. l'operazione non è eseguita se al momento in cui si genera il segnale operativo le componenti del vettore di cointegrazione hanno subito una variazione superiore al 15%⁶ (in valore assoluto).

1.4.2 Stazionarietà e implementazione della strategia

Creazione dei processi S^{1T} , S^{2T} e S^{3T}

Per i 3 campioni, la stazionarizzazione del periodo di *trading* avviene mediante l'operazione:

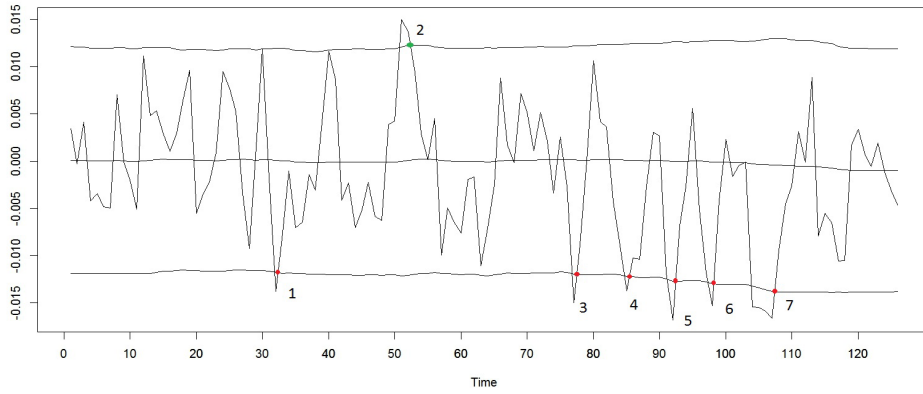
$$\beta^1 \Gamma_1 = S^{1T} \quad (1.8)$$

$$\beta^2 \Gamma_2 = S^{2T} \quad (1.9)$$

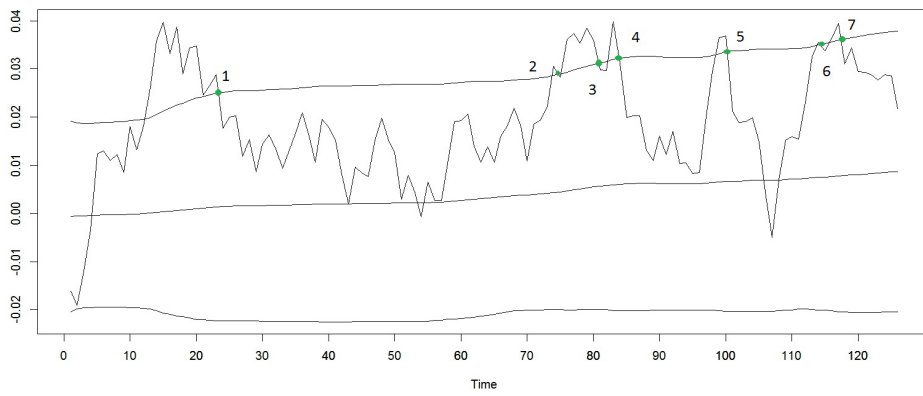
$$\beta^3 \Gamma_3 = S^{3T} \quad (1.10)$$

dove β^1 , β^2 e β^3 sono i vettori di cointegrazione stimati e Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 sono matrici composte da una colonna di 1 e dalle colonne contenenti il *trading period* di ciascun campione. La Figura 1.2 riporta i grafici dei tre processi creati.

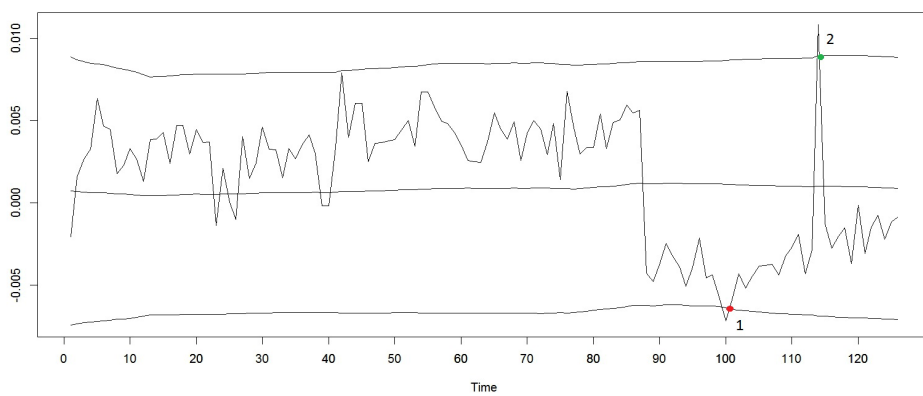
⁶Si veda Herlemont D. (2004).



(a) Processo S^{1T}



(b) Processo S^{2T}



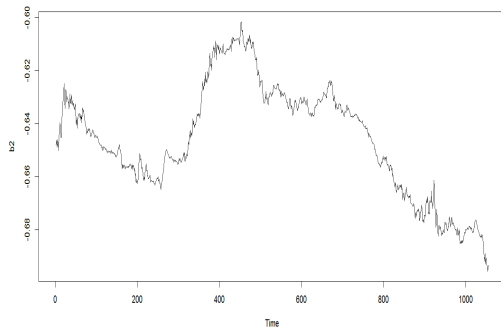
(c) Processo S^{3T}

Figura 1.2: **Gráfico dei *trading period* stazionarizzati**

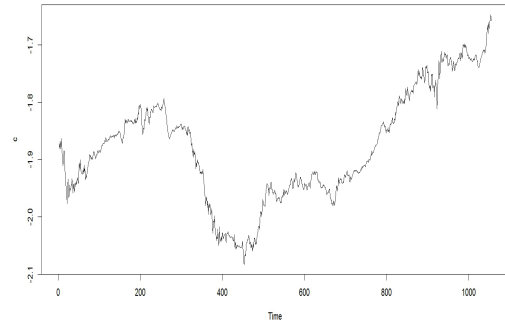
Stabilità del vettore di cointegrazione e applicabilità del modello

Le differenze appena descritte in merito alla stazionarietà dei processi S^{1T} , S^{2T} e S^{3T} sembrano esser collegate all'intensità della relazione di cointegrazione. Secondo questa idea, considerando la Tabella 1.1, la grandezza del valore critico assunto dalla statistica in corrispondenza dell'ipotesi relativa all'assenza di relazioni di cointegrazione (66.57), giustificerebbe la stazionarietà ottenuta mediante l'Eq. 1.8. Pertanto la non stazionarietà dei processi S^{2T} e S^{3T} sarebbe collegata ai valori più contenuti (rispettivamente 31.94 e 18.08) assunti dalla statistica nelle altre due stime. Tale lettura del fenomeno risulta però troppo semplicistica. Questo ci ha spinto allo sviluppo di un'applicazione 'rolling' del test di Johansen, in grado di considerare la mutevolezza delle condizioni al contorno in cui questo viene implementato. In particolare la statistica è stata applicata su ciascun campione mediante delle 'rolling window' di 252 osservazioni⁷. Le stime mobili delle componenti di ciascun vettore cointegrante sono rappresentate nei grafici della Figura 1.3. Questi evidenziano una consistente variabilità delle componenti di ciascun vettore. In particolare, i grafici relativi alle stime effettuate sul campione 2 e sul campione 3, oltre a considerevoli variazioni, presentano sporadici *shock*. Tale caratteristica potrebbe trovare parziale giustificazione negli shock e nei cambiamenti di regime intrinseci alle serie. L'ipotesi è che questi fattori possano minare la stabilità del vettore stimato su finestre di dimensione ridotta. Tuttavia considerando il grafico relativo alle componenti stimate sul primo campione (Figura 1.3 (a) e (b)), sembrerebbe che la procedura di Johansen non sia robusta, infatti come nei due casi precedenti, spostamenti della finestra temporale possono generare cambiamenti drammatici nella stima delle componenti del vettore. Eppure le serie storiche che costituiscono il campione 1 sono state generate in modo tale che fossero caratterizzate da una forte relazione di cointegrazione. Sembra a questo punto che per stime effettuate su finestre di queste dimensioni, la stabilità del vettore cointegrante possa dipendere in modo solo parziale dall'intensità della relazione di cointegrazione. A tal proposito accenniamo ad una problematica introdotta da Phillips (Phillips Peter C. B., 1994) in merito allo strano comportamento degli stimatori di massima verosimiglianza nel caso di campioni finiti. Questa lavoro ha dimostrato infatti

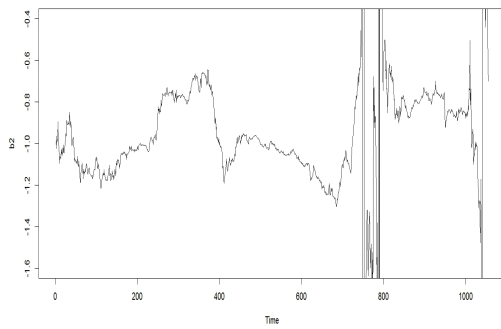
⁷La scelta dell'ordine di ritardo utilizzato per effettuare il test su ogni finestra temporale è avvenuta mediante una stima *rolling* dei criteri di informazione AC, BIC e SC. Effettuata la stima, in base all' *information criterion* SC, è stato scelto un ritardo pari a 2 per ciascuna delle finestre temporali di tutti e tre i campioni. Il test di Johansen è stato implementato tramite l'Eq. ???. Trattandosi di un'applicazione 'rolling' l'ipotesi di costanza di tali parametri potrebbe risultare una limitazione per la bontà della stima. Tuttavia il nostro scopo è il confronto in termini relativi dei valori assunti dalla statistica in ciascuna delle finestre su cui è stato implementato il test. Pertanto l'ipotesi di non variazione di questi parametri non dovrebbe inficiare molto l'obiettivo della nostra analisi.



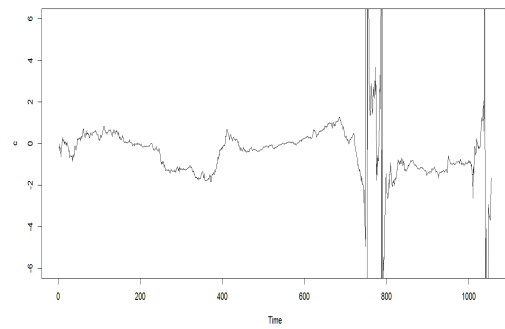
(a) Seconda componente del vettore stimato sul campione 1



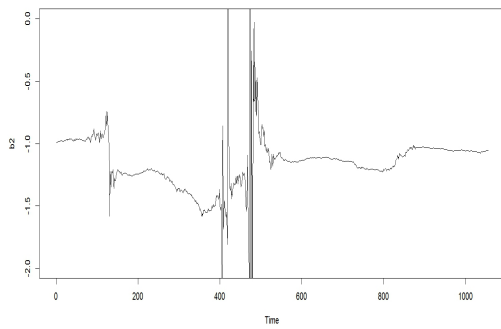
(b) Terza componente del vettore stimato sul campione 1



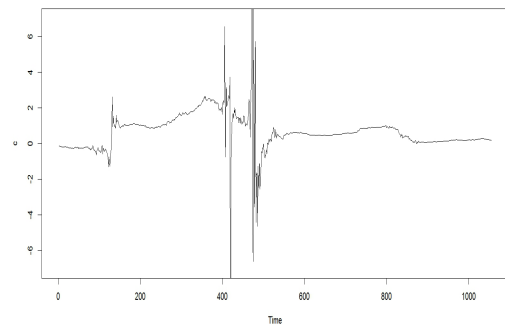
(c) Seconda componente del vettore stimato sul campione 2



(d) Terza componente del vettore stimato sul campione 2



(e) Seconda componente del vettore stimato sul campione 3



(f) Terza componente del vettore stimato sul campione 3

Figura 1.3: Analisi *rolling* delle componenti dei vettori di cointegrazione

che in piccoli campioni stimatori di massima verosimiglianza non hanno momenti finiti. Guardando i grafici, la situazione potrebbe essere anche peggiore poiché le stime *rolling* appaiono caratterizzate anche da una certa componente di correlazione e da sporadici shock. Inoltre come affermato da Zivot (2010), il fatto che la *finite sample distribution* non abbia momenti finiti rende possibile risultati assurdi dell'MLE di Johansen. Pertanto sarebbe interessante avere qualche contributo in merito alla distribuzione delle stime mobili del vettore di cointegrazione. In tal senso sono presenti in letteratura lavori in cui è stata derivata la distribuzione delle stime *rolling* (su un campione finito) di test a radice unitaria (Banerjee, Lumsdaine e Stock, 1992). Tornando al modello operativo costruito, l'identificazione della distribuzione delle stime mobili del vettore cointegrante sul campione finito ci fornirebbe uno strumento molto utile. Ad esempio tramite queste informazioni, si potrebbe subordinare l'apertura di posizioni a delle verifiche sulla stabilità del vettore di cointegrazione. Questo potrebbe tradursi non tanto in un miglioramento della profittabilità della strategia, quanto piuttosto in riduzione dei rischi legati ai cambiamenti di regime o altri fattori che possono minare la stabilità del vettore.

1.4.3 *Back Testing* della strategia

Operazioni concluse e rendimento

Le Tabelle 1.4, 1.5 e 1.6 riassumono le operazioni eseguite applicando il modello operativo costruito. Il rendimento netto derivante dall'operazione è pari a

$$[\ln(P_{A704}) - \beta_2^1 \ln(P_{B704}) + c] - [\ln(P_{A706}) - \beta_2^1 \ln(P_{B706}) + c]$$

$$[\ln(P_{A704}) - \ln(P_{A706})] + \beta_2^1 [\ln(P_{B706}) - \ln(P_{B704})]$$

$$[\ln(120.15) - \ln(119.47)] + 0.613 [\ln(88.71) - \ln(87.18)] = 0.92\%.$$

Come anticipato, il tasso di interesse passivo e attivo è pari al 5% (tasso *risk free*). Nel calcolo degli interessi è stato utilizzato il regime di capitalizzazione continua. Pertanto il rendimento lordo è pari a

$$\left[\ln(120.15e^{0.05 \frac{2}{252}}) - \ln(119.47) \right] + 0.613 \left[\ln(87.18) - \ln(88.71e^{0.05 \frac{2}{252}}) \right] = 0.94\%$$

I dati riportati nelle Tabelle 1.5 e 1.6 evidenziano invece, tempi di *mean reversion* molto più dilatati rispetto a quelli presenti nella Tabella 1.5.

A tal proposito, nella Tabella 1.4 sono riportati gli interessi passivi e attivi maturati sulla differenza del controvalore delle posizioni assunte. Naturalmente gli interessi passivi si generano nel caso in cui l'ammontare richiesto dalla posizione

<i>time</i>	<i>Buy/Sell</i>	P_A	P_B	τ	<i>h.p.</i>	R	R^*	$\Delta\beta_2^1$	Δc
684	<i>B</i>	121.92 \$	93.39 \$						
688	<i>S</i>	123.66 \$	94.61 \$	2.13	4	0.62%	0.59%	1%	1%
704	<i>S</i>	120.15 \$	88.71 \$						
706	<i>B</i>	117.79 \$	87.18 \$	2.22	4	0.92%	0.94%	2%	3%
729	<i>B</i>	117.67 \$	88.32 \$						
731	<i>S</i>	119.46 \$	87.70 \$	2.19	4	1.94%	1.93%	0%	0%
737	<i>B</i>	117.52 \$	88.34 \$						
740	<i>S</i>	115.53 \$	84.07 \$	2.23	4	1.33%	1.27%	0%	0%
744	<i>B</i>	114.24 \$	83.89 \$						
746	<i>S</i>	114.62 \$	82.66 \$	2.26	4	1.24%	1.22%	1%	2%
750	<i>B</i>	115.13 \$	84.59 \$						
751	<i>S</i>	114.84 \$	83.35 \$	2.27	4	0.65%	0.64%	2%	3%
759	<i>B</i>	111.59 \$	81.08 \$						
764	<i>S</i>	110.00 \$	76.88 \$	2.42	5	1.83%	1.79%	3%	4%

Tabella 1.4: Operazioni eseguite sul portafoglio composto da una posizione lunga sul titolo A e una posizione corta sul titolo B

<i>time</i>	<i>Buy/Sell</i>	P_C	P_D	τ	<i>h.p.</i>	R	R^*	$\Delta\beta_2^2$	Δc
547	<i>S</i>	132.29 \$	109.00 \$						
557	<i>B</i>	131.82 \$	109.20 \$	10	10	0.48%	0.54%	5%	13%
598	<i>S</i>	133.8 \$	109.11 \$						
609	<i>B</i>	132.43 \$	108.79 \$	11	11	0.81%	0.87%	3%	8%
604	<i>B</i>	134.28 \$	109.42 \$						
617	<i>S</i>	132.43 \$	109.98 \$	13	13	1.76%	2%	5%	13%
607	-	134.19 \$	109.12 \$	-	-	-	-	6%	15%
624	<i>B</i>	132.44 \$	108.66 \$						
629	<i>S</i>	132.01 \$	110.68 \$	13	13	1.67%	1.70%	5%	12%
638	-	138.79 \$	113.86 \$	-	-	-	-	14%	34%
641	-	139.27 \$	114.83 \$	-	-	-	-	34%	79%

Tabella 1.5: Operazioni eseguite sul portafoglio composto da una posizione lunga sul titolo C e una posizione corta sul titolo D

<i>time</i>	<i>Buy/Sell</i>	P_f	P_E	τ	<i>h.p.</i>	R	R^*	$\Delta\beta_2^3$	Δc
1248	<i>B</i>	132.29 \$	109.00 \$						
1260	<i>S</i>	131.82 \$	109.20 \$	6.12	12	0.28%	0.29%	5%	3%

Tabella 1.6: Operazioni eseguite sul portafoglio composto da una posizione lunga sul *future* e una posizione corta sull'ETF

(a) Portafoglio composto dai titoli A e B

<i>op.</i>	<i>\$suA</i>	<i>\$suB</i>	Δ \$	<i>Interessi</i>	<i>profitto</i>
1	-1 219 191 \$	572 504 \$	-646 687 \$	-513 \$	9 372 \$
2	1 201 544 \$	-543 775 \$	657 769 \$	261 \$	14 569 \$
3	-1 176 684 \$	541 412 \$	-635 272 \$	-252 \$	21 506 \$
4	-1 175 165 \$	541 530 \$	-633 635 \$	-377 \$	6 614 \$
5	-1 142 417 \$	514 259 \$	-628 158 \$	-249 \$	11 096 \$
6	-1 151 357 \$	518 566 \$	-632 791 \$	-126 \$	4 516 \$
7	-1 115 941 \$	497 039 \$	-618 902 \$	-614 \$	9 246 \$

(b) Portafoglio composto dai titoli C e D

<i>op.</i>	<i>\$suC</i>	<i>\$suD</i>	Δ \$	<i>Interessi</i>	<i>profitto</i>
1	1 322 858 \$	-796 795 \$	526 063 \$	1 045 \$	13 552 \$
2	1 337 965 \$	-797 597 \$	540 368 \$	1 181 \$	12 450 \$
3	1 342 828 \$	-799 879 \$	542 949 \$	1 402 \$	26 929 \$
4	1 324 443 \$	-794 297 \$	530 146 \$	526 \$	19 545 \$

(c) Portafoglio composto dal *future* e dall'ETF

<i>op.</i>	<i>\$suC</i>	<i>\$suD</i>	Δ \$	<i>Interessi</i>	<i>profitto</i>
1	-1 356 250 \$	1 299 345 \$	-56 905 \$	-136 \$	5 422 \$

Tabella 1.7: **Controvalore della posizione e interessi maturati**

lunga è maggiore di quello che si ottiene assumendo la posizione corta. Le operazioni contenute nella Tabella 1.4 (a) infatti, forniscono un esempio di interessi passivi dovuti al maggior ammontare della posizione lunga sul titolo A.

Vantaggi derivanti dalla strategia *long-short*

Il portafoglio costruito mediante questo modello rientra nella categoria delle strategie definite *long-short*. La Tabella 1.4 (b) invece, presenta gli interessi maturati effettuando operazioni in cui la posizione corta ha un controvalore maggiore. Inoltre la contemporaneità che caratterizza l'apertura e la chiusura delle posizioni sui due titoli che compongono il portafoglio, consente di conoscere in modo più o meno certo la dinamica degli interessi maturati alla conclusione dell'operazione.

Misurazione del rischio

Per completare la rilevazione dei risultati ottenuti mediante questo modello sono state utilizzate due misure di rischio, il *Value at Risk* e l'*Expected Shortfall*. Il *Value at Risk* è stato calcolato mediante due approcci:

1. Metodo delle Simulazioni Storiche

Questo approccio è stato sviluppato considerando tutte le osservazioni del

campione precedenti alla data di apertura della posizione. Con questi dati è stato costruito un *database* contenente n tassi di variazione giornaliera per i prezzi dei titoli che costituiscono il portafoglio. Le variazioni che hanno interessato i due titoli sono state considerate come possibili scenari del giorno successivo a quello in cui si sta effettuando la valutazione. Si dispone così di n scenari alternativi per quel che potrebbe succedere tra ‘oggi’ e ‘domani’. Per esempio lo scenario 1 è quello in cui i tassi di variazione del prezzo dei due titoli sono uguali a quelli registrati nel secondo giorno. Pertanto se p_t è il prezzo di uno dei due titoli alla fine del giorno t con $t = 0 \dots n$ allora il prezzo che il titolo assumerà domani, ossia alla fine del giorno $n + 1$, è pari nello scenario t a

$$p_n \frac{p_t}{p_{t-1}}.$$

Per ognuno degli n scenari è stata calcolata la variazione di valore del portafoglio. A questo punto si è optato per uno schema di ponderazione delle pesi di ogni osservazione. Questa scelta è dovuta alla volontà di dare più peso alle osservazioni più recenti poiché esse riflettono maggiormente le condizioni del mercato in termini di volatilità e di altri fattori di rischio. Lo schema di ponderazione utilizzato è quello in cui i pesi declinano in modo esponenziale. In termini analitici, il peso assegnato al primo scenario (costruito in base alle osservazioni più lontane) è pari a δ ($0 < \delta < 1$) volte il peso assegnato allo scenario 2. A sua volta, il peso assegnato allo scenario 2 è pari a δ volte il peso assegnato allo scenario 3, e così via. Affinché i pesi sommino a 1, il peso attribuito allo scenario t deve essere pari a

$$\frac{\delta^{n-t}(1 - \delta)}{1 - \delta^n}.$$

dove n è il numero degli scenari. Il VaR è stato stimato mettendo in ordine le variazioni di valore del portafoglio (rispetto al valore attuale) relative ai diversi scenari, dalla peggiore alla migliore. Iniziando dalla perdita più elevata, i pesi sono stati sommati fin quando non è stato raggiunto il 1° percentile. La variazione di valore corrispondente all’osservazione selezionata mediante la somma dei pesi rappresenta il VaR all’99%.

2. Metodo Montecarlo

Con questa tecnica è stata generata la distribuzione di probabilità delle variazioni di valore del portafoglio. Per fare questo abbiamo approssimato le variazioni del prezzo dei due titoli mediante un Moto Geometrico Browniano

a tempo discreto

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= \mu_1 p_1 \Delta t + \sigma_2 \epsilon_1 \sqrt{t} \\ \Delta p_2 &= \mu_2 p_2 \Delta t + \sigma_1 \epsilon_2 \sqrt{t}\end{aligned}\tag{1.11}$$

dove Δp_1 e Δp_2 rappresentano la variazione del prezzo del titolo 1 e del titolo 2 in un piccolo intervallo di tempo Δt , μ_1 e μ_2 sono i tassi di rendimento attesi dei titoli, σ_1 e σ_2 sono le volatilità dei due titoli e ϵ_1 ed ϵ_2 rappresentano delle estrazioni casuali da una normale bivariata standardizzata. Nello specifico i valori ϵ_1 ed ϵ_2 sono stati ottenuti mediante la Cholesky *decomposition*, in questo modo

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= x_1 \\ \epsilon_2 &= \rho x_1 + x_2 \sqrt{1 - \rho^2}\end{aligned}\tag{1.12}$$

dove x_1 e x_2 sono dei campioni indipendenti estratti da una normale univariata standardizzata, e ρ è la correlazione tra i rendimenti dei due titoli. I parametri μ , σ e ρ sono stati stimati utilizzando i rendimenti dei due titoli dall'inizio del *formation period* fino alla data dell'operazione. Per valutare il rischio relativo ad ogni posizione, sono state generate 1000 coppie di possibili variazioni (Δp_1 , Δp_2). In corrispondenza di ogni coppia è stata calcolata la variazione di valore del portafoglio rispetto al portafoglio valutato ai prezzi correnti. Successivamente è stata costruita la distribuzione di probabilità di tutte le variazioni rilevate. Il VaR giornaliero ad un livello di confidenza del 99% è pari al 1 percentile di questa distribuzione.

Individuato il VaR giornaliero, per calcolare tale misura su un orizzonte temporale pari all'*holding period* è stata utilizzata la formula

$$VaR_{\sqrt{h.p.}}$$

dove *h.p.* è l'*holding period* della posizione. Inoltre per calcolare il valore medio delle perdite eccedenti il VaR è stata utilizzata una terza misura di rischio, l'*Expected Shortfall*. Tale misura è stata scelta per tenere in considerazione eventuali accumuli di probabilità sotto la coda sinistra, quindi in corrispondenza di perdite caratterizzate da ammontari estremi.

(a) Portafoglio composto dai titoli A e B

<i>op.</i>	MC_g	ES_{MC}	SS_g	ES_{SS}	<i>h.p.</i>	MC_{hp}	SS_{hp}
1	16 342 \$	18 258 \$	17 461 \$	19 167 \$	4	32 684 \$	34 922 \$
2	14 187 \$	16 248 \$	17 017 \$	19 039 \$	4	28 374 \$	34 034 \$
3	15 749 \$	17 944 \$	17 612 \$	18 390 \$	4	31 499 \$	35 223 \$
4	15 779 \$	18 009 \$	17 587 \$	18 368 \$	4	31 559 \$	35 174 \$
5	15 287 \$	17 614 \$	16 426 \$	17 835 \$	4	30 574 \$	32 851 \$
6	15 499 \$	17 853 \$	17 214 \$	17 975 \$	4	30 998 \$	34 429 \$
7	15 014 \$	17 322 \$	16 183 \$	17 413 \$	5	33 572 \$	36 186 \$

(b) Portafoglio composto dai titoli C e D

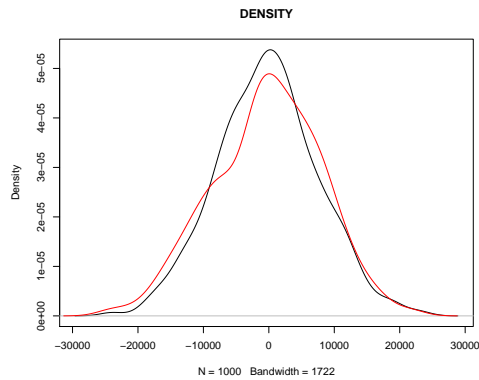
<i>op.</i>	MC_g	ES_{MC}	SS_g	ES_{SS}	<i>h.p.</i>	MC_{hp}	SS_{hp}
1	17 528 \$	20 258 \$	22 129 \$	23 740 \$	10	55 431 \$	69 977 \$
2	17 486 \$	20 187 \$	18 020 \$	20 593 \$	11	57 996 \$	59 766 \$
3	17 513 \$	20 218 \$	17 216 \$	20 461 \$	13	63 145 \$	62 073 \$
4	17 411 \$	20 157 \$	17 120 \$	20 153 \$	14	65 148 \$	61 725 \$

(c) Portafoglio composto dal *future* e dall'ETF

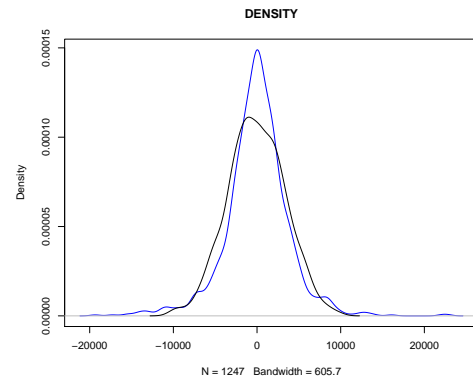
<i>op.</i>	MC_g	ES_{MC}	SS_g	ES_{SS}	<i>h.p.</i>	MC_{hp}	SS_{hp}
1	8 311 \$	9 461 \$	14 007 \$	15 948 \$	12	28 791 \$	48 522 \$

Tabella 1.8: **Valutazioni del rischio assunto su ogni posizione aperta**

La Tabella 1.8 riporta le stime per ciascuna delle posizioni aperte, sia quelle ottenute mediante l'approccio Montecarlo (MC_g) che quelle realizzate mediante il metodo delle simulazioni storiche (SS_g). Tali misure sono state calcolate anche per l'*holding period* (*h.p.*) della posizione ($MC_{h.p.}$, $SS_{h.p.}$), ottenendo una valutazione del rischio per l'intervallo di tempo in cui si attende la *mean reversion* del processo. La Tabella 1.8 riporta inoltre l'*Expected Shortfall* calcolata sulle distribuzioni costruite mediante i due approcci descritti (ES_{MC} , ES_{SS}). Per quanto riguarda il VaR di ogni operazione, rileviamo una tendenza a sovrastimare il rischio da parte dell'approccio basato sul metodo delle simulazioni storiche. Da questo punto di vista sono particolarmente rappresentative le stime relative all'operazione 1 eseguita nel *trading period* del campione 2 e a quella (l'unica) eseguita nel *trading period* del campione 3. Come mostrato dalla Figura 1.4, la coda sinistra della distribuzione empirica (colore rosso e colore blu), in tutti e due i casi, tende a esser più spessa di quella ottenuta mediante l'approccio Montecarlo. Anche se in misura ridotta tale evidenza tende a riproporsi per ciascuna delle misurazioni effettuate, questo probabilmente è dovuto alla differente numerosità di realizzazioni con cui sono state costruite l'una e l'altra distribuzione (ricordiamo che con il metodo Montecarlo le variazioni di valore simulate sono 10000). La seconda evidenza più



(a) Prima posizione assunta nel *trading period* del campione 1



(b) Posizione assunta nel *trading period* del campione 3

Figura 1.4: **Distribuzione delle perdite**

significativa riguarda l'*Expected Shortfall*. In tal senso, la misurazione effettuata in corrispondenza della prima operazione avvenuta nel *trading period* del campione 2 rileva un notevole differenza tra le due distribuzioni. L'*Expected Shortfall* misurata mediante la distribuzione empirica mostra infatti un accumulo di densità in corrispondenza di perdite caratterizzate da valori più estremi. Pertanto sembra esser stata una scelta avveduta calcolare il valore medio delle perdite eccedenti il VaR utilizzando la distribuzione empirica. Gli scenari passati infatti, sottolineano il rischio che in una situazione negativa, esista una probabilità maggiore rispetto a quanto stimato con il metodo Montecarlo che incorrendo in perdite superiori al VaR, in media queste siano maggiori.

Conclusioni

Alla luce del diffondersi di strategie di mercato basate sull'econometria applicata e su particolari relazioni tra i prezzi di asset finanziari, questo lavoro ha voluto fornire un contributo all'analisi della profittabilità e dell'applicabilità di uno di questi modelli. Lo studio si è focalizzato sul ruolo della relazione di cointegrazione nello sviluppo di una strategia di *Pair Trading*. Si è fatto questo perseguendo un duplice obiettivo. Da un lato è stata curata la costruzione di un vero e proprio modello operativo basato su strumenti di econometria finanziaria. Dall'altro questo modello è stato messo alla prova valutandone aspetti che vanno oltre la capacità di ottenere risultati positivi. Pertanto nel corso della trattazione è stato illustrato in modo sequenziale l'utilizzo degli strumenti econometrici necessari alla costruzione della strategia. Mediante tecniche di simulazione apposite sono stati generati due campioni idonei ai nostri scopi, un terzo è stato ottenuto da quotazioni reali. Su questi sono stati implementati test econometrici che ci hanno consentito di individuare la presenza relazioni di cointegrazione tra le serie contenute in ogni campione. Stimato il vettore di cointegrazione ne è stata illustrata l'applicabilità nell'ambito di una strategia di *Pair Trading*. I dati raccolti in questo modo ci hanno consentito di stimare dei parametri utili a definire delle vere e proprie regole operative su cui basare l'apertura e la chiusura di posizioni. Definite tali regole, il modello è stato applicato sui dati simulati e sul campione reale, procedendo ad un *Back Testing* della strategia. La valutazione ha condotto ad evidenze interessanti. Dal punto di vista della gestione del portafoglio il modello ha ottenuto risultati positivi. Nonostante la sua applicazione sia avvenuta in un contesto privo di frizioni tipiche del mercato reale, la strategia è stata in grado di ottenere un rendimento positivo, con rischi accettabili. Tuttavia il software econometrico utilizzato nella fase di sviluppo ha permesso e indotto un'ulteriore considerazione. Infatti al netto di quelli economici, i risultati dell'applicazione da un punto di vista econometrico sollevano problematiche di non poco conto. In tal senso, i profitti ottenuti nel secondo e nel terzo campione non sono stati realizzati tramite il risultato econometrico più importante, ossia la *mean reversion* del processo ottenuto sfruttando la relazione di cointegrazione. In questi due casi l'identificazione del vettore di cointegrazione

non è stata sufficiente a ottenere un modello operativo automatico che funzionasse in modo fedele allo schema teorico fondante.

Se da un lato quest'ultima evidenza fornisce lo stimolo per un miglioramento dello schema operativo dall'altro ci ripone davanti all'interrogativo in merito alla capacità di comprendere e "battere" le dinamiche (potremmo dire sempre meno governabili) del mercato reale. Nonostante l'utilizzo di strumenti econometrici possa garantire una credibilità più consistente rispetto a strategie basate sul *sentiment* o su altri fattori scarsamente teorizzabili (o se teorizzabili più semplicistici), più volte nello sviluppo del modello si è dovuto prendere atto della scarsa potenza di alcuni test o affidarsi alla stabilità di alcune relazioni. Pertanto il risultato fondamentale è dato dalla completa teorizzazione del modello e dall'identificazione di alcuni punti critici che, alla luce dello stato dell'arte di alcune tecniche di stima, possono costituire il punto di partenza per una sua evoluzione.

Bibliografia

- [1] ALEXANDER, C. (2008), *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics*, John Wiley & Sons;
- [2] ALEXANDER, C. e DIMITRIU A. (2005), *Indexing, cointegration and equity market regimes*, International Journal of Finance and Economics, 10, pp. 213-231;
- [3] BROCKWELL, P. J. e DAVIS, R. A. (1991), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, 2a ed.;
- [4] CAMPBELL, J. Y. e PERRON, P. (1991), *Pitfalls and opportunities: What macroeconomists should know about unit roots*, in NBER *Macroeconomics Annual 1991*, pp. 141-201, MIT Press;
- [5] DIXIT, A.K. e PINDYCK R.S. (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994, pp. 468;
- [6] DICKEY, D.A. E FULLER W.A. (1979), *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Journal of the American Statistical Association, 74, pp. 427-431.
- [7] ENGLE, R. F. e GRANGER, C. W. J. (1987), *Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing*, Econometrica, 55 , pp. 251-276;
- [8] FUSS, R. e DIETER K. (2007), *The tactical and strategic value of hedge fund strategies: a cointegration approach*, Journal of Financial Markets and Portfolio Management, 21, 2007, pp. 425-444;
- [9] GIANNINI, C. (1992), *Cointegrazione*, Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Sett.-Dic. 1991, v. 50, pp. 479-498;
- [10] HERLEMONT, D. (2004), *Pairs Trading, Convergence Trading, Cointegration*, YATS Finances & Technologies;

- [11] HULL, J. C. (2008), *Risk Management e Istituzioni Finanziarie*, Pearson;
- [12] HULL, J. C. (2011), *Options Futures and Other Derivatives*, Pearson, 8a ed.;
- [13] JOHANSEN, S. (1995), *Maximum Likelihood Inference in Co-Integrated Vector Autoregressive Processes*, Oxford University Press;
- [14] KLOEDEN, P.E. e PLATEN E. (1992), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992, pp. 636;
- [15] LEYBOURNE, S. J. e MCCABE, B. P. M., (1989) *Testing for Coefficient Constancy in Random Walk Models with Particular Reference to the Initial Value Problem*, Empirical Economics, Springer, vol. 14(2), pp. 105-112.
- [16] LUTKEPOHL, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag;
- [17] LUTKEPOHL, H. e KRATZIG, M. (2004), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press;
- [18] MADDALA, G. e KIM, I. (1998), *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press;
- [19] PFAFF, B., (2010), *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*, Springer New York, 2a ed.;
- [20] PHILLIPS, P. C. B. (1994), *Some Exact Distribution Theory for Maximum Likelihood Estimators of Cointegrating Coefficients in Error Correction Models*, Econometrica, 62 , pp. 73-93;
- [21] RAMPERTSHAMMER S. (2007), *An Ornstein-Uhlenbeck Framework for Pairs Trading*, Department of Mathematics and Statistics the University of Melbourne;
- [22] SCHWERT G. W. (1989), *Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation*, Journal of Business and Economic Statistics, 2, pp. 147-159 ;
- [23] TSAY, R. S. (2010), *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, 3a ed.;
- [24] VIDYAMURTHYV G. (2004), *Pairs Trading, Quantitative Methods and Analysis*, John Wiley Sons.