DIPARTIMENTO DI IMPRESA E MANAGEMENT

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN ECONOMIA E MANAGEMENT

CATTEDRA DI MATEMATICA FINANZIARIA

Arbitraggi e Put-Call Symmetry per le currency options

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa

Gaia BARONE

Candidato:

Ilario CIANCI

matr. 187641

ANNO ACCADEMICO 2016-2017

Indice

Premessa

Questo lavoro si propone di individuare le opportunità di arbitraggio nel mercato delle *currency options,* che si realizzano quando vengono violati alcuni principi che ne garantiscono l'assenza e che saranno oggetto di analisi sia sotto profilo dei presupposti teorici che dei risvolti applicativi.

Il lavoro si apre con un capitolo introduttivo contenente una panoramica sui derivati, sulla tipologia di contratti (*futures*, *swaps*, *options*), sui loro principali ambiti di applicazione, come *hedging*, speculazione, soffermandosi più nello specifico sulle opzioni, esplorandone in particolare la definizione, i mercati di scambio e la tipologia, e sul concetto di arbitraggio, evidenziando l'evoluzione storica del concetto e le connotazioni di "immediatezza" e "assenza di rischio" che lo caratterizzano.

Il secondo capitolo concerne un'analisi più approfondita delle opzioni, andandone ad analizzare le variabili d'influenza per i relativi prezzi e le fondamenta teoriche fornite dai teoremi di Merton (1973), mettendo in evidenza in che modo i limiti superiori ed inferiori individuati per il prezzo delle opzioni siano legati al concetto di arbitraggio. Segue poi l'illustrazione della relazione di *put-call parity*, sia in assenza che in presenza di costi di transazione, mostrando le conseguenze che ne derivano in ambito di arbitraggi. Vengono inoltre esplorate le relazioni generali di arbitraggio quali *hedge relation*, *butterfly spread relation* e *bull spread relation*, tramite formulazioni analitiche per la loro verifica, la cui violazione dà spazio a strategie operative che, se opportunamente sfruttate, consentono di conseguire un guadagno immediato e privo di rischio. Verrà poi presentato un espediente matematico per verificare con più facilità il rispetto delle suddette formule. La parte finale del capitolo è dedicata all'*option pricing:* viene quindi esposta la formula di Black-Scholes-Merton, mostrate le ipotesi che vi sottendono e che consentono di raggiungere un elevato grado di semplicità (sono quattro i valori rilevati e uno quello stimato) e applicazione concreta. Viene in ultimo presentata una criticità della formula di valutazione delle opzioni, individuata da Buffett e presentata in una sua lettera agli azionisti di Berkshire Hathaway Inc. tramite un esempio eloquente.

Il terzo ed ultimo capitolo sviluppa la relazione di *put-call simmetry* (PCS) per le opzioni, la cui paternità è attribuita a Bates (1988) e più nel dettaglio per le opzioni su valuta, considerando però sottostanti che pagano dividendi (intesi come la remunerazione della detenzione di valuta estera). Viene inoltre analizzato un caso particolare della suddetta relazione, individuato da Peter Carr (1994), ed esteso alle opzioni americane facendo riferimento ai lavori di Peter Carr e Marc Chensey (1996). E' inoltre presentata la relazione di *put-call transformation* facendo riferimento al lavoro di Haug (1999) e mostrando come le relazioni individuate siano espressione del medesimo concetto, calato in contesti con ipotesi diverse.

Il lavoro si conclude con un'applicazione della PCS, proponendo, dopo una breve introduzione riguardo le opzioni esotiche, strategie di *hedging statico* sia con opzioni *plain vanilla* che opzioni fuori *standard* di tipo *down-and-in*, sia in presenza che in assenza di *cost of carry*.

1. Introduzione

1.1 Derivati: Forwards, Swaps e Opzioni

L'utilizzo dei derivati negli ultimi 40 anni è cresciuto esponenzialmente; infatti, il mercato dei derivati è oramai, in termini di valore dell'attività sottostante, più grande di quello azionario e costituisce un «multiplo del prodotto interno lordo mondiale»[1]. Nonostante essi abbiano acquisito una particolare rilevanza specialmente a partire dalla seconda metà del secolo scorso, in realtà gli strumenti derivati possono essere considerati «semi sotto la neve», come definiti dal premio Nobel Merton H. Miller[2], poiché se la loro esistenza si è palesata in maniera accentuata solo in tempi recenti, al contrario, la loro presenza affonda radici profonde nella storia e che possiamo far risalire perfino ai tempi avanti Cristo. Si consideri ad esempio il celeberrimo aneddoto di Talete che Aristotele nel 580 a.c. inserisce nella sua opera[3]:

> [...] siccome, povero com'era, gli rinfacciavano l'inutilità della filosofia, avendo previsto in base a calcoli astronomici un'abbondante raccolta di olive, ancora in pieno inverno, pur disponendo di poco denaro, si accaparrò tutti i frantoi di Mileto e di Chio, per una cifra irrisoria, dal momento che non ve n'era alcuna richiesta; quando giunse il tempo della raccolta, cercando in tanti urgentemente tutti i frantoi disponibili, egli li affittò al prezzo che volle imporre, raccogliendo così molte ricchezze e dimostrando che per i filosofi è molto facile arricchirsi, ma tuttavia non si preoccupano di questo.

Questo breve aneddoto, tradotto in chiave moderna, nasconde la definizione del contratto di opzione: infatti, il contratto stipulato da Talete prevede l'acquisto del diritto di utilizzare un bene (i frantoi) ad una determinata data (la stagione della raccolta delle olive) ad un prezzo determinato (il costo di affitto dei frantoi) pagando un premio, che corrisponde al compenso che si paga al venditore dell'opzione per acquisire il diritto di vendere o comprare il bene e che nel caso di Talete coincide con il «poco denaro» da lui corrisposto. In particolare, se Talete decidesse di utilizzare i frantoi nonostante si sia avverata la sua previsione, esercitando così di fatto una *call*, il relativo costo di utilizzo coinciderebbe con il prezzo di mercato a cui si sarebbero potuti affittare, ossia il costo opportunità, pur essendo stato il reale esborso monetario, ossia il premio, irrisorio. Viceversa, qualora il filosofo decidesse di affittare i frantoi, egli di fatto eserciterebbe una *put*, ottenendo come ricavo il corrispettivo prezzo di mercato, superiore al premio pagato.

Un esempio più recente e sicuramente vicino ai giorni nostri è rappresentato dalla "bolla speculativa" dei tulipani (*tulipanomania*) occorsa nel 1600 in Olanda che, a causa della speculazione su *futures* e opzioni, portò nel 1635 i bulbi di tulipani a prezzi *record*, sino a 6000 fiorini per il famoso bulbo *Semper Augustus* venduto ad Haarlem[4]. Questo rappresenta il primo vero *crack* finanziario della storia economica, causato dall'utilizzo degli strumenti derivati.

---

[1] HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015 (p.1)
[2] Si veda MERON, Miller, *"Derivatives"*, ed. Wiley Investment, 1997
[3] ARISTOTELE, *La Politica*, libro I, Monandori, I Classici del Pensiero, p.496, n.11, aprile 2008
[4] Si confronti sul tema: DASH, Mike, *Tulipomania: The Story of the World's Most Coveted Flower and the Extraordinary Passions It Aroused*.

Volendo dare una definizione di tali strumenti, possiamo asserire che i derivati sono contratti il cui valore dipende (ossia *"deriva"*) da una o più "variabili sottostanti" (*underlying variables*) che possono essere, a titolo esemplificativo e non esaustivo, azioni, valute, tassi d'interesse, merci, elettricità (*energy derivatives*), condizioni climatiche (*weather derivatives*), pagamenti dei sinistri assicurati (*insurance derivatives*). Dunque, per loro natura, questi contratti consentono di porre in essere strategie di copertura, di speculazione e, ovviamente, di arbitraggio.

I principali derivati sono:

1. *Forwards e Futures*;
2. *Swaps*;
3. Opzioni;

I contratti *forwards* (*"a termine"*) sono accordi per comprare o vendere un'attività ad una certa data futura, ad un prezzo prestabilito, e si differenziano dai contratti *futures* perché invece di essere trattati in borsa, e dunque essere standardizzati, sono scambiati in mercati fuori borsa, *Over the Counter* (OTC). In questi contratti, una delle parti assume una *posizione lunga* (*long position*) impegnandosi a comprare il sottostante ad una specifica data, l'altra, al contrario, si impegna a vendere il sottostante ad una specifica data al prezzo prefissato, assumendo una *posizione corta* (*short position*).

Il valore finale (*payoff*) di un contratto *forward* lungo scritto su una quantità unitaria dell'attività sottostante è $S_T - K$, dove K è il prezzo di consegna (*delivery price*) e S_T è il prezzo *spot* dell'attività alla scadenza del contratto.

Gli *swaps* sono invece contratti negoziati nei mercati OTC in cui le controparti si impegnano a scambiarsi dei futuri pagamenti. Il contratto, oltre a definire lo scadenzario secondo il quale avverranno i pagamenti, definisce anche le modalità in cui questi sono calcolati. Solitamente, essi dipendono dal valore futuro di un tasso di interesse, tasso di cambio o qualche altra variabile di mercato.

Nei *swaps* sui tassi di interesse (*interest rate swaps*), una parte si obbliga a corrispondere all'altra un tasso fisso predeterminato, per un certo periodo e calcolato in base ad un capitale di riferimento detto «capitale nozionale» (*notional principal*). A sua volta, la controparte si impegna a pagare un tasso di interesse variabile sullo stesso capitale, per lo stesso intervallo di tempo. Per la valutazione di tali strumenti, si debbono attualizzare i pagamenti previsti al tasso di interesse privo di rischio. Questi sono spesso utilizzati come strumenti per pagare interessi fissi pur avendo contratto obbligazioni a tassi variabili. Si può infatti stipulare un contratto di *interest rate swap* avente come nozionale di riferimento un capitale pari al valore di rimborso dell'obbligazione, e agganciarlo allo stesso parametro cui l'obbligazione a tasso variabile stessa si riferisce, assicurandosi che la durata dello *swap* e lo scadenziario di riscossione dei tassi siano i medesimi di quelli previsti dall'obbligazione. Così facendo, assumendo una posizione lunga sullo *swap* (*buyer swap*) si riceverà il pagamento dell'interesse variabile contro il pagamento di un interesse fisso stabilito al momento della contrattazione. Sommando le posizioni su entrambi i contratti, obbligazionario e *swap*, l'operatore si troverà ad usufruire del finanziamento come se lo avesse contratto a tassi fissi.

Negli *swaps* su valute (*currency swaps*), invece, le parti si impegnano a scambiarsi al momento della contrattazione due somme di denaro denominate in valute differenti, con l'obbligo a effettuare una successiva e opposta operazione di scambio alla scadenza del contratto, sotto le stesse condizioni iniziali, ed in particolare allo stesso tasso di cambio iniziale.

1.1.2. Opzioni: definizione, mercati, tipologia

Il contratto di opzione, come già anticipato in precedenza in riferimento all'aneddoto di Aristotele, è un contratto che dà al possessore la facoltà di esercitare un diritto, di acquisto o vendita, su una certa attività sottostante, in determinate condizioni prefissate (come il prezzo), entro o alla scadenza di una specifica data.

I contratti di opzione sono negoziati sia nei mercati regolamentati che nei mercati OTC e possono essere classificati in due tipologie:

1. Opzioni *call* (*call options*): danno al portatore il diritto di comprare un'attività entro (ad) una certa data, per un certo prezzo.
2. Opzioni *put* (*put options*): danno al portatore il diritto di vendere un'attività entro (ad) una certa data, per un certo prezzo.

Il prezzo indicato nel contratto è detto prezzo d'esercizio (s*trike price*), la data indicata nel contratto è detta data di scadenza o di estinzione (*expiration date* o *maturity*).

Le opzioni possono essere ulteriormente classificate in:

1. Opzioni europee (*European options*): possono essere esercitate solo alla scadenza;
2. Opzioni americane (*American options*): possono essere esercitate in qualsiasi momento della loro vita economica.

Le opzioni possono avere come attività sottostante azioni, valute, indici e *futures*. Solitamente le opzioni negoziate in borsa scritte su azioni sono americane ed hanno un sottostante di 100 azioni; le principali borse che trattano opzioni sono la *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), il *NYSE Euronext*, *International security Exchange* e la *Boston Options Exchange*.

Le opzioni su valute (*currency options*) sono trattate principalmente nei mercati OTC, tuttavia esistono dei mercati di borsa tra cui Nasdaq OMX che trattano opzioni europee su diverse valute scritte su 10.000 unità di valuta estera. Nei mercati OTC esiste inoltre un'ampia varietà di prodotti fuori *standard* creati dagli ingegneri finanziari: sono chiamati *opzioni esotiche* (*exotic options*), realizzate per rispondere a genuine esigenze di copertura, di tipo fiscale, contabile o legale.

Nel presente lavoro verranno presi in considerazione prevalentemente i prodotti *standard* (*plain vanilla*), avendo caratteristiche ben definite ed essendo negoziate attivamente, si farà riferimento invece a prodotti esotici solamente verso la parte finale della trattazione.

Il valore di un'opzione può essere distinto in *valore intrinseco* e *valore temporale*. Il primo coincide con l'importo che si riceve esercitando l'opzione. Esso si può determinare in maniera agevole, sottraendo lo *strike* al valore corrente del sottostante, o viceversa, a seconda che si tratti di *call* o *put*. Il valore intrinseco può essere positivo o nullo, ma mai negativo per via della caratteristica di diritto, facoltà e non di obbligo, dell'opzione.

In funzione del valore intrinseco, e dunque della relazione tra prezzo sottostante e d'esercizio, un'opzione può essere classificata *in-the-money*, *at-the-money* o *out-of-the-money*. I *payoffs* di un'opzione *call* o *put* europea a seconda delle posizioni possono essere così sintetizzati:

- *Call* lunga: max ($S_T - K$; 0); (*figura 1*)
- *Put* lunga: max ($K - S_T$; 0); (*figura 2*)
- *Call* corta: -max ($S_T - K$; 0) = min ($K - S_T$, 0); (*figura 1*)
- *Put* corta: -max ($K - S_T$; 0) = min ($S_T - K$,0); (*figura 2*)

Figura 1

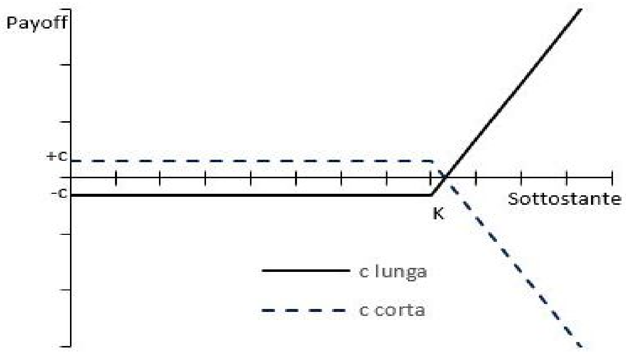
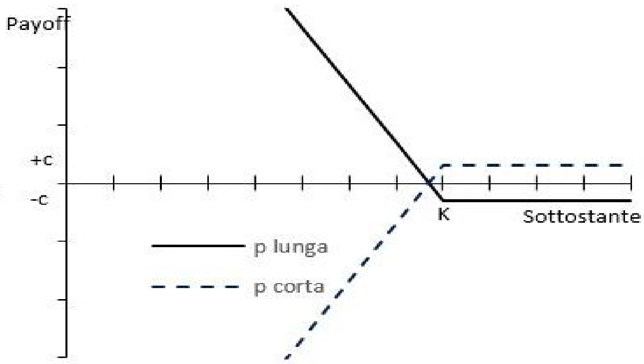


Figura 2



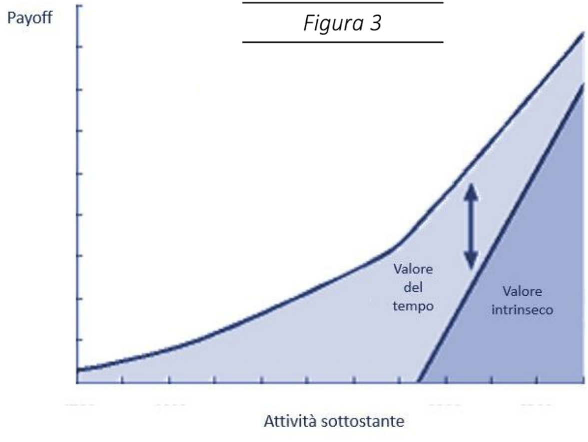
Le formule riflettono il fatto che l'opzione verrà esercitata solo se il prezzo del sottostante alla scadenza (S_T) sarà maggiore (nel caso della *call*) o inferiore (nel caso della *put*) allo *strike* (K).

Il valore del tempo o *time value* dell'opzione è il sovraprezzo, rispetto al valore intrinseco, che il detentore di un'opzione è disposto a pagare nella speranza di ottenere maggiori guadagni futuri, «in altre parole è la probabilità che l'opzione possa comunque assumere, entro la data di scadenza, un valore intrinseco positivo o, nel caso abbia già un valore intrinseco positivo (*in-the-money*), la probabilità che questo aumenti, incrementando il guadagno dell'investitore»[5]. Il *time value* dipende da alcuni fattori di mercato quali:

1. i tassi di interesse;
2. la vita residua dell'opzione;
3. il rendimento atteso associato al sottostante;
4. la volatilità attesa con riferimento ai prezzi futuri del sottostante.

Quando un'opzione è *in the money*, il valore di mercato include sia il valore temporale che il valore intrinseco, se invece è *at-the-money* o *out-of-the-money* il valore di mercato delle opzioni coincide con il valore del tempo che raggiunge il suo massimo quando è *at-the-money*, come mostrato dalla *figura 3*[6].

Figura 3



[5] http://www.ansa.it/sito/notizie/economia/finanza_personale/static/coveredwarrant4.html
[6] http://www.colombaborsa.it/Derivatididattico.htm

1.2. Hedging, speculazione e arbitraggio

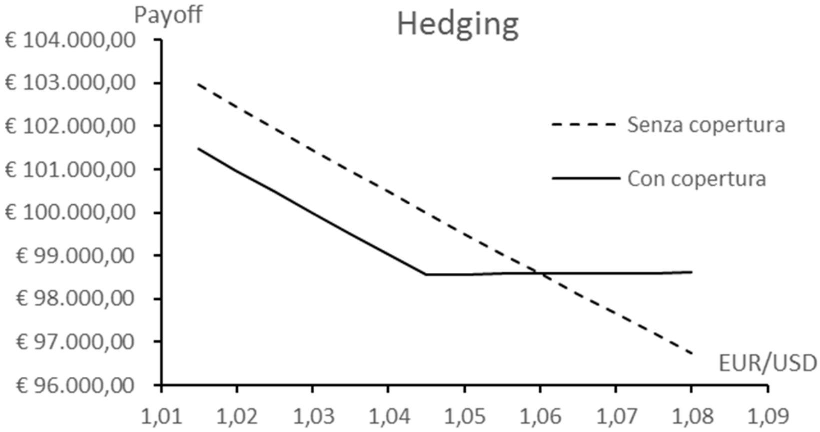
I derivati hanno avuto uno straordinario successo negli ultimi anni dovuto alla loro capacità di essere utilizzati come strumenti utili ai fini del conseguimento di profitti o di riduzione dei rischi delle più disparate operazioni, come copertura (*hedging*), speculazione e arbitraggio.

L'*hedging* è una strategia finalizzata a tutelare un investimento a termine da possibili imprevisti, quali per esempio fluttuazioni di valuta o di prezzo. I derivati, e quindi le opzioni sono uno strumento utile per strategie di copertura, come illustrato dall'*esempio 1.2.1*.

Esempio 1.2.1.
Supponiamo che un investitore detenga \$104.495 nel proprio portafoglio, che, al tasso di cambio EUR/USD di 1,04495, equivalgono, al periodo 0 (t = 0), a €100.000. Egli teme che nel periodo 1 (t = 1) il dollaro si indebolisca, facendo salire il tasso di cambio, e dunque, per coprirsi da tale rischio, decide di acquistare una *currency option* europea di tipo *call* scritta su €100.000 con uno *strike* pari a 1,04495 (K = \$/€1,04495). Ipotizziamo che il premio pagato per l'opzione sia \$0,015 per €1, per un totale di \$1.500.

Si possono prefigurare 4 scenari:

1. Il tasso di cambio EUR/USD alla scadenza è superiore alla somma del tasso di cambio iniziale più il premio pagato per l'acquisto della call (ossia 1,05995): in tal caso l'opzione è *in the money* e l'investitore è ben felice di aver acquistato la *call*, potendola così esercitare allo *strike* di \$/€ 1,04495. Acquisterà così €100.000 al prezzo di \$104.495, e, riconvertendoli al nuovo tasso di cambio, otterrà un numero di dollari maggiori della somma tra \$104.495 e il premio pagato di \$1.500; la differenza tra questi due valori è proprio il profitto.
2. Il nuovo tasso di cambio è maggiore di quello iniziale, ma inferiore alla somma del tasso iniziale più il premio pagato. In tal caso è conveniente ugualmente esercitare la *call* una volta comprata, per coprire almeno parzialmente il costo fisso, ossia il premio pagato.
3. Il tasso di cambio EUR/USD alla scadenza è inferiore al tasso di cambio iniziale, e quindi la *call* non viene esercitata poiché è *out of the money*, ed è pertanto più conveniente eseguire la transazione al prezzo di mercato.
4. Il tasso di cambio EUR/USD alla scadenza è uguale a quello iniziale: in tal caso le opzioni sono *at the money* e l'investitore è indifferente tra il loro esercizio o meno.



Il grafico mostra il p*ayoff* del portafoglio dell'investitore in assenza o in presenza di copertura. È importante tenere presente che il costo delle opzioni, nel calcolo del *payoff*, deve essere aggiornato al nuovo tasso di cambio corrente periodo per periodo.

Un ulteriore ambito di utilizzo dei derivati è la *speculazione*, ossia un'operazione volta a realizzare un profitto in base alla differenza tra i prezzi attuali e quelli futuri previsti. Un classico esempio è rappresentato dalle opzioni su azioni, come illustrato dall'*esempio 1.2.2*.

Esempio 1.2.2

Supponiamo che uno speculatore abbia a disposizione €2000 da investire e, prevedendo che le azioni IBM saliranno nel prossimo futuro e che non pagheranno dividendi, decide di investire in opzioni europee di tipo *call* aventi uno *strike* di €100, coincidente con l'attuale quotazione sul mercato, per sfruttare l'effetto leva che tale derivato consente di ottenere. Il prezzo corrente delle opzioni *call* è di €2 ad azione, ossia €200 per opzione, pertanto egli decide di assumere una posizione lunga su 10 *calls* in $t = 0$.

Immaginando uno scenario favorevole per lo speculatore in cui il nuovo prezzo al periodo $t = 1$ sia €105, possiamo facilmente individuare l'effetto leva che le opzioni permettono di sfruttare:

1. In $t = 1$ lo speculatore esercita le opzioni *in the money*, acquistando al prezzo di €100 una quantità di 1.000 titoli (100 titoli per ogni *call*) e, rivendendoli immediatamente sul mercato al prezzo corrente di €105, consegue un profitto di €3.000 (€5.000 di margine a cui sono sottratti i €2000 di premio)[7];
2. Se lo speculatore avesse comprato le azioni invece di acquistare le opzioni, in $t = 0$ avrebbe potuto acquistare solamente 20 azioni e, rivendendole in $t = 1$ al prezzo di €105, avrebbe conseguito un guadagno di soli €100.

Ovviamente, qualora il prezzo fosse sceso al di sotto dello *strike*, le opzioni sarebbero scadute prive di valore, comportando una perdita dell'intero capitale, evento che non si verificherebbe nel caso di acquisto di azioni, se non nella remota eventualità che le azioni IBM scendano ad un prezzo nullo.

Così come per *l'hedging* e per l'arbitraggio, oltre alle opzioni, anche altri derivati come i *futures* possono offrire diversi spunti per attuare strategie di speculazione, scommettendo sulla crescita o la diminuzione del prezzo dell'attività sottostante.

Il terzo ambito di applicazione in cui i derivati giocano un ruolo rilevante è l'*arbitraggio*: questo verrà discusso più nel dettaglio nel paragrafo seguente.

1.2.1. Arbitraggio: definizione ed esempi

L'arbitraggio nell'accezione moderna è un'operazione finanziaria che consiste nel «bloccare un profitto privo di rischio entrando simultaneamente in transazioni su due o più mercati»[8]. Un'ulteriore definizione è fornita da Hal Varian, Class of 1944 Professor della School of Information

[7] Nel caso di acquisto di opzioni si assume implicitamente che lo speculatore al periodo T=1 possa prendere in prestito per un tempo infinitesimale la somma di €100.000 per restituirla successivamente alla vendita dei titoli al mercato al prezzo di €105, pagando un interesse che approssimiamo a 0.

[8] HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati,* Pearson Education Italia, p.17, 9ª ed., gennaio 2015.

Management and Systems a Berkeley, che, nel suo articolo “Principio di Arbitraggio nell’Economia Finanziaria”[9], definisce l’arbitraggio (qui riportato nella traduzione di Gaia Barone[10]) come una «transazione che non comporta esborsi di denaro ma consente di realizzare un profitto privo di rischio».

Per illustrare in maniera più vivida e comunicativa il concetto, è riportata di seguito la parte iniziale del suo articolo (riportata nella traduzione di Massimo De Felice e Franco Moriconi[11]):

> «Alla fermata di un autobus, un contadino propone ad un professore un gioco:
>
> “Io faccio una domanda” – dice il contadino – “e se tu non sai rispondere paghi un dollaro. Quindi sarai tu a fare la domanda e se non saprò rispondere pagherò io un dollaro”.
>
> “È interessante” – ribatté il professore – “ma debbo avvertirti che non sono una persona di cultura comune, io sono un professore di economia”.
>
> “Se è così” – replicò il contadino- “dobbiamo cambiare regola: se tu non rispondi alla mia domanda mi pagherai un dollaro, ma se sarò io a non rispondere alla tua domanda ti darò soltanto mezzo dollaro”.
>
> “Mi sembra una soluzione equa” - disse il professore.
>
> “Bene” – iniziò il contadino – “ecco la mia domanda: qual è la cosa che sale la collina con sette gambe e la scende con tre?”
>
> “Non so” – disse il professore dopo aver pensato per un po’ – “Cos’è che sale la collina con sette gambe e la discende con tre?”
>
> “Bene” – concluse il contadino – “neanch’io so rispondere; comunque tu devi dare a me un dollaro, io debbo darti cinquanta cent!”.»

Ciò che emerge chiaramente dal breve racconto è che il punto chiave della moderna definizione di arbitraggio consiste nell’essere “privo di rischio”, tuttavia questa componente nel corso della storia, come già è stato individuato[12], non è sempre stata esplicitamente evidenziata. Si consideri per esempio la definizione di arbitraggio nell’omonima voce della Enciclopedia Treccani[13] (1929) curata dall’economista matematico Luigi Amoroso (1886-1960):

> **ARBITRAGGIO** (fr. arbitrage; sp. arbitraje; ted. arbitrage; ing. arbitration). - Gli arbitraggi sono operazioni di speculazione che si compiono su divisa estera, su metalli preziosi, su merci.

I concetti di “speculazione” e “arbitraggio” non sembrano essere chiaramente distinti, al contrario, appaiono avvolti nella medesima definizione, attribuendo così all’arbitraggio, almeno apparentemente, quella dose di rischio, propria della speculazione, di cui in realtà è sprovvisto. In verità, in una successiva parte della voce è presente un tentativo di differenziare le due operazioni, cercando di delineare i tratti che più propriamente contraddistinguono l’arbitraggio:

> Non tutte le speculazioni sui prezzi sono peraltro operazioni di arbitraggio. […] Perché un'operazione di compra-vendita possa considerarsi operazione di arbitraggio, è pertanto necessario che si verifichino le due condizioni seguenti:

[9] Si veda VARIAN, Hal R., “The Arbitrage Principle in Financial Economics”, *Economic Perspectives*, Vol.1, No.2, pp55-72, Fall 1987.

[10] Si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, p.15.

[11] Si veda DE FELICE, Massimo, e MORICONI, Franco, (a cura di), *Il Principio di Arbitraggio*, Il Mulino, 1996, p. IX.

[12] Si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu,* CreateSpace, 2012, p.1.

[13] ENCICLOPEDIA TRECCANI http://www.treccani.it/enciclopedia/arbitraggio_(Enciclopedia-Italiana)/

1. che essa sia basata unicamente sulle divergenze dei prezzi attuali, a vista o a termine, esclusa la previsione di prezzi futuri, e *a fortiori* esclusa ogni azione tendente a influire direttamente su quei prezzi;

2. che sia un'operazione a vista; o, pur essendo a termine, si chiuda a breve scadenza, nel giro di giorni o al più di mesi.

Ciò che appare immediatamente palese come aspetto distintivo è la "immediatezza" propria del profitto derivante dall'arbitraggio, che infatti deve chiudersi, come sottolineato dalla seconda condizione, «*a breve scadenza, nel giro di giorni o al più di mesi.*» consentendo di conseguire un guadagno quasi "immediato". Tuttavia, l'assenza di rischio viene solo implicitamente e indirettamente menzionata dalla prima condizione, affermando che è *«esclusa la previsione di prezzi futuri»* nella realizzazione dell'operazione, lasciando così intendere che quest'ultima debba basarsi su prezzi "certi", sia a vista (*spot*) o a termine (*forward*), e non sulle previsioni degli stessi, sperando che queste siano in futuro verificate.

In verità, secondo "Le Trésor de la Langue Française", il termine *arbitrage* è stato utilizzato per la prima volta con un'accezione molto vicina a quella odierna, da parte di Mathieu de la Porte, nel suo trattato "La Science des Négocians et Teneurs de Livres"(1704)[14] in cui individua tre tipologie di arbitraggio: *«arbitraggio su valute»,* in caso di disallineamento dei tassi di cambio bilaterali, *«arbitraggio pronti-contro termine»* e *«arbitraggio su riporti»,* entrambi possibili dalla violazione della relazione di *forward-spot parity*. Una più recente definizione grossomodo in linea con quella corrente è stata individuata[15] nell'omonima voce dell'Encyclopedia Britannica (1963), in cui l'arbitraggio viene considerato un'operazione finanziaria (*business operation*) distinta dalla speculazione principalmente per il connotato "spaziale" che gli viene attribuito, facendo riferimento al coinvolgimento di diverse località all'interno della stessa operazione. Effettivamente, se l'arbitraggio consiste nel lucrare sulle differenze di prezzo presenti in "luoghi" diversi, la speculazione agisce sulle differenze di prezzo di una stessa attività in tempi diversi. Quindi, mentre la seconda ricerca il profitto facendo leva sul fattore "tempo" (vendita successiva all'acquisto e viceversa), il primo lo ricerca nel fattore "spazio" (acquisto e vendita su due mercati diversi nello stesso istante). Tuttavia, un'interpretazione di tal genere, apparrebbe restrittiva, in quanto opportunità di arbitraggio possono verificarsi anche all'interno di una stessa piazza, e dunque località (si consideri per esempio la violazione delle relazioni di *put-call parity* o *forward-spot parity*). Pertanto, l'espressione "luoghi diversi" deve essere intesa nel senso di "mercati" diversi, non necessariamente in un'accezione geografica del termine, ma anche finanziaria (mercato delle opzioni, mercato delle azioni, mercato del *futures* ecc.).

Esempi

È di seguito riportato un esempio di *«arbitraggio su valute»*, ripreso dalla già citata definizione di arbitraggio fornita nel 1929 da Luigi Moroso alla corrispondente voce nell'enciclopedia Treccani[16].

Supponiamo che in un certo momento la sterlina sia quotata a Roma 92,30, e la lira italiana a Londra 93,11. Secondo gli usi commerciali, che a Londra dànno il certo e a Roma l'incerto, ciò vuol dire che una sterlina costa a Roma lire 92,30, e compra a Londra lire

[14] LE TRÉSOR DE LA LANGUE FRANÇAISE, http://atilf.atilf.fr/
[15] Si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu,* CreateSpace, 2012, p.2
[16] ENCICLOPEDIA TRECCANI http://www.treccani.it/enciclopedia/arbitraggio_(Enciclopedia-Italiana)/

93,11. Ciò posto, se io a Roma debbo, per esempio, eseguire un pagamento dì 10.000 sterline a Londra, avrò anzitutto la scelta fra le due vie seguenti:

a) fare una rimessa in sterline a Londra; cioè inviare direttamente divisa inglese, comprata a Roma;

b) farmi trarre in lire a Roma; il che significa invitare il mio corrispondente a Londra a vendere ivi tante lire italiane, quante ne occorrono per eseguire il pagamento in sterline; e per l'ammontare della somma venduta spiccare una tratta su me, a Roma.

Riferendoci alle quotazioni indicate, e supponendo - in prima approssimazione - nulle le spese accessorie (bolli, commissione, diritti, posta e telegrafo, ecc.) per la via a) il pagamento di 10.000 sterline costa 92.300 lire; per la via b) costa 93.100. Ne deriva che io, e con me tutti quanti debbono in quell'istante eseguire un pagamento a Londra, sceglieremo la via a). Su questa via si riversa allora la domanda collettiva, e ciò porta che il suo costo cresce, mentre diminuisce quello di b), in cui la domanda si rarefà. Il che significa che cresce la quotazione della sterlina a Roma, e diminuisce quella della lira a Londra; e quell'accrescimento e questa diminuzione persisteranno fino a che - sempre a prescindere dalle spese accessorie - le due quotazioni non siano divenute pari.

L’esempio mostra come gli arbitraggisti, sfruttando momentanei disallineamenti di prezzo nei mercati finanziari, e nella fattispecie valutari, al fine di realizzare un guadagno immediato e privo di rischio, supportano la domanda nel mercato in cui il prezzo è inferiore e aumentano l’offerta nel mercato in cui il prezzo è superiore, comportando un complessivo effetto di livellamento dei prezzi nei diversi mercati finanziari, rendendo esigue, sostanzialmente nulle, le opportunità di arbitraggio. Paradossalmente, l’esistenza degli arbitraggisti garantisce il principio di assenza di opportunità di arbitraggio. Lo stesso Stephen Ross nel suo lavoro[17] asserisce:

[…] per un osservatore esterno, nessun tipo di arbitraggio è disponibile. Questa mancanza di arbitraggio è una conseguenza della grande liquidità e profondità di questi mercati, che permettono ad ogni opportunità di arbitraggio percepita di essere sfruttata su una scala arbitraria. Non è inusuale, comunque, imbattersi in opportunità di arbitraggio apparenti per titoli i cui prezzi sono sottovalutati, tipicamente quando i titoli stessi sono disponibili solo su un’offerta limitata.

È riportato di seguito un esempio di arbitraggio proposto dallo stesso Ross S. (nella traduzione di Gaia Barone[18]), tratto dalla vita reale, come evidenza empirica del concetto appena esposto.

Sono stato una volta coinvolto in un gruppo specializzato in arbitraggi su «titoli garantiti da ipoteche». Si trattava di comprare e vendere “oscuri e arcani” pezzi di carta rappresentativi di *tranches* di *pass-through mortgages*. Le *tranches* erano state ottenute attraverso operazioni di «scomposizione» (*stripping*). Ricordo che avevamo scoperto, dopo estese analisi, che una di queste *tranches* – un tipo particolare di “IO” (Interest Only) – offriva un tasso di rendimento sicuro pari al 37 per cento annuo. Questa era la buona notizia. La cattiva notizia era che l’investimento non era scalabile. Potevamo comprare solo $600.000 di questa *tranche*. Dato l’elevato costo delle risorse umane impiegate, il profitto copriva a mala pena il costo dell’analisi. Il mercato aveva trovato un equilibrio

[17] ROSS, Stephen Alan, *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, 2005, p.3
[18] Si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu,* CreateSpace, 2012, p.5

> anche per questi ottimi affari: i costi delle analisi per individuarli, inclusi i compensi del capitale umano impiegato, erano pressoché pari ai ricavi d'arbitraggio.

Questo ultimo esempio illustra il raggiungimento di un equilibrio di mercato che annulla qualsiasi tipo di opportunità di arbitraggio, considerando però in tal caso anche i costi di transazione che, nei ragionamenti sinora svolti, sono stati sempre considerati assenti. In verità «l'arbitraggio mantiene i prezzi per beni e titoli equivalenti vicini. I prezzi possono deviare, ma non più dei costi di transazione dell'arbitraggio»[19], generandosi così un "tunnel" di non arbitraggio, ossia un intervallo di prezzi entro il quale le opportunità di arbitraggio sono inesistenti, proprio perché annullate dai costi di transazione.

Si proseguirà nel successivo capitolo ad un'analisi più approfondita e analitica delle opzioni e in particolare della loro relazione rispetto il concetto di arbitraggio appena esposto.

[19] Si veda BERK, Jonathan, DeMARZO, Peter, *Corporate Finance*, Pearson, 3rd ed., p.92

2. Opzioni e arbitraggi

2.1. Variabili d'influenza per Calls e Puts

Procedendo più nel dettaglio con l'analisi delle opzioni, prima di esplorare gli studi di Merton circa le relazioni e restrizioni di prezzo di questi derivati, prendiamo in esame le variabili che possono influenzare il prezzo delle opzioni (*c* e *p* se europee, *C* e *P* se americane), sia scritte su azioni che su valuta.

I principali fattori possono essere così sintetizzati:

1. Il prezzo corrente dell'azione/ prezzo corrente della valuta estera (tasso di cambio corrente), S_0;
2. Il prezzo di esercizio *K*;
3. La vita residua dell'opzione, *T*;
4. La volatilità del prezzo dell'azione o del tasso di cambio, *σ*;
5. Il tasso di interesse privo di rischio, *r*;
6. I dividendi attesi durante la vita dell'azione, il cui valore attuale è D, nel caso delle *currency options* il dividend yield si considera pari a r_f, in quanto la valuta estera viene considerata come un'attività che rende il tasso di interesse estero, ossia r_f.

Gli effetti delle variabili *S* e *K* sul prezzo delle opzioni dipendono dal tipo di opzione acquisita, ovviamente gli effetti saranno esattamente speculari tra *put* e *call*. Se il prezzo *S* aumenta nel tempo, aumenterà anche il valore della *call*, e diminuirà quello della *put*, viceversa nel caso di un aumento dello *strike K*.

Per quanto concerne la vita residua, occorre effettuare una distinzione tra opzioni europee e americane. Nel caso delle opzioni americane, maggiore è la vita residua, maggiore è il prezzo dell'opzione, poiché opzioni a *maturity* più longeva offrono le stesse opportunità di esercizio, e altre ancora, di opzioni a più breve scadenza. Questo concetto riemergerà nuovamente nelle analisi di Merton del prossimo paragrafo. Nel caso delle opzioni europee, essendo l'opzione esercitabile esclusivamente a scadenza, una vita residua maggiore non è sempre favorevole, ma dipende dalla politica dei dividendi dell'azienda sulla cui azione l'opzione è scritta. Infatti se possediamo un *call* a scadenza a 6 mesi, e al 4 mese è previsto uno stacco di dividendo, l'azione successivamente allo stacco perderà valore, e così anche la *call*, in tal caso si sarebbe preferita una opzione a scadenza a 3 mesi, per esempio.

La volatilità ha una correlazione positiva con il prezzo delle opzioni, maggiore è la volatilità maggiore tende ad essere il prezzo del derivato, poiché l'opzione ha la caratteristica di fungere come un'assicurazione (*insurance*), ossia di limitare il rischio al ribasso (*downside risk*), rendendo potenzialmente illimitato il guadagno. Infatti, il possessore dell'opzione può beneficiare illimitatamente di improvvisi rialzi o ribassi del prezzo del sottostante, ma in caso in caso di perdita, questa sarà limitata (*limited liability*) al massimo al premio pagato per l'acquisto delle opzioni.

Il tasso di interesse privo di rischio *r*, calcolato in capitalizzazione continua su base annua, ha un duplice effetto sulle azioni: se *r* aumenta tendono ad aumentare anche i tassi di crescita attesi dei prezzi delle azioni, ma nell'ottica di chi detiene le opzioni, ciò vuol dire una diminuzione del valore attuale dei futuri flussi di cassa, il che si concretizza complessivamente in un aumento dei prezzi delle opzioni *call* e diminuzione dei prezzi delle opzioni *put*.

Il dividendo D rappresenta una diminuzione del valore dell'azione, pertanto produce un effetto negativo sulle opzioni di tipo *call* e positivo su quelle di tipo *put*.

Quanto è stato sinora esposto, è schematizzato nella seguente tabella, la quale è stata costruita tenendo a mente che l'impatto di ciascun parametro sul prezzo delle opzioni è stato valutato a "parità di altre condizioni" (*Ceteris Paribus*).

Tabella1

Variabile	*c*	*p*	*C*	*P*
S	+	–	+	–
K	–	+	–	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	–	+	–
D	–	+	–	+

2.2. I teoremi di Merton

Nella parte iniziale de "Theory of the Rational Option Pricing"[20] del premio Nobel per l'Economia (1977) Robert C. Merton, sono individuate alcune relazioni, tra opzioni europee e americane, e restrizioni, limiti superiori e inferiori, per il prezzo delle opzioni con la singola assunzione che gli investitori preferiscano il più al meno (*principio di non sazietà*).

Sostenere che il possessore di una *call* o *put*, americana o europea che sia, non può sopportare una perdita maggiore del premio pagato per l'acquisto del derivato, implica che l'investitore ha una "passività limitata" (*limited liability*) e ne consegue:

$$c(S_0, T; K) \geq 0 \qquad C(S_0, T; K) \geq 0 \tag{2.1}$$

[20] MERTON, Robert C., "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, No. 1 (Spring, 1973), pp. 141-183

e alla scadenza, T= 0, entrambi i contratti devono soddisfare:

$$c(S_0,0; K) = C(S_T,0; K)= \max(S_T - K; 0) \tag{2.2}$$

dove $c(S_0,0; K)$ e $C(S_T,0; K)$ sono rispettivamente il valore di una *call* europea e una *call* americana al tempo 0, con prezzo di esercizio K e scadenza T.

In aggiunta, dalla condizione di non arbitraggio segue che:

$$C(S_\tau, T-\tau; K) \geq \max(S_\tau - K; 0) \tag{2.3}$$

Merton inoltre ricorda che quest'ultima equazione non deve essere soddisfatta anche dalle opzioni europee, ciò si spiega considerando il fatto che le opzioni europee possono essere esercitate solo alla scadenza, mentre la suddetta formula è inerente ad un qualsiasi momento prima della *maturity*.

Egli inoltre fornisce una definizione di titolo dominante: *"un titolo (portafoglio) A è dominante su un altro titolo (portafoglio) B, se in una data certa nel futuro, il rendimento di A eccederà il rendimento di B per qualche possibile stato del mondo, e sarà almeno pari al rendimento di B, per tutti i possibili stati del mondo".*

È importante notare che data questa definizione, in mercati perfetti senza costi di transazione e con la possibilità di prendere in prestito denaro e vendere allo scoperto senza restrizioni, l'esistenza di un titolo dominante è equivalente all'esistenza di una opportunità di arbitraggio.

Assunzione 1. Condizione necessaria per una razionale valutazione è che l'opzione venga valutata in modo da non essere né un titolo dominato né un titolo dominante.

Da ciò consegue che:

$$C(S_0,T_2; K) \geq C(S_0,T_1; K) \quad \text{se } T_2 > T_1, \tag{2.4}$$

e che

$$C(S_0,T; K) \geq c(S_0,T; K) \tag{2.5}$$

In particolare, queste due ultime formule richiamano in parte il ragionamento esposto nel paragrafo precedente quando si analizzava l'impatto della vita residua delle opzioni (T).

Inoltre due *calls* europee o americane, con *strike* diverso, ma altrimenti identiche, devono soddisfare le seguenti disuguaglianze:

$$\left.\begin{array}{l} C(S_0,T; K_1) \geq C(S_0,T; K_2) \\ c(S_0,T; K_1) \geq c(S_0,T; K_2) \end{array}\right. \quad \text{se } K_2 > K_1, \tag{2.6}$$

Anche in questo ultimo caso, le formule confermano l'interpretazione data nel precedente paragrafo in relazione all'impatto della variabile K sul prezzo delle opzioni.

Poiché il prezzo S_0 di un'azione è equivalente ad una call americana perpetua (T= ∞) con *strike* nullo (K= 0), richiamando la (2.4) e la (2.6) si ha che

$$S_0 \geq C(S_0,T;K) \tag{2.7}$$

Questo limite superiore, che è valido anche per le opzioni europee, si spiega considerando il fatto che una *call*, americana o europea, dà al possessore il diritto di comprare ad un certo prezzo un'azione, entro o ad una specifica data, pertanto il prezzo della *call* non potrà mai essere superiore al prezzo dell'azione. Infatti, se tale limite non fosse rispettato, si creerebbe una opportunità di arbitraggio, e un profitto immediato e privo di rischio si potrebbe realizzare semplicemente vendendo la *call* e comprando l'azione. Se tutti agissero in tal senso, i prezzi si livellerebbero fino al rispetto del suddetto limite.

Un ragionamento analogo ci porta a dire che il valore di una *put*, americana o europea, che consente al titolare di vendere ad un prezzo specifico un'azione, entro o ad una certa data, non potrà mai essere superiore del prezzo di esercizio a cui si vende il sottostante. Ne consegue che

$$K \geq P(S_0,T;K) \tag{2.8}$$

Nel caso della *put* europea, noi sappiamo che non può valere più di *K* al tempo *T*, ciò significa che

$$Ke^{-rT} \geq p(S_0,T;K) \tag{2.9}$$

Qualora tale limite fosse violato, un arbitraggista potrebbe conseguire un guadagno immediato e privo di rischio, vendendo l'opzione e investendo il ricavato al tasso privo di rischio *r*.

Inoltre, sulla scorta della (2.1) e della (2.7) discende che il valore di una *call* è nullo, se il prezzo dell'azione è nullo:

$$C(0,T;K) = c(0,T;K) = 0 \tag{2.10}$$

Merton nel suo scritto sviluppa 13 teoremi senza effettuare assunzioni circa la dinamica del prezzo del sottostante, qui verranno riportati solamente quelli più funzionali alla trattazione (nella traduzione di Gaia Barone)[21]. I primi due teoremi verranno analizzati insieme.

Teorema 1: il valore corrente, *c*, di una *call* europea, con prezzo di esercizio K e scadenza T, scritta su un titolo che non paga dividendi, deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$c \geq \max\,(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \tag{2.11}$$

Teorema 2: una call americana, con prezzo di esercizio K e scadenza T, scritta su un titolo che non paga dividendi non verrà mai esercitata anticipatamente. Il suo valore C, sarà pari a quello della corrispondente opzione europea:

$$C(S_0,T;K) = c(S_0,T;K) \tag{2.12}$$

Infatti se la *call* è esercitata, il suo valore sarà max $(S - K, 0)$, ma dal *teorema 1 c* ≥ max $(S - Ke^{-rT}, 0)$ che, per $r > 0$ è maggiore di max $(S - K, 0)$, perché *K* è attualizzato e quindi assume un valore più piccolo da sottrarre a S. Pertanto, la *call* americana vale sempre più "viva" che "morta".

Il *teorema 1* pone un limite superiore al prezzo di una *call* europea, qualora non venga rispettato si creerebbe una opportunità di arbitraggio. È di seguito riportata la breve dimostrazione teorica:

Si considerino i due seguenti portafogli:

[21] BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, pp.9-13.

Portafoglio A: call europea (*c*)più un importo di denaro pari a Ke^{-rT};

Portafoglio B: un'azione (S_0);

Supponiamo che alla scadenza l'azione abbia valore S_T. Allora il valore di B sarà S_T. Se S_T< *K* allora la *call* scade senza valore e il valore del portafoglio A sarà 0 + *K* = *K*. Se S_T > *K*, allora il valore del portafoglio A sarà (S_T – *K*) + *K* = S_T.Perciò, a meno che il valore corrente di A sia uguale a quello di B, A dominerà B. La *tabella 2* illustra quanto discusso.

Tabella 2

	Tempo 0	*Tempo T*	
Portafoglio		$S_T \le K$	$K < S_T$
A	*c*	*0*	$S_T - K$
	$K\,e^{-rT}$	*K*	*K*
	$c + K\,e^{-rT}$	*K*	S_T
B	S_0	S_T	S_T
	S_0	S_T	S_T

Pertanto al tempo T il *portafoglio A* vale

$$\max(S_T, K).$$

Il *portafoglio B* al tempo T vale S_T.

Dunque, come appena dimostrato, il *portafoglio A* al tempo T vale sempre almeno tanto quanto il *portafoglio B*, e talvolta anche di più. Pertanto, se vale il principio di non-arbitraggio, la relazione che vale al tempo T, deve valere anche oggi, ossia:

Portafoglio A ≥ Portafoglio B al tempo T;

$$c + Ke^{-rT} \ge S_0$$ al tempo 0 (oggi);

Da cui:

$$c \ge S_0 - Ke^{-rT}. \qquad (2.13)$$

Poiché nella peggiore delle ipotesi può accadere che la *call* scade priva di valore, ciò vuol dire che il suo valore corrente deve essere positivo, ossia *c* ≥ 0, e che quindi

$$c \ge \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

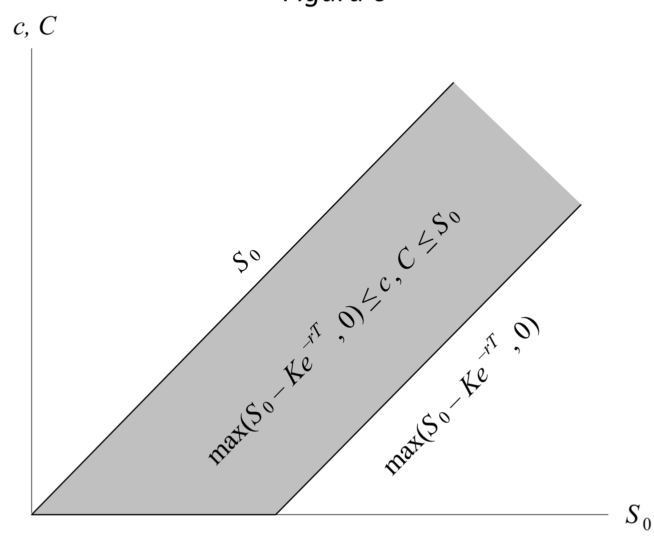
Questo limite inferiore, insieme alle restrizioni viste in precedenza, definisce un "tunnel" entro il quale il valore della *call* è costretto ad oscillare. Qualora non venga rispettato, un arbitraggista potrebbe conseguire un guadagno immediato e privo di rischio. Infatti, l'unica circostanza in cui il limite viene violato si presenta quando il *portafoglio A* assume un valore inferiore del *portafoglio B* perché il valore corrente della *call* è inferiore rispetto quello fissato dal limite. In tal caso, l'arbitraggista assumerà una posizione corta sul portafoglio B (vendendo allo scoperto l'azione) e investirà il ricavato in parte, per un ammontare pari a Ke^{-rT}, al tasso privo di rischio, e in parte acquistando l'opzione che però, avendo un prezzo inferiore rispetto il previsto, consentirà di avere un avanzo, ossia il profitto. In T=1 l'arbitraggista ha a disposizione un capitale che ammonta a *K* e una opzione *call*, con *strike* pari a *K*, grazie ai quali sarà in grado di restituire l'azione presa in prestito.

Inoltre, considerando il *teorema 2,* dato che le *calls* americane non vengono mai esercitate anticipatamente, e che le *calls* americane scritte su un titolo che non paga dividendi equivalgono alle *calls* europee, ossia C=c, in base alla (2.13) e alla (2.7) si ha:

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq c,\ C \leq S_0$$

L'insieme delle restrizioni è rappresentato graficamente nella *figura 6*[22].

Figura 6



Un ragionamento del tutto analogo, considerando le opportune modifiche, può essere fatto per le opzioni di tipo *put.* Il limite inferiore per le opzioni put è:

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \qquad (2.14)$$

Per dimostrarlo, consideriamo due portafogli:

Portafoglio A: una *put* europea (*p*) e un'azione (S_0).

Portafoglio B: un capitale pari a Ke^{-rT}.

[22] HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015, p.253.

Supponiamo che alla scadenza, l'azione ha valore S_T. Supponendo che il capitale venga investito al tasso di interesse privo di rischio, il valore del *portafoglio B* sarà *K*. Se $S_T > K$ allora la *put* scade senza valore e il valore del *portafoglio A* sarà 0 + S_T = S_T. Se $S_T < K$, allora la *put* verrà esercitata e il valore del *portafoglio A* sarà ($K - S_T$) + S_T = *K*. Perciò, a meno che il valore corrente di A sia uguale a quello di B, A dominerà B. La *tabella 3* illustra quanto discusso.

Tabella 3

	Tempo 0	*Tempo T*	
Portafoglio		$S_T \le K$	$K < S_T$
	p	$(K-S_T)$	0
A	S_0	S_T	S_T
	$p + S_0$	K	S_T
B	$K\,e^{-rT}$	K	K
	$K\,e^{-rT}$	K	K

Al tempo T il *portafoglio A* vale

$$\max(S_T, K).$$

Il *portafoglio B* al tempo T vale *K*.

Pertanto al tempo *T* il *portafoglio A* vale sempre almeno tanto quanto il *portafoglio B*, e talvolta anche di più e, vigendo il principio di non-arbitraggio, la relazione che vale al tempo *T*, deve valere anche oggi (*T*=0), ossia:

$$\textit{Portafoglio A} \ge \textit{Portafoglio B} \qquad \text{al tempo T;}$$

$$p + S_0 \ge Ke^{-rT} \qquad \text{al tempo 0 (oggi);}$$

Da cui:

$$p \ge Ke^{-rT} - S_0.$$

Dato che il peggior scenario per la *put* è scadere priva di valore, il suo valore corrente deve essere positivo, ossia $p \ge 0$, quindi:

$$p \ge \max(Ke^{-rT} - S_0, 0).$$

Qualora non venga rispettato questo limite, un arbitraggista potrebbe realizzare un guadagno immediato e privo di rischio. Infatti, l'unica circostanza in cui il limite viene violato si presenta quando il *portafoglio A* assume un valore inferiore del *portafoglio B* perché il valore corrente della *put* è inferiore rispetto quello fissato dal limite. In tal caso, l'arbitraggista assumerà una posizione corta sul portafoglio B (prendendo in prestito un capitale pari a Ke^{-rT}) e acquisterà l'azione e l'opzione che però, avendo un prezzo inferiore rispetto il previsto, consentirà di avere un avanzo, ossia il profitto. In T=1 l'arbitraggista eserciterà l'opzione *put* vendendo l'azione per un prezzo pari e *K*, che coincide con la somma che deve restituire una volta capitalizzata al tasso di interesse privo di rischio.

Inoltre, poiché il teorema 2 è valido solamente nel caso delle *calls* americane, dato che nel caso delle *puts* americane su un titolo che non paga dividendi l'esercizio anticipato è sempre possibile, vale la condizione:

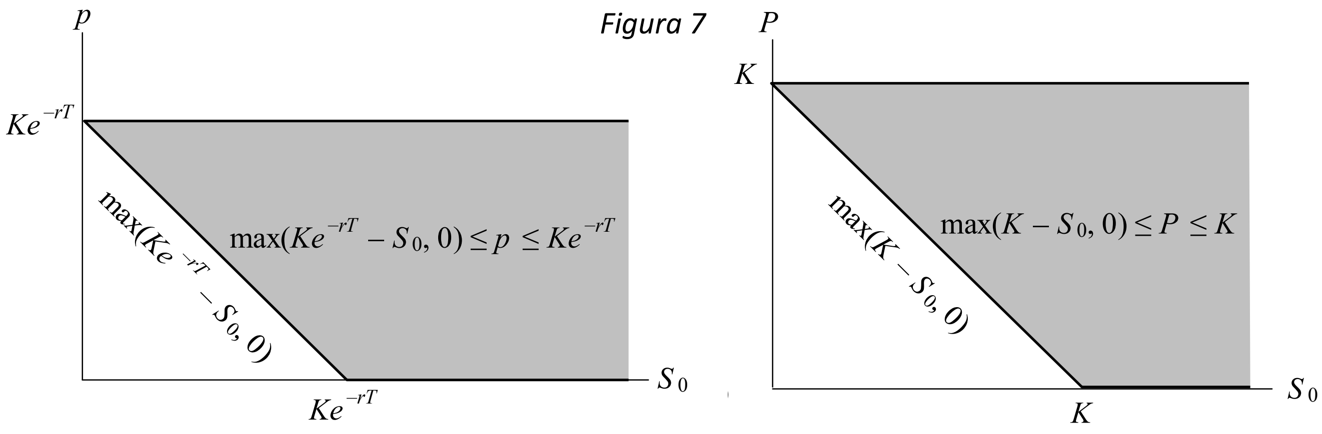
$$P \geq \max(K - S_0, 0).$$

Se inoltre si tiene conto anche della (2.8), i limiti della *put* americana sono:

$$\max(K - S_0, 0) \leq P \leq K$$

Quanto detto sinora riguardo le opzioni *put*, è rappresentato nella figura seguente[23].

Figura 7



a) Put europea *b) Put americana*

In particolare, la figura 7 a) esprime graficamente (area evidenziata) il valore entro cui deve oscillare il prezzo di una *put* europea scritta su un titolo che non paga dividendi: il limite superiore è dato da Ke^{-rT} (linea retta parallela alle ascisse), il limite inferiore è dato dal valore intrinseco che, quando il prezzo del sottostante è inferiore al valore attuale dello *strike*, è positivo (linea obliqua), e che, quando il prezzo del sottostante è superiore al valore attuale dello *strike*, è pari a 0 (retta coincidente con le asse delle ascisse). Una analoga interpretazione è data per la *put* americana (figura b)), con la sola differenza che come limite superiore, in luogo del valore attuale dello *strike*, si considera lo *strike* non attualizzato in quanto l'opzione è esercitabile anche prima della scadenza.

23 HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015, p.254.

Teorema 6: il valore di una *call* americana che consente di acquistare *h* titoli ad un prezzo *h*K è uguale, a parità di altre condizioni, a *h* volte il valore di una *call* americana che consente di acquistare lo stesso titolo ad un prezzo K:

$$C(hS_0, T; hK) = hC(S_0, T; K) \tag{2.14}$$

Assunta *h* come costante positiva, siano Q(t) = $hS(t)$; K_Q=hK, allora $C_Q(Q, T; K_Q)$ = hC(S, T; K) per qualsiasi S, T; K e ogni h. Infatti sia S_t il valore del sottostante con valore iniziale S_0 sia che la *call* venga esercitata sia che scada di valore. Allora, dalle ipotesi del teorema Q=Q_t = hS_t e K_Q=hK. Il valore della call scritta su Q sarà max (0, Q_t -K_Q) = h max (0, $S_t - K$) che è *h* volte il valore della *call* scritta su *S*. Quindi, per evitare la dominanza di un titolo sull'altro (ossia per il principio di non arbitraggio), il valore della *call* scritta su Q deve essere esattamente *h* volte il valore della *call* scritta su *S*. C.V.D.

Le implicazioni del *Teorema 6* per una valutazione razionale delle *calls* dipendono dalle assunzioni necessarie per produrre le condizioni imposte dal teorema. Nella forma più debole, questo è un teorema dimensionale dove *h* è il *fattore di proporzionalità tra due unità di conto.*

Se i mercati del sottostante e delle *calls* sono perfettamente competitivi, allora può essere interpretato come un teorema di scala. In particolare, se non ci sono economie di scala con il rispetto dei costi di transazione e il problema dell'indivisibilità, allora *h* azioni saranno sempre vendute per esattamente *h* volte il valore di un'azione. Sotto queste condizioni, il teorema afferma che una call per comprare *h* azioni per un totale di *hK* dollari quando il prezzo per azione dello stock è *S* dollari, è uguale in valore a *h* volte il prezzo di una *call* per comprare un'azione dello stock per *K* dollari, considerando tutti i termini uguali. Così, la funzione razionale del prezzo della *call* è omogenea di primo grado in *S* e *K* con il rispetto della scala, che riflette gli usuali rendimenti di scala costanti come risultato della competizione.

Questo teorema è particolarmente rilevante perché introduce il *principio di omogeneità* che verrà sfruttato in seguito per sviluppare la relazione di *put-call symmetry*.

Teorema 12: se i tassi d'interesse ai quali si può dare o prendere in prestito denaro coincidono, allora vale seguente *put-call parity*:

$$p(S_0, T; K) = c(S_0, T; K) - S_0 + Ke^{-rT}$$

Questa relazione verrà analizzata più nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

2.3. Put-call Parity

Delineati i fondamentali aspetti della valutazione delle opzioni, possiamo affrontare la relazione di *put-call parity* che lega le opzioni europee di tipo *call* e di tipo *put*, scritte sullo stesso sottostante (*S*) che non paga dividendi e aventi stesso prezzo di esercizio (*K*) e scadenza (*T*).

Vi sono diverse versioni in cui questa relazione può essere presentata, di seguito è riportata la versione più comune, in assenza di costi di transazione:

$$c(S_0,T;K) + Ke^{-rT} = p(S_0,T;K) + S_0 \tag{2.15}$$

Per dimostrarla consideriamo i seguenti portafogli:

Portafoglio A: una *call* Europea scritta su un'azione più il valore attuale del prezzo d'esercizio in denaro ($c + Ke^{-rT}$).

Portafoglio B: una *put* Europea scritta su un'azione più un'azione ($p + S_0$).

Alla scadenza *T*, il sottostante avrà valore S_T, e la somma in denaro, opportunamente investita al tasso privo di rischio, sarà pari a *K*. Qualora $S_T > K$ la call viene esercitata, e il portafoglio A vale S_T [$=K+(S_T - K)$], che coincide col valore del portafoglio B, poiché la put scade priva di valore e il sottostante in *T* vale S_T. Qualora $S_T < K$ la *put* viene esercitata, e il portafoglio B vale *K* [$= S_T + (K - S_T)$], che corrisponde al valore assunto dal portafoglio A, in quanto la call scade priva di valore, e la somma di denaro, investita al tasso privo di rischio, è divenuta pari a *K*. Dunque, alla scadenza *T*, qualunque circostanza si verifichi, entrambi i portafogli hanno lo stesso valore, che è il seguente:

$$\max(S_T,K).$$

Inoltre, trattandosi di opzioni europee, che quindi non possono essere esercitate prima della scadenza, come hanno lo stesso valore alla scadenza, debbono avere lo stesso valore anche oggi:

$$c(S_0,T;K) + Ke^{-rT} = p(S_0,T;K) + S_0$$

Se questa relazione non fosse rispettata, un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto immediato e privo di rischio, pari alla differenza di valore tra i portafogli, vendendo oggi il portafoglio che vale di più, e comprando quello che vale di meno. Alla scadenza non avrà alcun esborso poiché entrambi i portafogli forniscono lo stesso *payoff*.

La dimostrazione è schematizzata dalla *tabella 4* che segue.

Tabella 4

	Tempo 0	*Tempo T*	
Portafoglio		$S_T \le K$	$K < S_T$
	c	0	$S_T - K$
A	$K e^{-rT}$	K	K
	$c + K e^{-rT}$	K	S_T
	p	$K - S_T$	0
B	S_0	S_T	S_T
	$p + S_0$	K	S_T

Di seguito sono illustrati due esempi in cui vengono sfruttate le opportunità di arbitraggio derivanti dalla violazione della relazione di *put-call parity* per le *currency options*.

Esempio 2.3.1

Supponiamo che i prezzi correnti di una *call* e di una *put* europee scritte su 1 euro, entrambe con *strike* (*K*) $/€ 1,5 e scadenza a 6 mesi, siano pari rispettivamente a $0,02 e a $0,015 per euro. Il tasso di cambio corrente (S_0) EUR/USD è di 1,5 e il tasso di interesse privo di rischio (*r*), composto continuamente, è pari all'8% annuo.

In questo caso[24]

Portafoglio A: $c(S_0, T; K) + Ke^{-rT}$= $(0,02+1,5 $e^{-0,08\text{x}0,5}$) = $1,4612

Portafoglio B: $p(S_0, T; K) + S_0$= $(0,015+1,5) = $1,515

Il *portafoglio B* è sopravvalutato rispetto il *portafoglio A*, pertanto la corretta strategia di arbitraggio consiste nell'assumere una posizione corta su B, vendendo i titoli, e assumere una posizione lunga su A, acquistando i titoli. La strategia di arbitraggio è descritta nel dettaglio nella tabella che segue.

Tabella 5

	Tempo 0	*Tempo T*	
p	*Valuta*	$S_T \leq K$	$K < S_T$
	1. Prendere in prestito €1	1. Ricevere $1,5560 $(=1,495 x $e^{0,08\text{x}0,5}$)	1. Ricevere $1,5560 $(=1,495 x $e^{0,08\text{x}0,5}$)
	2. Convertire €1 in $1,5 al tasso corrente	2. Acquistare €1 a $1,5 subendo l'esercizio della *put*	2. Acquistare €1 a $1,5 esercitando la *call*
$0,015	3. Vendere la *put* a $0,015	3. Restituire €1 che era stato presa in prestito	3. Restituire la valuta che era stata presa in prestito
	4. Comprare la *call* a $0,02	4. Dichiarare l'abbandono della *call*	4. Osservare l'abbandono della *put*
	5. Dare in prestito $1,495 (= $1,5+$0,015-$0,02)	5. Profitto: $0,056 (= $1,5560-$1,5)	5. Profitto: $0,056 (= $1,5560-$1,5)
Nota: S_0= $/€1,5; K= $/€1,5; T = 0,5; c = $0,02; r=8%			

Esempio 2.3.2

Supponiamo che i prezzi correnti di una *call* e di una *put* europee scritte su 1 euro, entrambe con *strike* (K) $/€1,5 e scadenza a 6 mesi, siano pari rispettivamente a $0,02 e a $0,015 per euro. Il tasso di cambio corrente (S_0) EUR/USD è di 1,4 e il tasso di interesse privo di rischio (*r*), composto continuamente, è pari all'8% annuo.

In questo caso

Portafoglio A: $c(S_0, T; K) + Ke^{-rT}$= $(0,02+1,5 $e^{-0,08\text{x}0,5}$) = $1,4612

[24] I valori espressi sono tutti su una unità di valuta estera per semplicità, pertanto anche il guadagno sarà calcolato per unità di dollaro, il che vuol dire che acquistando call scritte su 10.000 unità di valuta estera, si ottiene un profitto pari 10.000 volte quello individuato dall'esempio.

Portafoglio B: $p(S_0,T; K) + S_0$= \$(0,015+1,4) = \$1,415

Tabella 6

	Tempo 0	Tempo T	
p	*Valuta*	$S_T \leq K$	$K < S_T$
\$0,015	1. Prendere in prestito \$1,395 (= \$0,015+ \$1,4 - \$0,02)	1. Ricevere €1 era stato dato in prestito	1. Ricevere €1 era stato dato in prestito
	2. Vendere la *call* a \$0,02	2. Vendere €1 a \$1,5 esercitando la *put*	2. Vendere €1 a \$1,5 subendo l'esercizio della call
	3. Compro la put a \$0,015	3. Versare \$1,4519 \$(= 1,395 x $e^{0,08x0,5}$)	3. Versare \$1,4519 \$(= 1,395 x $e^{0,08x0,5}$)
	4. Comprare €1 a \$1,4 al tasso corrente	4. Osservare l'abbandono della *call*	4. Dichiarare l'abbandono della *put*
	5. Dare in prestito €1	5. Profitto: \$0,048 (= \$1,5-\$1,4519)	5. Profitto: \$0,048 (= \$1,5-\$1,4519)

Nota: S_0= \$/€1,4; K= \$/€1,5; T = 0,5; *c* = \$0,02; *r*=8%

Il *portafoglio A* è sopravvalutato rispetto il *portafoglio B*, pertanto la corretta strategia di arbitraggio consiste nell'assumere una posizione corta su A, vendendo la *call* e investendo al tasso privo di rischio il capitale, e assumere una posizione lunga su B, acquistando i titoli. La strategia di arbitraggio è descritta nel dettaglio nella tabella che segue.

2.3.1 Put-Call parity e costi di transazione

Sinora abbiamo esplorato il concetto della *put-call parity* non considerando i costi di transazione, tuttavia nei mercati reali i *market makers* (o *dealers*) quotano i prezzi dei 4 contratti interessati dalla *put-call parity* nei diversi mercati: un «prezzo lettera» (*ask price*) a cui sono disposti a vendere, ossia ad assumere una posizione «corta» (*short*), e un «prezzo denaro» (*bid price*) a cui sono disposti ad acquistare, ossia ad assumere una posizione «lunga» (*long*). La differenza tra i due prezzi (*bid-ask spread*) è proprio il costo di transazione implicito nella stessa, e che l'intermediario trattiene a titolo di compenso per la transazione effettuata. Solitamente il *bid-ask spread* può essere interpretato anche come un indice di *liquidità* del titolo: minore è il costo implicito della transazione, maggiore è la liquidità del titolo, perché è agevole scambiarlo sul mercato. Qualora infatti si abbia difficoltà a far tornare il titolo in forma liquida, e dunque a venderlo, maggiore sarà il compenso (*bid-ask spread*) trattenuto implicitamente dai *dealers* per la transazione. Inoltre, nel sviluppare il discorso nella nuova prospettiva proposta, è importante sottolineare che il tasso di interesse a cui il capitale viene preso in prestito (tasso di finanziamento, r_{ask}) è diverso (e solitamente superiore) al tasso di interesse a cui viene investito il capitale (tasso di investimento, r_{bid}), entrambi considerati su base annua e composti continuamente.

Considerato quanto detto, è opportuno presentare la *put-call parity* in una forma sostanzialmente identica, ma lievemente diversa nella notazione, al fine di semplificarne la trattazione[25].

$$c + \mathrm{B} = p + \mathrm{S} \tag{2.16}$$

Dove c e p indicano rispettivamente il valore corrente della *call* e della *put* europea con prezzo di esercizio K e scadenza T, mentre S e B indicano, rispettivamente, il valore corrente dell'attività sottostante e di uno *zero-coupon bond* con valore nominale K e scadenza T.

In particolare,

$$\mathrm{B} = \mathrm{K\,Z} \tag{2.17}$$

Dove Z è il valore corrente di uno zero-coupon bond con valore nominale unitario e scadenza T. Nella nuova formulazione presentata, la *put-call parity* esprime un'equivalenza tra un portafoglio formato da una *call* con valore corrente c e da uno *zero-coupon bond* con valore corrente B, valore nominale K e scadenza T (la cosiddetta «*fiduciary call*»), e un portafoglio costituito dalla corrispondente *put* europea con valore corrente p e dalla sua attività sottostante, con valore corrente S (la cosiddetta *«protective put»*). Non viene riportata di seguito la dimostrazione della relazione in questa nuova notazione, perché è sostanzialmente identica a quella analizzata in precedenza, è infatti sufficiente sostituire nella *tabella 4* il termine $\mathrm{K}e^{-\mathrm{rT}}$ con il termine B (B=K Z, dove Z= $e^{-\mathrm{rT}}$).

Come qualsiasi altro investitore sul mercato, l'arbitraggista opera acquistando al prezzo più elevato (*ask*) e vendendo al prezzo più basso (*bid*). Pertanto nella sua strategia, per lucrare egli dovrà riuscire a realizzare un guadagno che ecceda il costo della transazione, o che sia al massimo uguale.

Abbiamo già discusso in precedenza le opportune strategie di arbitraggio in caso di violazione della *put-call parity*, tuttavia ora, considerando i costi dell'operazione, dobbiamo apportare le necessarie modifiche alla *put-call parity*, questa infatti si "sdoppia" in altre due relazioni, una di "acquisto", e l'altra di "vendita":

$$c_{bid} + B_{bid} < p_{ask} + S_{ask} \tag{2.18}$$

$$c_{ask} + B_{ask} > p_{bid} + S_{bid} \tag{2.19}$$

dove

$$B_{bid} = \mathrm{K}\,Z_{bid} \tag{2.20}$$

$$B_{ask} = \mathrm{K}\,Z_{ask} \tag{2.21}$$

Se la (2.18) o la (2.19) vengono violate, si produrranno sul mercato opportunità di arbitraggio. Infatti se la (2.18) non è soddisfatta, l'arbitraggista può assumere una posizione «corta» sulla *fiduciary call*, coprendosi nel contempo acquisendo una posizione «lunga» sulla *protective put*. Qualora sia la (2.19) ad essere violata, allora egli potrà compare la *fiduciary call*, vendendo la *protective put*.

[25] Si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, p.17-8

Esempio 2.3.1.1

Riproponiamo ora *l'esempio 2.3.1* con le opportune modifiche, considerando per esempio l'attività sottostante alle opzioni pari a €10.000 invece di 1 (per rendere più agevole i calcoli) e dunque uno *strike* di \$15.000, un r_{ask} del 10% e un r_{bid} del 6%, su base annua e composti continuamente, un tasso di cambio che si sdoppia in S_{ask}= \$14.200 e S_{bid}= \$14.000, c_{ask}= \$210, c_{bid}= \$207, p_{ask}= \$160, p_{bid}= \$157, B_{ask}= \$14.556,683, B_{bid}= \$14.268,44.

Pertanto, riassumendo i dati:

$$B_{ask} = \$14.556{,}68 \qquad B_{bid} = \$14.268{,}44 \qquad S_{ask} = \$14.200 \qquad S_{bid} = \$14.000$$
$$c_{ask} = \$210 \qquad c_{bid} = \$207 \qquad p_{ask} = \$160 \qquad p_{bid} = \$157 \tag{2.22}$$

Le quotazioni B_{bid} e B_{ask} sono state calcolate utilizzando le (2.20) e (2.21), considerando K=\$15.000 e

$$Z_{bid} = e^{-r_{ask}\mathrm{T}} = e^{-0,1\times 0,5} = 0{,}9512 \qquad Z_{ask} = e^{-r_{bid}\mathrm{T}} = e^{-0,06\times 0,5} = 0{,}9704 \tag{2.23}$$

essendo r_{ask}= 10% e r_{bid}= 6%.

Se si considerano la (2.18) e la (2.19), si può agevolmente verificare che:

$$\$14.475{,}44 = \$207 + \$14.268{,}44 > \$160 + \$14.200 = \$14.360 \tag{2.24}$$

$$\$14.766{,}68 = \$210 + \$14.556{,}68 > \$157 + \$14.000 = \$14.157 \tag{2.25}$$

Mentre la (2.19) viene soddisfatta, la (2.18) non lo è, pertanto vi è la possibilità di sfruttare un'opportunità di arbitraggio, il cui profitto sarà pari alla differenza tra \$14.475,44 e \$14.360, ossia \$115,44. La strategia consiste nel vendere la *fiduciary call*, essendo sopravvalutata, e coprire la vendita con l'acquisto della *protective put*, ad un prezzo minore. Quindi, le posizioni da assumere sono: *short c, short B, long p, long S.*

La *tabella 7* mostra la realizzazione della strategia di arbitraggio. La seconda colonna (*iniziale*) mostra l'esborso (segno meno) o l'introito (segno più) che l'operazione mostrata nella prima colonna (*posizione*) comporta al tempo 0. Le altre colonne sotto la voce *Sintetica* indicano gli esborsi e gli introiti richiesti dal portafoglio che replica l'operazione di segno opposto a quella indicata nella prima colonna (*posizione*), assumendo le opportune posizioni sugli altri contratti considerati. In altre parole, esse mostrano le posizioni da assumere sugli altri contratti per riprodurre "sinteticamente" il contratto su cui si sta assumendo la posizione iniziale. La strategia di arbitraggio però consiste nell'assumere posizioni di segno opposto in modo tale da ottenere un profitto dall'eventuale disallineamento tra prezzi del contratto "vero" e "sintetico". Per esempio, volendo sfruttare l'opportunità di arbitraggio testé individuata, la prima operazione da effettuare può consistere nel vendere la *call*, ossia *short c*. La vendita della *call* viene coperta con l'acquisto di una *«call sintetica»* (*synthetic call*) attraverso le seguenti operazioni: *short B, long S, long p*. In realtà non si sta facendo altro che vendere la *fiduciary call (short c, short B)* e contestualmente acquistare la *protective put (long p, long S),* come sopra anticipato. Si è preferita tuttavia una rappresentazione tabellare che consideri solamente la posizione iniziale su di un contratto piuttosto che sulla *fiduciary call* o *protective put*, per avere un quadro più generale e rappresentativo di tutte le possibili combinazioni, profittevoli e non, che possono essere eseguite. Inoltre la colonna finale mostra che il profitto di arbitraggio al tempo 0 è \$115,44, mentre l'operazione di segno contrario, ossia acquisto della *fiduciary call* e vendita della *protective put* comporta una perdita di \$609,68.

Tabella 7

Posizione	*Iniziale*	*Sintetica*								*Totale*
		long B	*short B*	*long S*	*short S*	*long c*	*short c*	*long p*	*short p*	
long B	-14.556,68	-	-	-	14.000,00	-210,00	-	-	157,00	-609,68
short B	14.268,44	-	-	-14.200,00	-	-	207,00	-160,00	-	115,44
long S	-14.200,00	-	14.268,44	-	-	-	207,00	-160,00	-	115,44
short S	14.000,00	-14.556,68	-	-	-	-210,00	-	-	157,00	-609,68
long c	-210,00	-14.556,68	-	-	14.000,00	-	-	-	157,00	-609,68
short c	207,00	-	14.268,44	-14.200,00	-	-	-	-160,00	-	115,44
long p	-160,00	-	14.268,44	-14.200,00	-	-	207,00	-	-	115,44
short p	157,00	-14.556,68	-	-	14.000,00	-210,00	-	-	-	-609,68

2.4. Bull spread and Butterfly Spread relations

Esistono alcune *relazioni generali di arbitraggio* per *calls* europee scritte sulla stessa attività, senza imporre restrizioni sulla natura stocastica del prezzo dell'attività sottostante:

$$S_0 e^{-qT} \geq c \geq \max\left(S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}, 0\right) \qquad (2.26)$$

(*hedge relation*)

$$c_1 - c_2 \leq e^{-rT}(K_2 - K_1) \quad \text{con } K_2 > K_1 \qquad (2.27)$$

(*bull spread relation*)

$$c_2 \leq \tfrac{1}{2}(c_1 + c_3) \quad \text{con } K_2 = \tfrac{1}{2}(K_1 + K_3) \qquad (2.28)$$

(*butterfly spread relation*)

Combinando queste tre relazioni con il principio della *put-call parity* analizzato nel precedente paragrafo, possono derivarsi relazioni simili per le corrispondenti *puts* europee[26]:

[26] Per la derivazione matematica si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, p.25

$$Ke^{-rT} \geq p \geq \max\,(Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}, 0) \qquad (2.29)$$
(*hedge relation*)

$$p_2 - p_1 \leq e^{-rT}\,(K_2 - K_1) \quad \text{con } K_2 > K_1 \qquad (2.30)$$
(*bull spread relation*)

$$p_2 \leq {}^1\!/_2\,(p_1 + p_3) \quad \text{con } K_2 = {}^1\!/_2\,(K_1 + K_3) \qquad (2.31)$$
(*butterfly spread relation*)

In realtà la (2.26) e la (2.29) sono esattamente le relazioni che abbiamo già individuato nei precedenti paragrafi identificando il "tunnel" di Merton per le *calls* europee e i limiti superiori e inveriori per le *puts* europee.

Per quanto concerne la *butterfly spread relation,* abbiamo imposto la condizione restrittiva che i tre prezzi di esercizio siano equidistanti [$K_2 = {}^1\!/_2\,(K_1 + K_3)$], rimuovendo tale ipotesi, la relazione può essere riscritta nel modo seguente[27]:

$$c_2 \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}\,c_1 + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1}\,c_3 \quad \text{con } K_1 < K_2 < K_3 \qquad (2.32)$$

E' importante notare che nel caso particolare dei prezzi di esercizio equidistanziati [$K_2 = {}^1\!/_2\,(K_1 + K_3)$], la (2.32) equivale alla (2.28).

Inoltre, assumendo che i mercati siano perfetti, la violazione di una di queste tre relazioni genera opportunità di arbitraggio che possono essere sfruttate per conseguire profitto immediato e privo di rischio. Analizzeremo ora i casi delle *bull spread* e *butterfly spread relations* tramite due esempi, avendo già discusso in precedenza la *hedge relation*.

Esempio 2.4.1 Bull spread Relation

Il tasso di cambio corrente EUR/USD è 1,5. Il tasso di interesse privo di rischio composto continuamente è pari al 10%. Consideriamo tre *calls* europee scritte su €1.000 con vita residua di 1 anno e che differiscono solamente per i prezzi di esercizio:

Strike ($)	*Prezzo di mercato ($)*[11]
1490	20
1500	10
1510	5

La *bull spread relation*

$$c_1 - c_2 \leq e^{-rT}\,(K_2 - K_1) \quad \text{con } K_2 > K_1 \qquad (2.33)$$

[27] Per la dimostrazione matematica si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, p.27

[28] Per il calcolo del prezzo di mercato delle opzioni e dello *strike* si è moltiplicato il sottostante (€1.000) per lo *strike* ($/€) e il costo unitario ($/€).

non è soddisfatta dalle prime due *calls*.

Infatti nel nostro caso, c_1= 20\$, c_2= 10\$, K_1= 1490 \$, K_2= 1500 \$, e e^{-rT}= $e^{-0,1 \times 1}$ = 0,9048. Pertanto:

$$\$20 - \$10 = \$10 \geq (\$1500 - \$1490) \times 0,9048 = \$9,048 \qquad (2.34)$$

Per sfruttare l'opportunità di arbitraggio, costruiamo il seguente portafoglio:

1. Vendiamo un'unità della prima *call*;
2. Compriamo un'unità della seconda *call*;
3. Compriamo uno *zero-coupon bond* con vita residua 1 anno e valore corrente pari a $c_1 - c_2$.

Il valore nominale, F, dello *zero-coupon bond* è pari a

$$F = (c_1 - c_2)\, e^{rT} = \$11,0517 \qquad (2.35)$$

Il portafoglio di arbitraggio sulle *currency options* comporta le seguenti entrate e uscite al tempo corrente:

1. Un ricavo di \$20;
2. Un costo di \$10;
3. Un costo di \$10 (11,0517\$ $\times\, e^{-0,1 \times 1}$).

La somma algebrica di queste tre componenti è nulla. Quindi, il valore iniziale del portafoglio è nullo.

Tabella 8

Portafoglio	$S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$K_2 \leq S_T$
$+c_1$	0	$-(S_T - K_1)$	$-(S_T - K_1)$
$-c_2$	0	0	$S_T - K_2$
$-Fe^{-rT}$	F	F	F
0	F	$F - (S_T - K_1)$	$F - (K_2 - K_1)$

La *tabella 8* mostra i *payoffs* del portafoglio d'arbitraggio in diverse circostanze:

1. Se il prezzo dell'euro alla scadenza *T* è maggiore dello *strike* più elevato ($K_2 \leq S_T$), il *payoff* è pari a $F - (K_2 - K_1)$= \$11,0517 − \$10 = \$1,0517;
2. Se il prezzo dell'euro alla scadenza è compreso tra i due *strikes* più bassi ($K_1 \leq S_T < K_2$), il *payoff* è $F - (S_T - K_1)$. Questo importo è sempre positivo, poiché si trova nell'intervallo compreso tra a $F - (K_2 - K_1)$= \$1,0517 (quando $S_T = K_2$) e *F* = \$11,0517 (quando $S_T = K_1$).
3. Se il prezzo dell'euro alla scadenza è minore dello *strike* più basso ($S_T < K_1$), il *payoff* è sempre pari a *F* = \$11,0517.

In conclusione, siamo riusciti a costruire, data la violazione della suddetta relazione, un portafoglio a costo nullo, ma che offre un *payoff* positivo in tutti gli stati del mondo.

Esempio 2.4.2 Butterfly spread Relation

Supponiamo che siano verificate tutte le ipotesi dell'esempio precedente, eccetto il prezzo della *call* con *strike* pari a \$1490 che da 20 scende a \$19,95. La nuova situazione che si presenta è la seguente:

Strike (\$)	*Prezzo di mercato (\$)*
1490	19,95
1500	10
1510	5

Volendo verificare se la *butterfly spread relation* è verificata o meno, è importante prendere un accorgimento (*trick*) che consiste nel considerare i €1.000 sottostanti le opzioni, alla stregua di una *call* con prezzo di esercizio nullo. Si può quindi facilmente verificare che le tre prime *calls*, ossia i €1.000 di sottostante, la *call* avente *strike* pari a \$1490, e la call avente *strike* pari a \$1500, violano la *butterfly spread relation* (2.32), infatti:

$$\$19{,}95 > \frac{\$1500 - \$1490}{\$1500 - \$0} \times \$100 + \frac{\$1490 - \$0}{\$1500 - \$0} \times \$10 = \$19{,}93 \tag{2.36}$$

In tal caso la *call* con *strike* \$1490 è troppo cara e va venduta.

A copertura, vanno acquistate le *calls* con prezzi di esercizio estremi, ossia il sottostante di €1.000 (che equivale a \$1.500 all'epoca iniziale), e la *call* con *strike* \$1500.

In particolare, attuando una specifica strategia di *butterfly spread*, per ogni 1500 *calls* con *strike* \$1490 vendute, si devono acquistare 10 volte il sottostante di €1.000 (per un totale di €10.000, ossia \$15.000 all'epoca iniziale) e 1490 *calls* con *strike* \$1500. In tal caso si ha un ricavo iniziale di:

$$-\$15.000 + 1500 \times \$19{,}95 - 1490 \times \$10 = \$25 \tag{2.37}$$

Nessun esborso inoltre è previsto alla scadenza, come mostra la seguente tabella:

Tabella 9

Valore del portafoglio al tempo 0	*Valore del portafoglio alla scadenza T*		
	$\$0 < S_T \leq \$1490$	$\$1490 < S_T \leq \$1500$	$\$1500 < S_T$
$10 \times S_0$	$10 \times S_T$	$10 \times S_T$	$10 \times S_T$
$-1500 \times c_1$	0	$-1500 \times (S_T - 1490)$	$-1500 \times (S_T - 1490)$
$1490 \times c_2$	0	0	$1490 \times (S_T - 1500)$
$-\$25$	$10 \times S_T$	$2.235.000 - 1490\, S_T$	0
	(da \$0 a \$14.900)	(da \$14.900 a \$0)	(\$0)

2.4.1 Un utile espediente

Abbiamo visto pertanto che nel caso di 3 *calls* europee, che differiscono tra loro esclusivamente per lo *strike*, debbono essere verificate le suddette tre relazioni al fine di essere certi che non esistano opportunità di arbitraggio. Tuttavia, imponendo l'ulteriore restrizione che i prezzi di esercizio sono equidistanti tali che $K_1 < K_2 < \ldots < K_i < \ldots < K_j \ldots < K_k \ldots < K_m$, sembrerebbe necassario verificare che siano soddisfatte:

1. *m hedge relations* (una per ogni *call*):

$$S_0 e^{-qT} \geq c(K_i) \geq \max\,(S_0 e^{-qT} - K_i e^{-rT}, 0) \tag{2.38}$$

2. *m(m—1)/2 bull spread relations* (una per ogni coppia di *calls*):

$$c(K_i) > c(K_j) \quad \text{e} \quad c(K_i) - c(K_j) \leq (K_i - K_j)e^{-rT} \tag{2.39}$$

3. *m(m—1)(m—2)/6 butterfly spread relations* (una per ogni tripletta di calls):

$$c(K_j) \leq \frac{K_k - K_j}{K_k - K_i} c(K_i) + \frac{K_j - K_i}{K_k - K_i} c(K_k) \tag{2.40}$$

Pertanto il numero totale delle relazioni è pari a:

$$m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = \frac{m(m^2+5)}{6} \tag{2.41}$$

Il che vuol dire 1.350 relazioni da verificare per 20 *calls*, 4.525 per 30 *calls*, 10.700 per 40 *calls*, e così via.

In realtà, è stato dimostrato[29] che in caso di *m calls* scritte sulla stessa attività, aventi stessa vita residua, e *strikes* diversi ed equidistanziati, esiste una "*scorciatoia*" per verificare che non vi siano opportunità di arbitraggio nel mercato delle opzioni, che consiste nel verificare che siano rispettate solamente 3(*m*-1) relazioni di cui:

1. *m hedge relations;*
2. *m-1 bull spread relations;*
3. *m-2 butterfly spread relations*.

Infatti

$$m + (m\text{-}1) + (m\text{-}2) = 3m\text{-}3 = 3(m\text{-}1) \tag{2.42}$$

La (2.42) si spiega considerando il fatto che una volta verificate tutte le *m hedge relations* (ossia una per ogni *call*), è sufficiente verificare la relazione di *bull spread* solo per *strikes* contigui, e dunque $m-1$ relazioni, sfruttando la proprietà transitiva. Analogamente si opera per la verifica della *butterfly spread relation*: non si dovranno verificare le relazioni tra tutte le triplette di *calls* ma solo

[29] Per la dimostrazione si veda BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman,* CreateSpace, 2012, p.31

tra triplette con prezzi di esercizio contigui, in quanto una volta accertata la “convessità” locale della funzione, la sua convessità sui segmenti di prezzo d’esercizio più ampi è una conseguenza necessaria, ciò consente la verifica di sole $m-2$ relazioni.

2.5. Option pricing: Black-Scholes-Merton

Nel 1973 Fischer Black e Myron Scholes pubblicano un articolo[30] che è ritenuto fondamentale per la valutazione dei derivati. In particolare, ha avuto una grande influenza sul modo in cui i *traders* valutano le opzioni ed effettuano le relative coperture. Come lo stesso citato articolo riconosce, prima di loro già altri studiosi avevano tentato di generare una formula di valutazione delle opzioni: Sprenkle (1961), Ayres (1963), Boness (1964), Samuelson (1965), Baumol, Malkiel, e Quandt (1966), Thorp(1967) e Chen (1970), tuttavia *«non erano complete, poiché tutte coinvolgevano uno o più parametri arbitrari»*, infatti né Boness né Thorp *«compresero l’idea cruciale che, per eguagliare il tasso di attualizzazione al tasso di rendimento privo di rischio, si potevano utilizzare argomentazioni di arbitraggio in tempo continuo e in presenza di un numero continuo di stati»*[31].

Black e Scholes forniscono due dimostrazioni della loro formula di valutazione, una basata sul *Capital Asset Pricing Model* intertemporale di Merton (CAPM) per mettere in relazione il tasso richiesto dal mercato per investire nell’opzione con il tasso richiesto per investire nell’azione sottostante. L’altra, su intuizione e suggerimento di Merton, basata su un portafoglio, «finanziariamente autonomo» (*self financing*), composto dunque dall’opzione e dal sottostante, i cui pesi sono aggiustati dinamicamente (*re-balanced*) in modo tale che il portafoglio risulti localmente (istantaneamente) privo di rischio[32]. L’approccio suggerito da Merton è più generale rispetto quello di Black e Scholes, poiché non è basato sul CAPM. Entrambe le dimostrazioni conducono alla medesima equazione differenziale fondamentale, la cui soluzione, soggetta alla «condizione al contorno» (*boundary condition*) rappresentata dal valore alla scadenza dell’opzione [max ($S_T - K$,0)], è la formula Black-Scholes per il valore corrente, *c*, di una call.

Prima di esplorare la formula di Black-Scholes-Merton, analizziamo le ipotesi sotto le quali essa è valida, al fine di comprenderne meglio la formulazione.

2.5.1 Ipotesi e formula di valutazione

Di seguito sono riportate le ipotesi che sottendono il modello di Black-Scholes-Merton.

1. Il processo per il prezzo del sottostante è:
    a) $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$ nel discreto; (2.43)

[30] BLACK, Fischer Sheffey e SCHOLES, Myron S., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, May - Jun., 1973, pp. 637-654
[31] BARONE, Gaia, *Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu,* CreateSpace, 2012, p.51.
[32] BLACK, Fischer, “How We Came Up With, The Option Formula”, *Journal of Portfolio Management*; Winter 1989; pp.4-8

b) *dS= μSdt + σSdz* nel continuo; (2.44)

In entrambi i casi il prezzo del sottostante segue un *processo di Wiener* con il tasso di rendimento atteso (μ) e volatilità (σ) costanti, in altre parole, il tasso di rendimento del prezzo del sottostante segue un moto geometrico Browniano (*Geometric Brownian motion*) nel continuo, ossia:

c) *dS/S = μdt + σdz* (2.45)

Dove il tasso di rendimento atteso (μ) e la volatilità locale del tasso di rendimento del sottostante (σ) sono costanti.

Il prezzo dell'opzione, come quello di qualsiasi altro derivato, segue il *lemma di Itô (ossia un processo di Wiener generalizzato dx=a(x;t)dt+b(x;t)dz in cui i parametri a e b sono dipendenti dal tempo e dalla variabile sottostante x)*, in quanto ogni strumento derivato dipende sia dal tempo (t) e dal prezzo del sottostante (S), che, combinato con la (2.44) fornisce il processo seguito dal prezzo del derivato, ossia:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\,\sigma S dz \qquad (2.46)$$

dove $a(x;t) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)$ e $b(x;t) = \frac{\partial G}{\partial S}\,\sigma S dz$

Il prezzo dell'opzione e il prezzo del sottostante, che non paga dividendi durante la vita del derivato e che ha una distribuzione log-normale al tempo T, dipendono dalla stessa fonte d'incertezza (*dz*).

2. *Frictionless markets*: non esistono costi di transazione o tasse, i titoli sono perfettamente divisibili e il *trading* avviene continuamente nel tempo, ossia i titoli vengono negoziati continuamente. Prestare e vendere allo scoperto sono azioni consentite senza restrizioni, ciò vale anche per l'utilizzo dei relativi proventi. Il tasso di interesse di investimento e di finanziamento sono uguali.
3. *Preferenze e aspettative degli investitori*: si assume che gli investitori preferiscano il più al meno (*principio di non sazietà*).
4. Ogni titolo che dipende dal prezzo della azione deve soddisfare quest'equazione e non esistono opportunità di arbitraggio prive di rischio.
5. Il tasso di interesse a breve privo di rischio, *r*, è uguale per tutte le scadenze.
6. Il titolo da valutare è identificato dalle condizioni al contorno, ossia max ($S_T - K$,0), per la call europea.

Considerate queste ipotesi, alla formula finale si arriva partendo dall'assunto che si può costruire un portafoglio di azioni e opzioni, con opportuni pesi bilanciati nel continuo, che elimina la fonte di incertezza comune (*dz*) comportando che il portafoglio è istantaneamente privo di rischio e che dunque deve rendere il tasso istantaneo privo di rischio, infatti, qualora così non fosse gli arbitraggisti potrebbero trarre profitto vendendo o comprando titoli privi di rischio e acquistando o vendendo il portafoglio così costruito.

Infatti, si può costruire un portafoglio composto con questi pesi:

-1: derivato

$+\frac{\partial G}{\partial S}$= sottostante

Combinando la (2.44) con la (2.46) si ottiene che il valore del portafoglio è:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt \qquad (2.47)$$

Come si può notare, non figura il termine *dz*, ciò vuol dire che è stata eliminata la fonte di incertezza, e che dunque il portafoglio deve rendere, nell'istante, il tasso privo di rischio, per le motivazioni di arbitraggio sopra riportate. Sviluppando matematicamente la condizione appena esposta[33], si giunge all'*equazione differenziale fondamentale*:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rS\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rG \qquad (2.48)$$

Questa equazione è valida per qualsiasi derivato e, applicandovi le *boundary conditions* associate, è possibile ricavarne la formula di valutazione.

È importante sottolineare che nel caso della equazione sopra riportata, vale il principio della *Valutazione Neutrale verso il Rischio,* infatti la variabile μ non compare nell'equazione e l'equazione non dipende dalle variabili che sono influenzate dalla propensione al rischio. Pertanto, la soluzione dell'equazione è uguale a quella che si ottiene in un mondo neutrale verso il rischio e quindi si suppone che il tasso di rendimento atteso del sottostante, e dunque di qualsiasi titolo, sia uguale al tasso d'interesse privo di rischio, *r*. Pertanto, data tale argomentazione, il valore atteso dell'opzione a scadenza si può attualizzare al tasso d'interesse privo di rischio. Tuttavia, l'equazione è valida anche in un mondo che non è neutrale verso il rischio, infatti in tal caso cambia il *«rendimento atteso dell'azione e cambia il tasso di interesse per attualizzare il valore dei derivati. Questi due effetti si compensano esattamente tra loro»[34].*

Volendo ricavare la formula di valutazione di una *call* europea, la condizione al contorno associata da applicare alla equazione differenziale è

$$c = e^{-rT}\ \hat{E}\ [\max\ (S_T - K, 0)] \qquad (2.49)$$

dove S_T è il prezzo del sottostante al tempo *T*, *K* è il prezzo di esercizio, Ê è l'operatore valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio. In base alla log-normalità di S_T e all'equazione differenziale si ha che

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}\ N(d_2) \qquad (2.50)$$

[33] Per i passaggi matematici che conducono alla equazione differenziale e alla formula di valutazione per le opzioni si veda HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivat*i, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015. pp. 342-3, e pp.364-6.

[34] HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivat*i, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015. pp. 342-3, e pp.346.

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.51)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.52)$$

e dove *N(•)* è la funzione di distribuzione di una varabile normale con media nulla e deviazione standard pari a 1.

Con un ragionamento analogo, è possibile ricavare la rispettiva formula per la valutazione di una *put* europea:

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (2.53)$$

La (2.50) e la (2.53) rappresentano la formula di valutazione di un'opzione *call* o *put* europea.

Le formule appena presentate, sono di notevole chiarezza teorica e facilità applicativa, basandosi su quattro valori rilevati, e uno stimato (la volatilità implicita), tuttavia non mancano di destare talune perplessità che trovano origine nelle ipotesi sottostanti appena esplorate e che lo stesso «Oracolo di Omaha» Warren Buffett riconosce nella sua lettera agli azionisti del 2008: «*The Black-Scholes-Merton formula […] produces strange results when the long-term variety are being valued*»[35]. Elena Chirkowa nel suo libro "Investire come Warren Buffett"[36] fornisce una spiegazione delle considerazioni del brillante investitore:

> Quando stila i contratti derivati, Buffett tenta di correggere i difetti del modello Black-Scholes, che è tradizionalmente usato per valutare questi contratti. […] Trova che la formula funzioni meno bene su intervalli ampi, perché nel lungo periodo la volatilità non influenza il prezzo dell'opzione tanto quanto nel breve termine. A mio giudizio Buffett non si trova d'accordo con l'assunto che il prezzo di un'opzione su un titolo o un indice, per esempio, non dipenda dal suo livello equo.

In un passaggio della sua lettera, è lo stesso Buffett che, tramite un esempio[37] che riportiamo di seguito (nella traduzione libera dell'autore), mostra con chiarezza il concetto appena esposto:

> Supponiamo di vendere $ 1 miliardo di opzioni *puts* con maturity pari a 100 anni sull'indice S&P 500 ad un prezzo di esercizio di 903 (ossia livello dell' indice nel 12/31/08). Utilizzando l'ipotesi volatilità implicita per i contratti a lunga scadenza che facciamo, e combinando ciò con appropriate assunzioni circa gli interessi e dividendi, troveremmo che il "giusto" premio per il presente contratto secondo la formula di Black-Scholes è pari a $ 2,5 milioni.
>
> Per giudicare la razionalità di tale premio, abbiamo bisogno di valutare se lo S&P sarà valutato tra secolo da ora a meno di oggi. Certamente il dollaro avrà valore per una

[35] "La formula di Black-Scholes […] produce strani risultati quando si valuta la varietà a lungo termine [delle opzioni]". si veda http://www.berkshirehathaway.com/letters/2008ltr.pdf
[36] CHIRKOWA, Elena, "*Investire come Warren Buffett*", Hoepli, Febbraio, 2016, p. 187
[37] Si veda http://www.berkshirehathaway.com/letters/2008ltr.pdf pp.20-21

piccola frazione del suo valore attuale (con il 2% di inflazione ne varrà circa il 14 cent). In questo modo sarà un fattore che spinge il valore dichiarato dell'indice in alto. Molto più importante, tuttavia, è che cento anni di utili portati a nuovo faranno aumentare enormemente il valore della maggior parte delle aziende che compongono l'indice. Nel 20 ° secolo, il *Dow-Jones Industrial Average* è aumentato di circa 175 volte, soprattutto a causa di questo fattore *retained-earnings*. Considerando tutto ciò, credo che la probabilità di un calo dell'indice nel corso di un periodo di un cento anni sia di gran lunga inferiore all'1%. Ma usiamo questo scenario e supponiamo anche che il più probabile calo – qualora se ne verifichi uno – sia pari al 50%. Sotto queste ipotesi, le aspettative matematiche di perdita sul nostro contratto sarebbero di $ 5 milioni ($ 1 miliardi di X 1% x 50%).

Ma se avessimo ricevuto il nostro premio teorico di $ 2,5 milioni in anticipo, avremmo solo dovuto investire al 0,7% capitalizzato annualmente per coprire questa previsione di perdita. Tutto il capitale ciò in eccedenza sarebbe stato il profitto. Vorresti prendere in prestito denaro per 100 anni ad un tasso dello 0,7%?

Diamo un'occhiata al mio esempio considerandolo dal punto di vista del caso peggiore. Ricordate che il 99% delle volte, se le mie supposizioni sono corrette, non pagheremmo nulla. Ma anche nel caso peggiore tra il restante 1% delle possibilità - ossia, assumendo una perdita totale di $ 1 miliardo - il nostro costo del prestito sarebbe stato solo il 6,2%. Chiaramente, o le mie ipotesi sono assurde o la formula non è appropriata.

Il ridicolo premio che la formula di Black-Scholes impone nel mio esempio estremo è causato dalla inclusione della volatilità nella formula e dal fatto che la volatilità è determinata da quanto le azioni si sono mosse in un certo periodo passato di giorni, mesi o anni. Questa misura è semplicemente irrilevante nella stima del range valori, ponderato per le probabilità, del Business Americano tra 100 anni a partire da oggi. (Immaginate di ottenere ogni giorno un'azione di una fattoria da un vicino maniaco-depressivo e poi di usare la volatilità calcolata da queste azioni come ingrediente importante in un'equazione che predice un range di valori, ponderato per le probabilità, per l'azienda tra un secolo a partire da oggi)

Anche se la volatilità storica è un utile - ma lontano dall'essere infallibile - concetto per la valutazione delle opzioni a breve termine, la sua utilità diminuisce rapidamente all'aumentare della durata dell'opzione. A mio parere, le valutazioni che la formula di Black Scholes ha ora posto sulle nostre opzioni *puts* a lungo termine, sopravvaluta la nostra passività, anche se la sopravvalutazione diminuirà man mano che i contratti si avvicinano alla scadenza.

Ciò che emerge chiaramente da questo esempio, e che viene messo in discussione da Buffett «si riduce alla convinzione che i prezzi futuri nominali delle azioni non sono ben approssimati da una distribuzione log-normale con una volatilità stimata da dati storici»[38], comportando così una sopravvalutazione per le opzioni di più lunga scadenza. Queste considerazioni tuttavia non intaccano la bontà e la grande applicazione pratica che la citata formula trova nella realtà, infatti la stessa Berkshire Hathaway Inc., di cui è a capo Buffett, la utilizza per fini contabili.

[38] BRADFORD Cornel, "Warren Buffett, Black-Scholes and the Valuation of Long-dated Options", California Institute of Technology Pasadena, Giugno 2016, p.10.

3. Put-Call Symmetry

3.1 Opzioni con dividend yield e Put-call Symmetry

Sinora abbiamo sempre considerato sottostanti che non pagano dividendi durante la vita delle opzioni, tuttavia includere tale ipotesi comporta solamente lievi modifiche alle formulazioni finora analizzate. Prima di presentarle è opportuno però spiegarne la radice effettuando un breve ragionamento: il fatto che un sottostante, come le azioni, paghino dividendi durante la vita del derivato, comporta, nella data di stacco, che il prezzo del sottostante si riduca di un ammontare pari al dividendo stesso. Se consideriamo q come il *dividend yield*, ossia quel tasso costante su base annua che identifica il flusso dei dividendi pagati, possiamo affermare che esso comporta un tasso di crescita del prezzo del titolo minore, e per un ammontare pari proprio a q, a quello che si sarebbe percepito in sua assenza. Ciò vuol dire che se S_0, in assenza di *q,* alla scadenza *T* assume valore S_T, in presenza di dividendi sarebbe cresciuto:

1. da S_0 al tempo 0 a $S_T e^{qT}$ al tempo *T*;
2. da $S_0 e^{-qT}$ al tempo 0 S_T al tempo *T*.

Pertanto, da questa argomentazione, si ricava che al tempo T la distribuzione di probabilità del prezzo del titolo è la stessa in caso di flussi di dividendi in due casi:

1. il titolo ha un prezzo iniziale pari a S_0 e ha un *dividend yield* pari a *q;*
2. il titolo ha un prezzo iniziale pari a $S_0 e^{-qT}$ e non paga dividendi.

Per semplicità, d'ora in avanti adotteremo l'ultima ipotesi per occuparci di sottostanti che pagano dividendi, considerando il prezzo del sottostante all'epoca 0 scontato del tasso pari al suo *dividend yield*, per poterlo trattare alla stregua di un titolo che non paga dividendi.

Includendo tale ipotesi, è necessario apportare le opportune modifiche per i limiti inferiori delle opzioni, per la relazione di *put-call parity* e per la valutazione di opzioni che verranno di seguito elencate.

3.1.1 Limiti Inferiori e Put-Call Parity

La nuova formulazione può essere così riportata:

Limite inferiore per le calls europee:

$$c \geq \max(S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0); \tag{3.1}$$

Limite inferiore per le puts europee:

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0 e^{-qT}, 0); \tag{3.2}$$

Put-call parity:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 e^{-qT}. \tag{3.3}$$

Per quanto concerne la valutazione di opzioni:

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{3.4}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \tag{3.5}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.6}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.7}$$

Le formule sopra riportate si dimostrano con gli argomenti già esplorati nei precedenti paragrafi semplicemente sostituendo S_0 con $S_0 e^{-qT}$.

3.1.2 Currency options e Put-Call Symmetry

Le novità introdotte nel precedente paragrafo sono funzionali ad una più attenta e precisa trattazione delle *currency options*, ed in particolare della relazione di *put-call symmetry* che le caratterizza. Infatti possiamo considerare le opzioni su valuta come scritte su un sottostante, ossia la valuta estera, che rappresenta un investimento che offre un tasso di rendimento pari al tasso di interesse estero privo di rischio, r_f. Infatti, se si effettua un investimento pari a S_0 euro in dollari statunitensi, il rendimento dell'investimento in valuta estera sarà pari a $S_0 r_f$ euro. Pertanto tratteremo r_f alla stregua di un *dividend yield* noto.

Possiamo quindi riscrivere i limiti, la *put-call parity* e le formule di valutazione sostituendo *q* con r_f:

Limite inferiore per le currency calls europee:

$$c \geq \max(S_0 e^{-r_f T} - Ke^{-rT}, 0); \tag{3.8}$$

Limite inferiore per le currency puts europee:

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0 e^{-r_f T}, 0); \tag{3.9}$$

Put-call parity per le currency options:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 e^{-r_f T}. \tag{3.10}$$

Per quanto concerne la valutazione di *currency options*:

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{3.11}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \tag{3.12}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.13}$$

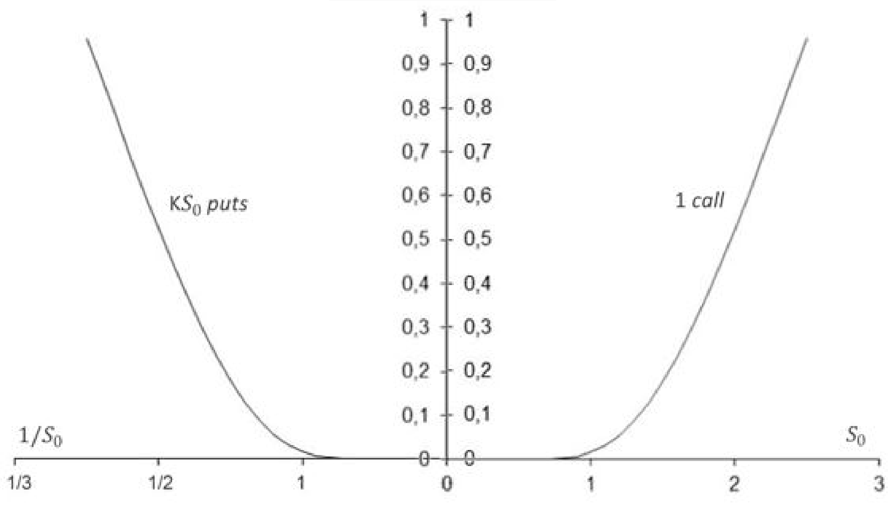
$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.14}$$

Oltre alla *put-call parity*, esiste un'altra relazione che lega il valore corrente, *c*, di una *call* al valore corrente, *p*, di una *put*, tale relazione è chiamata *put-call symmetry,* [Bates (1988)[39]]:

$$c(S_0, K, T, r_A, r_B, \sigma) = KS_0 p(1/S_0, 1/K, T, r_B, r_A, \sigma) \tag{3.15}$$

Nell'ottica delle *currency options* S_0, coerentemente con l'interpretazione sinora utilizzata, rappresenta il tasso di cambio corrente, ossia il prezzo della valuta estera espresso per unità di valuta interna al tempo 0. Lo *strike* K rappresenta il tasso di cambio al quale si acquista o vende valuta estera quando si esercita l'opzione, nel caso delle europee esclusivamente alla scadenza T, r_B il tasso di interesse estero privo di rischio (che più in generale può essere scritto come *dividend yield q* del sottostante), r_A il tasso di interesse interno privo di rischio e σ la volatilità del tasso di cambio sottostante.

Figura 6



Put-Call Symmetry: K=1,5; T=1; r_A= 0,1; r_B= 0,08; σ= 0,3

[39] La *Put-Call Symmetry* (PCS), fu introdotta per la prima volta in finanza da Bates (1988) come un metodo per misurare l'asimmetria (*skewness*).
Si veda BATES, David, 1988, "The crash premium: Option pricing under asymmetric processes, with applications to options on Deutschemark futures", *Working paper,* pp. 38-88, University of Pennsylvania, Rodney L. White Center.

La *put-call symmetry* è graficamente riportata nella *figura 6*[40], che mette a confronto il valore di una *call*, in funzione del prezzo del sottostante S_0, e il valore di KS_0 *puts*, in funzione del reciproco, *1/*S_0, del sottostante. Il grafico è strato tracciato utilizzando le formule di Black-Scholes-Merton presentate in questo paragrafo con l'ipotesi che i parametri siano: K= 110; T = 1; r_A = 0,1; r_B = 0,08; σ = 0,3. Quando S_0 = 110 la *call* è *at the money* e assume lo stesso valore di 12.100 (KS_0= 110 × 110) *at the money puts* con *excercise price* di 1/110. Dunque, il grafico che descrive il valore delle 12.100 *puts* è speculare, in corrispondenza dell'asse delle ordinate, al grafico che descrive il valore corrente, *c*, delle *calls*.

La *tabella 10* riporta la dimostrazione della *put call symmetry* appena analizzata.

Tabella 10

Valore corrente al tempo 0	*Valore corrente al tempo T*	
	$S_T < K \Leftrightarrow 1/S_T > 1/K$	$K \leq S_T \Leftrightarrow 1/S_T \leq 1/K$
$c(S_0, K, T, r_A, r_B, \sigma)$	0	$S_T - K$
$KS_0 p(1/S_0, 1/K, T, r_B, r_A, \sigma)$	0	$KS_T(1/K - 1/S_T) = S_T - K$

La *tabella 10* mette in risalto un aspetto importante della relazione illustrata: la "quantità" delle *puts* non è fissa, al contrario essa varia in funzione del prezzo del sottostante S_0. Infatti, al tempo 0 è pari a KS_0, al tempo T è pari a KS_T. Inoltre essa comunica anche che per replicare la *call*, è necessario comprare solamente *K puts*, con valore corrente unitario *p*. Tuttavia, il valore complessivo delle *puts* viene espresso in termini di KS_0p perché il valore unitario *p* è inizialmente espresso in una diversa unità di misura, ossia la valuta estera e, per convertilo nella stessa unità di misura usata per il valore della *call*, deve essere moltiplicato per il tasso di cambio S_0, al fine di rendere le due grandezze comparabili. Questo aspetto verrà in particolare spiegato nella parte successiva di questo paragrafo.

Abbiamo appena dimostrato che una *call* equivale a KS_0 *puts*, sotto le ipotesi sopra indicate, ma la relazione, in quanto simmetrica, è valida anche al contrario. Pertanto, la andremo ora ad analizzare da un altro punto di vista, portando però questa volta una dimostrazione che, invece di essere in forma tabellare e considerare solo i *payoffs* al tempo 0 e alla scadenza *T*, si avvale delle formule di Black-Scholes-Merton per la valutazione di opzioni, assumendo dunque verificate tutte le ipotesi che sottendono il relativo modello, come per esempio il processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante delle opzioni.

In particolare, la *put-call symmetry* è una relazione particolarmente rilevante per i *currency options traders,* in quanto[41]:

> Le *puts* e le *calls* su valute sono simmetriche. Una *put* che consente di vendere un'unità della valuta A in cambio di K unità della valuta B equivale a una call che consente di acquistare K unità della valuta B in cambio di un'unità della valuta A.

[40]Per tracciare il grafico mi sono avvalso del software "DerivaGem 3.00" contenuto in HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015.

[41] HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivat*i, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015. pp. 342-3, e pp.394

Ciò si può dimostrare tenendo presente però che l'opzione per comprare *K* unità della valuta B per un'unità della valuta A è una *call* scritta su *K* unità di B. In genere, la *call* su valuta negoziata nei mercati europei è scritta su un'unità della valuta estera (B), non su *K* unità di B. Tuttavia, fin dai tempi di Merton (1973), si sa che, per la proprietà di omogeneità[42], il valore di un'opzione *call* scritta su *K* unità di B è pari a *K* volte il valore di un'opzione su un'unità di B.

Per la dimostrazione, iniziamo col considerare una *put,* con prezzo d'esercizio *K*, scritta su un'unità della valuta A. Sia S_0 il prezzo della valuta A espresso in unità della valuta B. Il valore corrente $p_B(K)$ della *put*, espresso in unità della valuta B, è pari a

$$p_B(K) = Ke^{-r_B T}N(-d_2) - S_0 e^{-r_A T}N(-d_1) \tag{3.16}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_B - r_A + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.17}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_B - r_A - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.18}$$

dove r_A e r_B sono, rispettivamente, i tassi di interesse privi di rischio nelle valute A e B, espressi su base annua e composti continuamente.

Ponendo

$$S^* = \frac{1}{S_0} \qquad \text{e} \qquad K^* = \frac{1}{K}$$

$$d_1^* = -d_2 = \frac{-\ln(S_0/K) - (r_B - r_A - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln(S_0/K) + (r_A - r_B + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln(S_0^*/K^*) + (r_A - r_B + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2^* = -d_1 = \frac{-\ln(S_0/K) - (r_B - r_A + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln(K/S_0) + (r_A - r_B - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

[42] Si veda MERTON, Robert C., "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, No. 1, Spring, 1973, p.147 ed in particolare il *Teorema 6* analizzato nel paragrafo 2.2 di questo lavoro.

$$= \frac{\ln(S_0{}^*/K^*) + \left(r_A - r_B - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1{}^* - \sigma\sqrt{T}$$

dunque si ottiene

$$p_B(K) = S_0\, S_0{}^*\, [Ke^{-r_B T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_A T} N(-d_1)]$$

$$= S_0[S_0{}^* K e^{-r_B T} N(-d_2) - S_0{}^* S_0 e^{-r_A T} N(-d_1)]$$

$$= KS_0[S_0{}^* e^{-r_B T} N(-d_2) - S_0{}^* S_0 K^* e^{-r_A T} N(-d_1)]$$

$$= KS_0[S_0{}^* e^{-r_B T} N(-d_2) - K^* e^{-r_A T} N(-d_1)]$$

$$= K[S_0\, c_A(K^*)] = K\, c_B(K^*)] \quad \text{C.V.D.}$$

dove $c_A(K^*)$ è il valore di una call, con prezzo di esercizio K^*, scritta su un'unità di valuta A. Il valore corrente della call, $c_A(K^*)$, è espresso in unità della valuta A. Per esprimerlo in unità della valuta B, viene moltiplicato per S_0. In realtà l'eguaglianza più precisamente non è tra una *put* scritta su A e una *call* scritta su *K* unità di B, poiché, come è già stato ricordato, in genere la *call* è scritta su un'unità di B e non su *K* unità di B, pertanto l'identità è tra una *put* scritta su A e *K calls* scritte su B ed espresse nella stessa valuta, poiché per il principio di omogeneità di Merton, il valore di una call scritta su *K* unità della valuta B, è pari a *K* volte il valore di una call scritta su un'unità di B.

Si è così dimostrato che la *put* su A equivale a *K calls* su B, con prezzo di esercizio $K^*=1/K$. In altri termini, la *put* che consente di vendere un'unità della valuta A in cambio di *K* unità di B equivale a una *call* che consente di acquistare *K* unità di B in cambio di un'unità di A.

Qualora tale relazione venga violata, all'epoca 0 si creerà un'opportunità di arbitraggio, potendo generare un profitto immediato e privo di rischio. Questa opportunità, una volta sfruttata, riporterà i prezzi allineati, secondo le dinamiche già diffusamente discusse in precedenza. Vedremo ora due esempi, in assenza di costi di transazione prima, e in presenza poi, in cui può essere sfruttata un'opportunità di arbitraggio per la violazione di simmetria sulle *currency options*.

Esempio 3.1.2.1

Si consideri il tasso di cambio EUR/USD, e si supponga che siano verificate le seguenti ipotesi in relazione al tasso:

$$S_0 = \$1{,}5,\ \sigma = 30\%,\ r = 10\%,\ r_f = 8\%.$$

Ipotizziamo che una *put* europea, con vita residua pari ad un anno (T = 1), sia scritta su €1 e abbia uno *strike* K = $1,5 e che il suo valore corrente, p, sia pari a $0,15011. Supponiamo che il valore corrente, c, di una *call* europea, con T = 1, scritta su $1 ($1/S_0$ = €0,6666) e avente *strike* pari a 1/K = €0,6666 sia pari a $0,06000.

Verifichiamo se la relazione di *put-call symmetry* sia rispettata o meno:

$$p(S_0, K, T, r, r_f, \sigma)=\$0{,}15011 > \$1{,}5 \times \$1{,}5 \times \$0{,}06 = \$0{,}135 = KS_0c(1/S_0, 1/K, T, r, r_f, \sigma)$$

Utilizzando le formule di valutazione di Black-Scholes-Merton si giunge alla conclusione che la simmetria tra le relative opzioni non è rispettata, e che dunque una strategia di arbitraggio può essere adottata al fine di sfruttarne l'opportunità.

Tabella 11

	Tempo 0	*Tempo T*	
c	*Valuta*	*\$1,5< S_T ⇔ 1/S_T<€0,6666*	*S_T< \$1,5 ⇔1/S_T>€0,6666*
0,135\$	1. Vendere la put al valore di \$0,15011	1. Osservare l'abbandono della *put*	1. Subire l'esercizio della put $-$ (\$1,5 $- S_T$)
	2. Comprare KS_0 calls per \$0,135	2. Dichiarare l'abbandono delle *calls*	2. Dichiarare l'esercizio delle calls (valutate al nuovo tasso S_T) \$1,5 × S_T[(€0,6666 $- 1/S_T$)] = \$1,5 $- S_T$
	3. Profitto: \$0,01511 (= \$0,15011 $-$ \$0,135)	3. Profitto: \$0,01511 (= \$0,15011 $-$ \$0,135)	3. Profitto: 0,01511 \$ (= \$0,15011 $-$ \$0,135)

Nota: S_0= \$1,5; K= \$1,5; 1/S_0= €0,6666; 1/K= €0,6666;T = 1; *p* = \$0,15011; σ= 30%; r = 10%; r_f = 8%.

Questa strategia consiste ovviamente nell'assumere una posizione corta sulla *put*, e assumere una posizione lunga su KS_0*calls* pagando solamente \$0,135 invece che \$0,15011 all'epoca 0. Questo disallineamento genera un profitto immediato e privo di rischio. All'epoca *T* qualora il nuovo tasso di cambio sia superiore rispetto lo *strike K*, né la *call*, né la *put* verranno esercitate, poiché è più conveniente effettuare le transazioni al "prezzo" di mercato, acquistando o vendendo la valuta estera al tasso di cambio (ossia al "prezzo") corrente. Qualora invece il nuovo tasso di cambio S_0 sia maggiore dello *strike* della *put*, sia questa che le *calls* verranno esercitate ma, avendo lo stesso *payoff* all'epoca *T* ciò non comporterà alcun esborso per l'arbitraggista che potrà usare il ricavato derivante dalla posizione lunga sulle *calls*, per chiudere, e dunque coprirsi, la posizione corta sulla *put*. Infatti all'epoca *T*, le *K calls* acquistate al periodo 0 non saranno più valutate al tasso di cambio S_0, bensì al tasso S_T consentendo all'arbitraggista di ottenere lo stesso *payoff* finale. Questa strategia è illustrata dalla *tabella 11*: se S_T è maggiore di \$1,5, allora si dovrà osservare l'abbandono della *put*, ossia la controparte a cui si è venduta l'opzione non avrà convenienza ad esercitarla e la lascerà scadere priva di valore, mentre il compratore delle *calls* le eserciterà, percependo un profitto. Se S_T è minore di \$1,5, allora si subirà l'esercizio della *put*, ma al contempo verranno esercitate le *calls* valutate al nuovo tasso di mercato, ottenendo così un guadagno positivo. Poiché tutti gli arbitraggisti adotteranno questa strategia, ciò farà scendere il prezzo della *put* e salire quello della *call*, ristabilendo l'equilibrio e il rispetto della simmetria.

Esempio 3.1.2.2

Così come abbiamo introdotto i costi di transazione impliciti (*bid-ask spread*) per la *put-call parity*, è opportuno introdurli anche per questa ulteriore relazione.

La *put-call symmetry,* tenendo conto delle quotazioni «denaro-lettera», si "sdoppia" in:

$$K\,S_{ask}c_{bid} < p_{ask} \tag{3.19}$$

$$K\,S_{bid}c_{ask} > p_{bid} \tag{3.20}$$

dove

$$p(S_0, K, T, r, r_f, \sigma) = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0\,e^{-r_fT}N(-d_1) \tag{3.21}$$

$$KS_0c(1/S_0, 1/K, T, r_f, r, \sigma) = \left[\frac{1}{S_0}\,e^{-rT}N(d_1{}^*) - \frac{1}{K}e^{-r_fT}\,N(d_2{}^*)\right]KS_0 \tag{3.22}$$

e

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1{}^* = -\,d_2$$

$$d_2{}^* = -\,d_1$$

Riscrivendo le formule considerando i prezzi *bid* e *ask*:

$$p_{ask}(S_{0_{bid}}, K, T, r_{bid}, r_{f_{bid}}, \sigma) = Ke^{-r_{bid}T}N(-d_2) - S_{0_{bid}}\,e^{-r_{f_{bid}}T}N(-d_1) \tag{3.23}$$

$$KS_{0_{bid}}c_{ask}(1/S_{0_{bid}}, 1/K, T, r_{f_{bid}}, r_{bid}, \sigma) = \left[\frac{1}{S_{0_{bid}}}e^{-r_{bid}T}N(d_1{}^*) - \frac{1}{K}e^{-r_{f_{bid}}T}\,N(d_2{}^*)\right]KS_{0_{bid}} \tag{3.24}$$

e

$$d_1 = \frac{\ln(S_{0_{bid}}/K) + \left(r_{bid} - r_{f_{bid}} + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_{0_{bid}}/K) + \left(r_{bid} - r_{f_{bid}} - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1{}^* = -\,d_2$$

$$d_2{}^* = -\,d_1$$

Nel caso delle quotazioni *bid* delle opzioni andranno usati i tassi opposti rispetto quelli figuranti nelle equazioni. Si noti che per determinare il prezzo *ask* della *put* si utilizzano i tassi *bid* e $S_{0_{bid}}$, questo perché il valore intrinseco di una *put*, su cui si è assunta una posizione lunga e che si è dunque acquistata al prezzo *ask*, equivale alla differenza tra il prezzo a cui si vende il sottostante, ossia K, e il prezzo a cui si sarebbe potuto vendere senza ricorrere all'opzione, ossia il prezzo di mercato $S_{0_{bid}}$. Per il calcolo invece del valore unitario c_{ask} si tiene conto del prezzo $S_{0_{bid}}$ poiché anche se normalmente si considera la quotazione *ask* del sottostante della *call*, in questo caso il sottostante è dato dal reciproco di quello della rispettiva *put*, pertanto *1/* $S_{0_{bid}}$ invece che $S_{0_{ask}}$.

Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

$S_{0_{ask}}$= \$1,5	$S_{0_{bid}}$= \$1,4	r_{ask}= 10%	r_{bid}= 8%
$r_{f_{ask}}$= 7%	$r_{f_{bid}}$= 5%	σ= 30%	K=\$1,5
c_{ask}= €0,1	c_{bid}= €0,09	p_{ask}= \$0,1897	p_{bid}= \$0,1444

I tassi sono espressi su base annua e composti continuamente, e la vita residua di entrambe le opzioni è pari a 1 (T=1).

Pertanto

$$K\,S_{ask}c_{bid} = \$0{,}2025 > \$0{,}1897 = p_{ask}$$

$$K\,S_{bid}c_{ask} = \$0{,}21 > \$0{,}1444 = p_{bid}$$

Dunque la prima disuguaglianza non è rispettata, e un arbitraggista potrebbe conseguire un guadagno, pari alla differenza tra \$0,2025 e \$0,1897, immediato e privo di rischio andando *short* su $K\,S_{ask}$ *calls* e *long* su p_{ask}. La *tabella 12* mostra la realizzazione della strategia di arbitraggio. La seconda colonna mostra l'esborso (segno meno) o l'introito (segno più) che l'operazione mostrata nella colonna 1 comporta al tempo 0. Le colonne 3-6 indicano gli esborsi e gli introiti richiesti dal l'operazione di segno opposto a quella indicata nella colonna 1. Per esempio, l'assunzione di una posizione corta su $K\,S_{ask}$ *calls* viene coperta con l'acquisto di una *put* al suo prezzo lettera. Inoltre la colonna finale mostra che il profitto di arbitraggio al tempo 0 è \$0,0128, mentre l'operazione di segno contrario, ossia l'acquisto di $K\,S_{bid}$ *calls* e la vendita di una *put* comporta una perdita di -\$0,0656. Tutti i valori in tabella sono espressi per unità di valuta, pertanto se le opzioni fossero scritte su 1.000 unità di valuta eserta, i profitti e le perdite andrebbero ovviamente moltiplicati per 1.000.

Tabella 12

Posizione	*Iniziale*	*Sintetica*				
		long c	*short c*	*long p*	*short p*	
long c	- 0,21	-	-	-	0,1444	- 0,0656
short c	0,2025	-	-	- 0,1897	-	0,0128
long p	- 0,1897	-	0,2025	-	-	0,0128
short p	0,1444	- 0,21	-	-	-	- 0,0656

Nota: nei valori di c è già considerato il fattore $K\,S_{ask}$ *o* $K\,S_{bid}$

Volendo trovare quali sarebbero dovuti essere i corretti prezzi della *call* e della *put*, possiamo utilizzare le formule di Black-Scholes-Merton, da cui notiamo che i valori della *put* erano corretti, a differenza di quelli della *call*, che sarebbero dovuti essere:

$$c_{bid} = €0{,}0641 \text{ e } c_{ask} = €0{,}0903$$

Da cui

$$K\, S_{ask} c_{bid} = \$0{,}1444 < \$0{,}1897 = p_{ask}$$

$$K\, S_{bid} c_{ask} = \$0{,}1897 > \$0{,}1444 = p_{bid}$$

Come si può notare, utilizzando le formule di Black-Scholes-Merton la *put-call symmetry* è rispettata, ed in particolare è soddisfatta addirittura un'ulteriore condizione che non avevamo espresso nelle formule (3.19) e (3.20) ossia che:

$$K\, S_{ask} c_{bid} = p_{bid} \quad (3.25)$$

$$K\, S_{bid} c_{ask} = p_{ask} \quad (3.26)$$

In realtà, questa condizione non è necessaria affinché sia rispettata la *put-call symmetry*, poiché è sufficiente che siano rispettate le disequazioni (3.19) e (3.20), senza che siano necessariamente verificate le suddette identità. Tuttavia, potremmo dire che è una conseguenza naturale derivante dal comportamento della domanda e dell'offerta, infatti supponiamo il seguente scenario:

$$K\, S_{ask} c_{bid} > p_{bid} \quad (3.27)$$

$$K\, S_{bid} c_{ask} < p_{ask} \quad (3.28)$$

Ricordando che le quotazioni *ask* di un titolo sono sempre superiori alle rispettive quotazioni *bid*, ne discende che:

$$p_{bid} < K\, S_{ask} c_{bid} < K\, S_{bid} c_{ask} < p_{ask}$$

In questo scenario, la *put-call symmetry* è soddisfatta, in quanto da tale relazione si ha che:

$$K\, S_{ask} c_{bid} < p_{ask}$$

$$K\, S_{bid} c_{ask} > p_{bid}$$

Che è proprio la *put-call symmetry*.

Tuttavia, noi sappiamo che $K\, S_{ask} c_{bid}$ fornisce, al tempo T, lo stesso identico *payoff* di p_{bid}, lo stesso vale per $KS_{bid} c_{ask}$ e p_{ask}, eppure i prezzi non sono necessariamente allineati, come espresso da (3.27) e (3.29). Nonostante ciò, è importante sottolineare che non esiste, e non deve esistere, una opportunità di arbitraggio, poiché la *put-call symmetry* è rispettata, ed infatti qualora si decidesse di vendere e acquistare dei titoli, alcuni saranno quotati al *bid* e altri all'*ask*, soddisfacendo le disuguaglianze (3.19) e (3.20). Tuttavia, poiché i suddetti titoli offrono lo stesso *payoff* finale, assumendo la stessa posizione, ossia *long* su entrambi, o *short* su entrambi, si osserverà un aumento della domanda del titolo il cui prezzo è inferiore ($K\, S_{bid} c_{ask}$), o un aumento dell'offerta del titolo il cui prezzo è superiore (p_{bid}), fino a quando non verranno raggiunti gli stessi livelli di prezzo dei rispettivi titoli (ossia, rispettivamente, p_{ask} e $K\ S_{ask}c_{bid}$), mantenendo però inalterato il soddisfacimento della *put-call symmetry*. Si giungerà così alla seguente situazione:

$$K\,S_{ask}\,c_{bid} < p_{ask} = K\,S_{bid}\,c_{ask}$$

$$K\,S_{bid}\,c_{ask} > p_{bid} = K\,S_{ask}\,c_{bid}$$

Che è esattamente quanto illustrato in precedenza dall'esempio.

Si osservi che l'aumento della domanda e dell'offerta dei titoli non è in alcun modo legato a motivi di arbitraggio, poiché la *put-call symmetry* è rispettata, ma alla semplice relazione di domanda e offerta che lega il prezzo alle quantità (che nel nostro caso abbiamo considerato *payoff*) di un bene: potendo infatti ottenere la stessa quantità (*payoff*) ad un prezzo inferiore, o vendere la stessa quantità (*payoff*) ad un prezzo superiore, ciascun operatore usufruirà del vantaggio, comportando un progressivo livellamento del prezzo. In altre parole, se $K\,S_{bid}c_{ask}$, che offre lo stesso identico *payoff* alla scadenza di p_{ask}, ha un costo inferiore di p_{ask}, qualsiasi operatore razionale, desideroso di ottenere quel dato *payoff* alla scadenza, preferirà $K\,S_{bid}c_{ask}$ a p_{ask}, facendo così aumentare la domanda del primo, e spingendo il prezzo fino a quello di p_{ask}. Ovviamente, non si può in questo caso vendere il titolo col prezzo maggiore, ossia p_{ask}, perché quest'ultimo è un prezzo di acquisto, e non di vendita, che è invece p_{bid}, rendendo così impossibile una opportunità di arbitraggio.

3.2 Put-Call Symmetry: un caso particolare

La (3.16) esprime la più generale relazione di *put-call symmetry*, senza dunque effettuare assunzioni concernenti la volatilità del prezzo del sottostante, ma le relative opzioni non sono scritte sullo stesso sottostante. Al contrario, la relazione di simmetria individuata da Peter Carr si riferisce ad opzioni (europee o americane) che sono scritte sullo stesso *underlying asset*. Tuttavia, le ipotesi[43] sono più restrittive, ma comunque valide all'interno del modello di Black-Scholes-Merton.

La *put-call symmetry* di Carr è:

$$c(S_0, K, T, r_A, r_B, \sigma) = \frac{K}{S_0}\, p\left(S_0, \frac{{S_0}^2}{K}, T, r_A, r_B, \sigma\right) \tag{3.29}$$

Tale equazione esprime che quando il prezzo *spot* del sottostante è pari a S_0, una *call* con *strike K* ha lo stesso valore di K/S_0 *puts* con *strike* ${S_0}^2/K$. La dimostrazione in forma tabellare della eguaglianza tra i due *payoffs* alla scadenza è rappresentata nella tabella 13.

Tabella 13

Valore corrente al tempo 0	Valore corrente al tempo T	
	$S_T < K \Leftrightarrow S_T > {S_T}^2/K$	$K \le S_T \Leftrightarrow S_T \le {S_T}^2/K$
$c(S_0, K, T, r_A, r_B, \sigma)$	0	$S_T - K$
$K/S_0\ p(S_0, {S_0}^2/K, T, r_A, r_B, \sigma)$	0	$(K/S_T)({S_T}^2/K - S_T) = S_T - K$

43 BOWIE, Jonathan, e CARR, Peter, "Static Simplicity", *Risk*, vol. 7, No. 8, pp.45-9, August 1994

Nell' articolo "*Static Hedging of Exotic Options*" Peter Carr, Katrina Ellis e Vishal Gupta (1998) ricavano la relazione sopra esposta sotto particolari tipi di ipotesi. In primo luogo si prende in considerazione un mercato privo di costi di transazione (*frictionless market*) e sprovvisto di opportunità di arbitraggio. In secondo luogo, sono imposte delle restrizioni sul processo stocastico seguito dal prezzo del sottostante, in particolare è un processo di diffusione (ossia di Wiener) con un *drift* nullo sotto qualsiasi misura di probabilità neutrale verso il rischio e dove il coefficiente di volatilità soddisfa una certa condizione di simmetria, cosicché si possano escludere salti nel processo del prezzo. L'assunzione di un *drift* nullo ovviamente è ininfluente per le opzioni scritte sui *forward*, ossia sui prezzi futuri, del sottostante. Per le opzioni scritte sul prezzo corrente (*spot*), l'assunzione invece implica assenza di costi di trasferimento/ immagazzinamento (*cost of carry*). Questi ultimi sono dati dal costo di immagazzinamento dell'attività sottostante, più il tasso di interesse pagato per finanziare l'acquisto di tale attività, meno i redditi derivanti da tale attività e dunque, per un contratto derivato scritto su una valuta, il costo di trasferimento è pari alla differenza tra il tasso di interesse privo di rischio interno ed il tasso di interesse privo di rischio estero (r_A - r_B). Pertanto, una ipotesi di *drift* nullo implica che per le opzioni scritte su azioni, il *dividend yield* dell'azione sarà sempre pari al tasso di interesse *risk-free*, mentre nel caso delle *currency options*, il tasso interno di rendimento sarà sempre pari al tasso estero, comportando dunque che il prezzo *spot* del sottostante sarà sempre pari al relativo prezzo *forward* (in quanto: $F= S_0 e^{(r-q)T}$, ma per ipotesi $r = q$, e dunque F=S). Pertanto, le opzioni scritte sul prezzo corrente si comporteranno come se fossero scritte sul *future*. Inoltre, si assume che la volatilità del prezzo *forward* è una funzione nota $\sigma(F_t ; t)$ del prezzo *forward* F_T e del tempo T. In particolare, la condizione di simmetria assunta è la seguente:

$$\sigma(F_t ; t) = \sigma(F^2/F_t ; t) \qquad \text{per tutti } F_t \geq 0 \text{ e } t \in [0; T] \qquad (3.30)$$

Dove F è il prezzo *forward* corrente.

È bene ricordare, come già anticipato, che queste ipotesi, tra cui dunque la stessa (3.30), sono valide all'interno del modello Black-Scholes-Merton, in cui per esempio la volatilità è deterministica, e dunque $\sigma(F_t ; t)= \sigma (t)$. In particolare, la simmetria è soddisfatta quando la volatilità è tracciata come una funzione del tipo $X_t = \ln(F_t/F)$. Considerando infatti $v(X_t,t)= \sigma(F_t ; t)$, la condizione che ne deriva è:

$$v (x; t) = v (-x; t) \qquad \text{per ogni } x \in R \text{ e } t \in [0; T] \qquad (3.31)$$

Pertanto, in un mercato privo di costi di transazione, in assenza di opportunità di arbitraggio, in cui il processo stocastico del prezzo del sottostante ha un *drift* nullo ed in cui è soddisfatta la relazione di simmetria (3.31), è stato dimostrato[44] che esiste la seguente relazione di *put-call symmetry* tra opzioni *call* e *put*:

$$c(K)K^{-1/2} = p(H)H^{-1/2} \qquad (3.32)$$

dove la media geometrica dello *strike* della *call* K e dello *strike* della *put* H è pari al prezzo *forward* F:

$$F= (KH)^{1/2} \qquad (3.33)$$

[44] Per la dimostrazione matematica si veda CARR, Peter, ELLIS, Katrina e GUPTA, Vishal, "Static Hedging of Exotic Options", *The Journal of Finance*, Volume 53, No. 3, Giugno, 1998, pp.1165-1190, Appendix.

Nonostante la (3.32) possa sembrare diversa dalla (3.29) precedentemente esposta e dimostrata in forma tabellare, in realtà è una formulazione diversa per esprimere la stessa relazione, solamente aggiungendo l'ipotesi di *drift* nullo che nella (3.29), invece, era arbitrario. Infatti, rimuovendo tale ipotesi, è facile vedere come ci si riconduce alla (3.29) partendo dalla (3.32), concentrandoci, però, su opzioni non scritte sui *future*, ma sui prezzi *spot*, in quanto questa volta, avendo rimosso la suddetta ipotesi, i due prezzi non coincideranno più.

Dunque, ciò posto, dalla (3.33) si ha che:

$$S = (KH)^{1/2} \qquad \text{e dunque} \qquad H = S^2/K \tag{3.34}$$

E dalla (3.32):

$$c(K)K^{-1/2} = p(H)H^{-1/2} \qquad \text{pertanto} \qquad c(K) = p(H)(K/H)^{1/2} \tag{3.35}$$

Sostituendo la (3.34) nella (3.35) ne deriva che:

$$c(K) = (K/S)p(S^2/K)$$

che è esattamente la relazione individuata dalla (3.29) C.V.D.

3.3 Put-Call Symmetry Americana

Sinora abbiamo esplorato la relazione di simmetria per le opzioni di tipo europeo, in realtà Peter Carr e Marc Chensey, nel loro *working paper* "*American put-call symmetry*", hanno dimostrato ed esteso la relazione anche ad opzioni di tipo americano, scritte su sia su sottostanti appartenenti ad economie diverse, sia su attività appartenenti alla stessa economia, sotto specifiche ipotesi restrittive, che richiamano in parte quelle già esaminate nel precedente paragrafo. Essi innanzitutto definiscono la «*moneyness*» di una *call* americana come il logaritmo del rapporto del prezzo del sottostante rispetto lo *strike*, mentre nel caso della *put* è pari al logaritmo del rapporto tra lo *strike* e il prezzo del sottostante. Inoltre è assunto un mercato privo di costi di transazione (*frictionless market*), e per cui vale il principio di non arbitraggio. Per semplicità, il tasso di interesse r e i dividendi q pagati dal titolo si assumono costanti e continui nel tempo. Inoltre, il processo del prezzo dell'attività sottostante comune alle due opzioni segue un processo di Itô con *drift* arbitrario, e non necessariamente nullo. In aggiunta, nonostante i prezzi *spot* siano diversi, in quanto la stessa attività è considerata quotata in due economie diverse, i risultati raggiunti con lo sviluppo di tale modello sono applicabili solo se le opzioni hanno stesso grado di *moneyness*, e scadenza.

Inoltre, K si definisce come media geometrica degli *strikes* delle rispettive opzioni:

$$K = \sqrt{K_c K_p} \tag{3.36}$$

Dove K_c e K_p sono rispettivamente gli *strikes* della *call* e della *put*.
La volatilità σ deve dipendere dal rapporto tra il prezzo del sottostante S_T e lo *strike* K appena definito, oltre che dal tempo. Tuttavia, nel modello in esame si impone una condizione di simmetria alla volatilità, simile a quella vista in precedenza, tale per cui:

$$\mathrm{v}\left(\frac{S}{K};T\right) = \mathrm{v}\left(\frac{K}{S};T\right) \qquad \text{per } S > 0 \tag{3.37}$$

Esempi di una struttura della volatilità soddisfacente la (3.37), sono proprio il modello di Black-Scholes-Merton, in cui la volatilità è deterministica e dunque dipendente dal tempo, oppure una struttura della volatilità log-simmetrica in cui i futuri livelli della volatilità del sottostante dipendono dai futuri livelli del prezzo del sottostante, come quella illustrata nel precedente paragrafo.

Ciò posto, è possibile scrivere la relazione di *put-call symmetry* (PCS) per due opzioni americane, scritte sullo stesso sottostante, nel modo che segue[45]:

$$\frac{C(S_C,K_C,T,q,r,\sigma)}{\sqrt{S_C K_C}} = \frac{P(S_p,K_p,T,r,q,\sigma)}{\sqrt{S_p K_p}} \tag{3.38}$$

Dove C e P indicano i valori della *call* e della *put* americana, S_c, K_c, S_p e K_p indicano i prezzi del sottostante della call e della put, *q* il *dividend yield* e *r* il tasso istantaneo privo di rischio, *T* la *maturity*. È importante tenere a mente che implicitamente si assume che entrambe le opzioni abbiano la stessa *moneyness* e *maturity*. La (3.38) esprime una simmetria tra opzioni che sono sì scritte sulla stessa attività sottostante, ma che appartengono ad economie diverse, comportando dunque una differenziazione della quotazione del prezzo *spot* (S_c, S_p). In realtà, tale relazione, valida peraltro anche per le opzioni di tipo europeo, altro non è che una forma diversa della (3.29), infatti, effettuando le opportune considerazioni, partendo dalla (3.38) possiamo ricondurci alla (3.29).

Ricordando che il modello preso in esame assume parità di *moneyness* tra le opzioni, e richiamandone la definizione, si ha che:

$$\frac{S_c}{K_c} = \frac{K_p}{S_p} \tag{3.39}$$

Da cui

$$\frac{S_c}{K_p} = \frac{K_c}{S_p} \tag{3.40}$$

Inoltre, la (3.38) può essere scritta:

$$C(S_c, K_c, T, q, r, \sigma) = P(S_p, K_p, T, r, q, \sigma) \sqrt{\frac{S_c K_c}{S_p K_p}} \tag{3.41}$$

Applicando la (3.40) alla (3.41) si ha

$$C(S_c, K_c, T, q, r, \sigma) = \frac{K_c}{S_p} P(S_p, K_p, T, r, q, \sigma) \tag{3.42}$$

Dalla (3.40) si ricava che $K_p = \frac{S_p}{K_c} S_c$ da cui:

$$C(S_c, K_c, T, q, r, \sigma) = \frac{K_c}{S_p} P\left(S_p, \frac{S_p}{K_c} S_c, T, r, q, \sigma\right) \tag{3.43}$$

[45] Per la dimostrazione si veda CARR, Peter, CHENSEY, Marc, “American Put-Call Symmetry”, Working Paper, 1996, Appendix.

Volendo soddisfare le ipotesi sottostanti la (3.29), e dunque che le opzioni siano scritte su un'attività appartenente alla stessa economia, allora S_p=S_c, e ponendo S_0= S_c e K = K_c, si ha che:

$$C(S_0, K, T, r, q, \sigma) = \frac{K}{S_0} P\left(S_0, \frac{{S_0}^2}{K}, T, r, q, \sigma\right) \qquad (3.44)$$

Ossia la (3.29), C.V.D.

È altresì dimostrabile come dalla (3.38) ci si possa ricondurre alla (3.32), infatti la (3.32) rappresenta un caso specifico di quando le opzioni sono scritte sul *future* della stessa attività, oppure, il che è equivalente, sullo *spot* in caso di *drift* nullo. Sotto tali ipotesi difatti si ha che: S_p=S_c= F e dunque, poiché la *moneyness* delle opzioni è equivalente la (3.36) diventa:

$$K = \sqrt{K_c K_p} = F \qquad (3.45)$$

Ossia la media geometrica dello *strike* della *call* K e dello *strike* della *put* H è pari al prezzo *forward* *F*.
Pertanto, la (3.38) diventa:

$$\frac{C(F, K_c)}{\sqrt{K_c}} = \frac{P(F, K_p)}{\sqrt{K_p}}$$

Che è la (3.32) C.V.D.

3.4 Put-Call Transformation: un'altra via.

In un articolo di Haug[46] viene esposta una semplice relazione tra la *put-call symmetry* e la *put-call transformation* di Bjerksund e Stensland (1993), infatti la (3.29) e (3.32) possono essere in realtà considerate come una riscrittura e applicazione della relazione di *put-call transformation,* da cui dunque possono essere ricavate.

La *put-call transformation* implica che:

$$C(S_0, K, T, r, b, \sigma) = P(K, S_0, T, r-b, -b, \sigma) \qquad (3.46)$$

Dove *S* rappresenta il prezzo del sottostante che segue un moto geometrico Browniano (2.44), *K* è lo *strike*, *T* la scadenza, *r* il tasso di interesse privo di rischio, *-b* il costo di trasferimento /immagazzinamento (*cost of carry*). La (3.39) esprime in altre parole che il valore di un'opzione *call* americana è pari al valore di una *put* americana con il prezzo del sottostante pari allo *strike*, e lo *strike* pari al prezzo del sottostante, tasso di interesse privo di rischio pari a *r-b*, e *cost of carry* pari a *-b*. Ovviamente questa relazione è valida anche per le opzioni di tipo europeo e consente di avere un utile espediente per legare i prezzi delle opzioni *put* e *call*.

[46] HAUG, Espen, Gaarder, "Barrier Put-Call Transformations", Working Paper, 16 Febbraio, 1999.

In particolare, se riscriviamo il *payoff* di una *call*, e similmente di una *put*, da max (S – K; 0) a $\frac{K}{S}$ max $\left(\frac{S^2}{K} - S;\ 0\right)$, combinando tale scrittura con la *put-call transofmation*, possiamo semplicemente individuare la relazione di *put-call symmetry*:

$$C(S_0, K, T, r, b\ , \sigma) = \frac{K}{S_0}\ P\left(S_0, \frac{{S_0}^2}{K}\ , T, r-b, -b, \sigma\right)$$

Pertanto, come abbiamo appena visto, la *put-call symmetry* altro non è che una riscrittura della *put-call transformation* ottenuta tramite manipolazione matematiche, tuttavia la simmetria individuata è particolarmente utile per attuare strategie di copertura statica (*hedging*) su opzioni esotiche tramite opzioni ordinarie (*plain vanilla products*).

3.5 Hedging statico su opzioni esotiche: un'applicazione della Put-Call Symmetry

3.5.1 Opzioni con barriera e ipotesi

La *put-call symmetry* di Carr trova una utile applicazione nell'ambito dell'*hedging* statico su opzioni esotiche tramite l'utilizzo di prodotti *standard*, ossia nell'ambito strategie di copertura che non hanno necessità di essere dinamicamente aggiustate (*rebalanced*). In particolare, verranno di seguito esposte le strategie sviluppate da Bowie e Carr nel loro articolo "*Static Simplicity*", concentrando l'attenzione su un particolare tipo di opzioni esotiche: le opzioni con barriera.

Tra le innumerevoli opzioni negoziate nei mercati OTC, le opzioni con barriera sono tra le più utilizzate, esse sono opzioni il cui valore finale dipende dal raggiungimento o meno da parte del prezzo del sottostante, in un certo periodo, di un dato livello. Si distinguono in opzioni «soggette a cancellazione» (*knock-out options*) e opzioni «in attesa di validazione» (*knock-in options*), le prime cessano di esistere quando il prezzo *spot* dell'*asset* sottostante raggiunge una certa barriera, le seconde, viceversa, iniziano ad esistere quando il prezzo corrente raggiunge la barriera. Una ulteriore classificazione può essere individuata in opzioni *call down-and-in, put down-and-in* e *call up-and-in, put up-and-in*. Queste sono opzioni di tipo *knock-in* che vengono ad esistenza quando il prezzo S raggiunge una certa barriera, che è posta, rispettivamente, ad un livello inferiore o superiore rispetto lo *spot*. Specularmente, possono essere individuate anche le opzioni di *tipo call down-and-out, put down-and-out*, e *call up-and-out, put up-and-out*, che sono invece opzioni di tipo *knock-out*, che si estinguono quando il prezzo corrente raggiunge la barriera, che è posta, rispettivamente, ad un livello superiore o inferiore rispetto lo *spot*.

Ciò premesso, è importante tenere a mente le ipotesi sotto le quali verranno sviluppate le argomentazioni: si assume il modello standard di Garman e Kohlhagen (1983), ossia *frictionless markets*, assenza di arbitraggio, tassi di interessi costanti, lo spot, S, segue un moto geometrico Browniano a volatilità costante. Inoltre, data l'assenza di *cost of carry*, il tasso estero eguaglia quello interno (considerando la valuta come attività sottostante).

3.5.2 Hedging Statico con opzioni ordinarie

Il caso più semplice di copertura statica che può essere analizzato, si presenta quando lo *strike* (K) delle opzioni coincide con la barriera (H). Nonostante prenderemo in esame dunque le *down-and-in calls*, discorso analogo può essere sviluppato per le *up-and-in calls* e *puts*.

Nel caso sviluppato da Bowie e Carr[47], si dimostra che la vendita di una *down-and-in call* è coperta andando *long* su una *put standard* scritta sullo stesso sottostante, avente la stessa scadenza e lo stesso *strike*. Infatti, se il prezzo *spot* (S) del sottostante è al di sopra della barriera durante tutta la vita dell'opzione, allora sia la *down-and-in call* che la *put lunga* scadranno prive di valore, ma quando il prezzo corrente raggiunge la barriera, la relazione di *put-call parity* impone che il valore della *put* standard è il medesimo della corrispondente *standard call* e pertanto non appena S tocca la barriera, l' *hedger* può vendere la sua *put* standard e comprare la corrispettiva *call*, senza incorrere in flussi di cassa in uscita, coprendo così la posizione corta assunta sulla *call* emergente, ossia *la down-and-in call* venduta in precedenza. Conseguentemente, comprare una *put* ordinaria all'inizio, è esattamente una strategia di copertura per vendere una *down-and-in call*. Ciò implica che prima che lo spot tocchi la barriera, il valore, e dunque il comportamento, della *down-and-in call* con *strike* K e barriera H, è lo stesso di una *put* ordinaria scritta sullo stesso sottostante con *strike* K, ossia:

$$C_{di}(K,H) = P(K), \qquad \text{quando } H = K. \tag{3.47}$$

Dove C_{di} rappresenta il valore della *down-and-in call* e $P(K)$ della *put* ordinaria.
In questo semplice caso, è stato sufficiente ricondurci alla relazione di parità tra *put* e *call* per attuare la strategia di copertura, tuttavia qualora lo *strike* dell'opzione non dovesse coincidere con la barriera, siamo costretti a ricorrere alla relazione di *put-call symmetry* individuata da Carr (1994), poiché nel caso in cui, per esempio, lo *strike* dovesse essere superiore alla barriera, nel momento in cui quest'ultima viene raggiunta dal prezzo corrente del sottostante, la *call* emergente sarebbe *out of the money*, e per questa ragione una *put* e una *call* con *strike* identici non avrebbero più lo stesso valore. Volendo brevemente richiamare la suddetta relazione, è importante ribadire in primo luogo che le ipotesi che abbiamo assunto in precedenza sono perfettamente compatibili con la relazione individuata da Carr, e in secondo luogo che tale relazione impone che il valore di una *call* con *strike* K, quando lo *spot* è H, è pari a H/K volte il valore di una *put* con *strike* H^2/K. Infatti, gli *strikes* delle opzioni sono scelti in modo tale che la loro media geometrica sia pari esattamente alla barriera H. Inoltre, il numero di *puts* da acquistare, è scelto in modo tale che sia pari al rapporto delle distanze dai rispettivi *strikes* quando lo *spot* è alla barriera, cosicché il numero di *puts* acquistate avrà sempre lo stesso valore di una *call* standard, con stessi parametri.

Ciò posto, considerando una barriera H superiore allo *strike* K, possiamo notare come la vendita di una *down-and-in call* con *strike* K e barriera H/K è coperta andando *long* su *K/H puts*, ognuna delle quali aventi *strike* H^2/K. Si noti che quando $H = K$, otteniamo lo stesso risultato esposto in precedenza. È importante sottolineare che quando lo *strike* della *call* è al di sopra della barriera, come assunto, lo *strike* della *put* deve essere sotto la barriera, cosicché la loro media geometrica eguagli la barriera stessa. Conseguentemente, se lo *spot* non tocca mai la barriera, sia la *down-and-in call* che gli strumenti di copertura scadono privi di valore, ma se lo *spot* raggiunge la barriera H, allora, in quel momento, la *put-call symmetry* implica che *H/K puts* con *strike* H^2/K siano pari ad una *call* con *strike* K, pertanto l'*hedger* può vendere le *puts* e comprare la rispettiva *call* ordinaria senza incorrere in esborsi monetari. Poiché dunque acquistare *H/K strandard puts* consente di coprirsi su

[47] BOWIE, Jonathan, e CARR, Peter, "Static Simplicity", *Risk*, vol. 7, No. 8, pp.45-9, August 1994

una posizione corta assunta sulla *call* emergente, ne consegue che prima di raggiungere la barriera, una *down-and-in call* ha lo stesso valore e comportamento di *H/K standard puts*, o più genericamente:

$$C_{di}(K,H) = \frac{K}{H}\, P\left(\frac{H^2}{K}\right) \qquad \text{quando } H \leq K \qquad (3.48)$$

In entrambi i casi di cui ci siamo occupati di una *down-and-in call*, dove la *call*, una volta venuta ad esistenza, era o *at the money* o *out the money*, ossia con valore intrinseco pari almeno a 0.

Per analizzare l'ulteriore, ed ultimo, caso in cui lo *strike* dell'opzione risiede al di sotto della barriera H, ossia quando il derivato ha un *intrisic value* positivo al raggiungimento di H, bisogna richiamare il concetto di *down-and-in bond* (B_{di}), ossia una *security* che paga $1 a scadenza se e solo se il sottostante tocca la barriera entro la vita utile dell'opzione. Dunque, un portafoglio di (*H* - *K*) *down-and-in bonds* ha lo stesso valore della *call* emergente alla barriera.

Nel caso di una *down-and-in call* con *strike* che risiede al di sotto della barriera, la vendita iniziale della *down-and-in call* con *strike K* e barriera $H \geq K$ è coperta andando *long* (*H*- *K*) *down-and-in bonds* e su una standard *put* con *strike K*. In alter parole, i *down-and-in bonds* sono acquistati per controbilanciare il valore intrinseco della *call* alla barriera, mentre la *put* è acquistata per controbilanciare il valore temporale della *call* emergente alla barriera. Infatti, se lo *spot* rimane al di sopra della barriera H, allora la *down-and-in call* e gli strumenti di copertura scadranno privi di valore. Se il prezzo corrente tocca invece la barriera, allora gli (*H* – *K*) *down-and-in bonds* emergono ed inoltre, per la *put-call parity* questi *bonds* e la standard *put* con *strike* pari a *K* possono essere venduti per finanziare l'acquisto di una *call* ordinaria con stesso prezzo d'esercizio. Pertanto, poichè comprare (*H* – *K*) *down-and-in bonds* con barriera H e acquistare una standard *put* con *strike K* è una copertura sulla vendita di una *down-and-in call*, segue che prima di toccare la barriera, la *down-and-in call* ha lo stesso valore e comportamento di un portafoglio costituito da (*H* – *K*) *down-and-in bonds* e una *put* con prezzo d'esercizio *K*, ossia:

$$C_{di}(K,H) = (H - K)\, B_{di}(H) + P(K) \qquad \text{quando } H \geq K \qquad (3.49)$$

Inoltre, è stato dimostrato[48] che la down-and-in call può essere valutata anche solamente in termini di opzioni put standard tramite una relazione che lega I down-and-in bond con le opzioni put.

3.5.3 Cost of carry non nulli.

Nei casi sopra esposti, abbiamo ipotizzato i costi di immagazzinamento/trasferimento nulli, tuttavia rimuovendo questa ipotesi, possiamo rivalutare le relazioni individuate. Quando i *cost of carry* sono positivi, allora il valore della barriera al tempo T è $\hat{H} = He^{(r-r_f)T}$, dove *r* è il tasso di rendimento interno privo di rischio, e r_f quello estero. Chiamando *S* = *H* al periodo iniziale, allora la barriera *forward* $F=\hat{H}$ dalla *interest rate parity*. Se sono positivi i *carrying costs*, allora $r > r_f$, e dunque il *forward* è sopra lo *spot*, *F* > *S*, e similarmente, la barriera finale è al di sopra la barriera *spot*, $\hat{H} > H$. In questo caso, quando la barriera della *down-and-in call* è al di sotto dello *strike* la (3.48) diventa:

48 Si veda BOWIE, Jonathan, e CARR, Peter, "Static Simplicity", Risk, vol. 7, No. 8, p.46, August 1994

$$\frac{K}{H}\, P\left(\frac{H^2}{K}\right) \leq C_{di}(K,H) \leq \frac{K}{\hat{H}}\, P\left(\frac{\hat{H}^2}{K}\right) \qquad \text{quando } H \leq K \qquad (3.50)$$

Quando invece la barriera di una *down-and-in call* è al di sopra dello *strike*, allora la (3.49) diventa:

$$(H-K)\, B_{di}\,(H) + P(K) \leq C_{di}(K,H) \leq (\hat{H}-K)\, B_{di}\,(\hat{H}) + P(K) \qquad \text{quando } H \geq K \qquad (3.51)$$

Al contrario, quando i *carrying costs* sono negativi, ossia quando $r<r_f$, allora il *forward* è sotto lo *spot*, $F<S$, e similmente la barriera *forward* è sotto la barriera *spot*, $\hat{H} < H$. In questo caso, analogamente a come abbiamo visto in precedenza, le formule possono essere riscritte:

$$\frac{K}{H}\, P\left(\frac{H^2}{K}\right) \leq C_{di}(K,H) \leq \frac{K}{\hat{H}}\, P\left(\frac{\hat{H}^2}{K}\right) \qquad \text{quando } H \leq K \qquad (3.52)$$

$$(H-K)\, B_{di}\,(H) + P(K) \leq C_{di}\,(K,H) \leq (\hat{H}-K)\, B_{di}\,(\hat{H}) + P(K) \qquad \text{quando } H \geq K \qquad (3.53)$$

Se una delle relazioni sopra individuate viene violata, una opportunità di arbitraggio nasce. Per esempio, se il vincolo (3.52) è violato, allora la *down-and-in call* dovrebbe essere venduta e coperta dall'acquisto di K/H *puts* ordinarie con *strike* pari a H^2/K. Infatti, se lo *spot* non tocca mai la barriera, allora la *down-and-in call* e le standard *puts* scadono prive di valore, come al solito, altrimenti, nel caso in cui la barriera venga raggiunta, le *puts* dovrebbero essere vendute in quel momento e si dovrebbero utilizzare i relativi ricavi per l'acquisto di una *call*. Diversamente dal caso con costi di immagazzinamento nulli, avanzeranno dei ricavi dall'operazione.

Bibliografia

ARISTOTELE, *La Politica*, libro I, Monandori, I Classici del Pensiero, aprile 2008

BARONE, Gaia, *Arbitraggi e algebra di Garman*, CreateSpace, 2012

BARONE, Gaia, *Arbitraggi e Prezzi Arrow-Debreu*, CreateSpace, 2012

BATES, David, "The crash premium: Option pricing under asymmetric processes, with applications to options on Deutschemark futures", Working paper, 1988, pp. 38-88.

BERK, Jonathan e DeMARZO, Peter, *Corporate Finance*, Pearson, 3rd ed.

BLACK, Fischer, "How We Came Up With, The Option Formula", *Journal of Portfolio Management*; Winter 1989; pp.4-8 (pdf)

BLACK, Fischer Sheffey e SCHOLES, Myron S., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, May - Jun., 1973 (pdf)

BOWIE, Jonathan, e CARR, Peter, "Static Simplicity", *Risk*, vol. 7, No. 8, pp.45-9, August 1994 (pdf)

BRADFORD Cornel, "Warren Buffett, Black-Scholes and the Valuation of Long-dated Options", California Institute of Technology Pasadena, Giugno 2016, p.10. (pdf)

CARR, Peter, CHENSEY, Marc, "American Put-Call Symmetry", Working Paper, 1996

CARR, Peter, ELLIS, Katrina e GUPTA, Vishal, "Static Hedging of Exotic Options", *The Journal of Finance*, Volume 53, No. 3, Giugno, 1998, pp.1165-1190 (pdf)

CHIRKOWA, Elena, "*Investire come Warren Buffett*", Hoepli, Febbraio, 2016, p. 187

DASH, Mike, *Tulipomania: The Story of the World's Most Coveted Flower and the Extraordinary Passions It Aroused.*

DE FELICE, Massimo, e MORICONI, Franco, (a cura di), *Il Principio di Arbitraggio*, Il Mulino, 1996

HAUG, Espen, Gaarder, "Barrier Put-Call Transformations", Working Paper, 16 Febbraio, 1999.

HULL, John C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Education Italia, 9a ed., gennaio 2015.

MERTON, Miller, *"Derivatives",* ed. Wiley Investment 1997.

MERTON, Robert C., "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, No. 1, Spring, 1973, 141-183. (pdf)

ROSS, Stephen Alan, *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, 2005, (pdf)

VARIAN, Hal R., "The Arbitrage Principle in Financial Economics", *Economic Perspectives*, Vol.1, No.2, Fall 1987. (pdf)

Sitografia

http://www.treccani.it/enciclopedia/arbitraggio_(Enciclopedia-Italiana)/

http://atilf.atilf.fr/

http://www.investopedia.com/

http://www.borsaitaliana.it/homepage/homepage.htm

https://it.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

http://www.migliorbrokerforex.net/

http://www.colombaborsa.it/Derivatididattico.htm

http://www.ansa.it/sito/notizie/economia/finanza_personale/static/coveredwarrant4.html

http://www.berkshirehathaway.com/letters/2008ltr.pdf