



**Dipartimento di Economia e Finanza
Cattedra di Asset Management**

“Volatility Managed Portfolio”

**Candidato
Luca Amico
Matr. 672471**

**Relatore
Prof. Nicola Borri**

**Correlatore
Prof. Giuseppe Ragusa**

**Anno Accademico
2016/2017**

Alla famiglia, agli amici ed all'amore!

Sommario

Introduzione	5
Capitolo 1. Framework teorico di riferimento	7
1.1 Il modello di ottimizzazione del portafoglio di Markovitz	7
1.2 Dal modello ad indice al CAPM	9
1.3 Il modello di Fama e French e le sue estensioni:	14
1.4 Le previsioni della volatilità nei modelli ARCH e GARCH	18
1.5 I risultati del volatility timing	26
1.6 La relazione tra rischio e rendimento e le Low-Risk-Anomalies	29
Capitolo 2. I Volatility Managed Portfolios	37
2.1 Dati e metodologia di raccolta:	37
2.2 Origine del portafoglio	40
2.2.1 Computazione della volatilità realizzata	41
2.2.2 Costruzione del portafoglio a fattore singolo	47
2.2.3 Costruzione del portafoglio multi-fattore	62
2.3 Test strutturali	68
2.3.1 Il Business Cycle Risk	68
2.3.2 Differenze con anomalie cross-sectional	71
2.3.3 Costi di Transazione	75
2.3.4 Vincoli di leva finanziaria	76
2.3.5 Co movimenti della volatilità	82
Capitolo 3. Interpretazioni Teoriche	84
3.1 Il timing della volatilità ed il trade-off rischio rendimento	84
3.1.1 La forza del trade-off rischio rendimento	87
3.1.2 La dinamica del trade-off rischio rendimento	90
3.2 Implicazioni nelle scelte di portafoglio	94
3.2.1 Expected return e volatility timing a confronto	94

3.2.2 Il volatility timing per un investitore di lungo periodo	97
3.3 Implicazioni per la teoria economica e considerazioni finali	106
Conclusione.....	110
Bibliografia	112
Sitografia	115

Introduzione

In una realtà economica fortemente caratterizzata da un'elevata disoccupazione giovanile, ritengo che l'università debba fornire un bagaglio di *skills* professionali da sfruttare nel mondo del lavoro per poter essere competitivi. Gli sbocchi che si profilano ad uno studente di economia e finanza non possono a mio avviso prescindere dall'utilizzo di applicativi informatici che sono alla base dei normali compiti in imprese finanziarie e che spesso ne rappresentano il cuore del lavoro. E' soprattutto per questi motivi che ho concepito la tesi magistrale come una opportunità di migliorare ed approfondire le mie capacità di utilizzo di software economico-statistici, considerando la stesura dell'elaborato come un viatico con cui l'università mi potesse accompagnare ed aiutare nella futura realtà lavorativa e professionale. Questa premessa, insieme alla mia passione per l'*asset management*, è stata alla base della scelta di trattare i portafogli a volatilità gestita come argomento principale dell'elaborato, cosa che ho fatto replicando e dimostrando empiricamente i risultati degli studiosi *Alan Moreira* e *Tyler Muir* nell'articolo originale sulla strategia, "*Volatility Managed Portfolios*", pubblicato ufficialmente nel *The Journal of Finance* nel 2017.

I *volatility managed portfolios* si basano su un concetto molto semplice: il peso del portafoglio è funzione inversa della volatilità realizzata il mese precedente e conseguentemente l'esposizione dell'investitore nei confronti del rischio viene ridotta quando la volatilità passata risulta essere elevata ed incrementata nel caso opposto. Sebbene questa impostazione teorica sia completamente in disaccordo con i dogmi della finanza moderna, che invece identificano le crisi di mercato come opportunità di investimento, ho indagato se la strategia che vende in concomitanza degli *shocks* di mercato e riacquista quando il picco di volatilità va svanendo, funziona durante le crisi economiche tra cui la Grande Depressione, il *Black Monday* del 1987 ed infine la più recente crisi dei mutui *sub-prime* del 2007. In generale ho analizzato come i portafogli a volatilità gestita producono o meno degli elevati *alpha*, *Sharpe ratio* ed *appraisal ratio* per i vari fattori di *Fama* e *French* ed ancora se questo approccio renda maggiormente rispetto ad una semplice strategia *buy-and-hold* del mercato azionario americano. In assenza di precise indicazioni da seguire per l'elaborazione del dataset, la mia analisi è stata principalmente sviluppata mediante l'iniziale interpretazione dei risultati originali e la successiva replica degli stessi. A tal fine ho fortemente utilizzato *Microsoft Excel* come strumento di "stoccaggio" ed analisi preliminare dei dati: la maggior parte delle tabelle presentate nell'elaborato sono stralci di fogli di calcolo del suddetto software. Per quanto concerne lo studio delle regressioni singole e multiple ho fatto affidamento sia su *Matlab*, al fine di gettare le basi per conoscerne il linguaggio di programmazione, che su *Gretl*, per validare gli output. *Matlab* mi ha inoltre permesso, oltre a rappresentare graficamente i numerosi trend della strategia, di ottimizzare i portafogli e di

inserire numerosi vincoli, come la possibilità di vendere allo scoperto, di inserire budget finanziari, percentuali di turnover e costi di transazione.

Il mio lavoro è stato suddiviso in tre capitoli:

Nel corso del primo capitolo ho svolto un'analisi dell'evoluzione delle teorie di portafoglio. Tale analisi ha avuto lo scopo di acquisire una base tecnica per capire i dati utilizzati ed in particolare il *framework* su cui poggiano i portafogli a volatilità gestita. Ho mostrato inoltre il cambiamento del concetto di rischio finanziario, che risulta essere un elemento cardine di questo elaborato.

Il secondo capitolo è invece il corpo centrale della tesi dove sono riassunti i risultati degli esperimenti da me posti in essere. Ho dapprima costruito i *volatility managed portfolios* per ciascun fattore preso in considerazione per poi ragionare in termini multifattoriali, creando varie combinazioni di portafogli efficienti media-varianza. Successivamente ho effettuato dei test strutturali per indagare sulla robustezza e la redditività della strategia di *volatility timing*.

Il terzo capitolo cerca infine di dare una risposta teorica al perché la strategia funzioni, studiando le condizioni che il dataset e la natura dei dati devono rispettare e le implicazioni per le scelte di portafoglio degli investitori.

Capitolo 1. Framework teorico di riferimento

I paragrafi a seguire spiegheranno brevemente l'evoluzione delle teorie di portafoglio al fine di avere una base tecnica per capire appieno i dati utilizzati per derivare i volatility managed portfolio nonché per mostrare il cambiamento del concetto di rischio finanziario, elemento centrale dell'analisi di questo elaborato. Alcuni concetti basici saranno tralasciati o trattati solo approssimativamente per non deviare dalle finalità ultime che questo capitolo si propone, mentre altri saranno maggiormente esplicitati in quanto torneranno utili nelle successive specificazioni. Dal secondo paragrafo in poi tratterò nello specifico il framework teorico su cui poggiano i volatility managed portfolios, al fine di completare l'analisi preliminare dell'elaborato.

1.1 Il modello di ottimizzazione del portafoglio di Markovitz

Il modello di costruzione della frontiera efficiente di asset rischiosi e di ottimizzazione della diversificazione finanziaria è opera di Harry Markovitz nell'articolo "*Portfolio Selection*" del 1952. Per la prima volta viene quindi formalizzato il concetto antecedente alla moderna teoria di portafoglio del "non mettere tutte le uova nello stesso paniere".

Dato un set di portafogli rischiosi, l'idea principale alla base del modello consiste nell'individuare per ogni livello di rischio il portafoglio che massimizzi il rendimento atteso; alternativamente, dato il rendimento atteso, il portafoglio che minimizzi il rischio. Le combinazioni di portafogli risultanti da questa procedura delineano la frontiera di investimento, considerata efficiente quando formata dai portafogli che a parità di rischio esibiscano un rendimento atteso maggiore. Su questa frontiera due portafogli suscitano interesse: quello a varianza minima ed il portafoglio rischioso ottimo. Il primo, indipendente dalla presenza o meno dell'asset risk free, garantisce il minimo livello di rischio tra la popolazione dei portafogli considerati. Il secondo è determinato invece dalla tangenza della Capital Allocation Line (ovvero l'insieme delle opportunità di investimento tra un portafoglio rischioso ed un asset risk-free nel piano rendimento atteso-standard deviation) e la frontiera stessa: quindi ci si pone davanti ad un problema di ottimizzazione consistente nella massimizzazione dello Sharpe ratio. L'importanza di tale indice come misura del tradeoff rischio rendimento sarà più volte ripresa nella analisi empirica dei volatility managed portfolios e rappresenta un valido indicatore delle performance dei portafogli individuati. Lo Sharpe ratio esprime il rendimento di un portafoglio di titoli, al netto del rendimento risk free, in rapporto al rischio del portafoglio stesso: viene così indicato il rendimento in termini percentuali per ogni unità di rischio dell'investimento effettuato. Graficamente risulta essere la pendenza della CAL ed è esprimibile dalla seguente equazione:

$$(1) SR = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

L'individuazione della frontiera efficiente e del portafoglio rischioso ottimo sono il primo passo per l'allocazione delle risorse finanziarie degli investitori. Il grado di avversione al rischio dell'agente o meglio, la sua preferenza nei confronti del rischio, diventa una variabile chiave nella successiva scelta di quanto investire nell'asset risk free e nel portafoglio rischioso ottimo. Tornerò sull'esplicitazione dell'avversione al rischio e la sua metodologia di calcolo quando tratterò i benefici di utilità derivanti dai volatility managed portfolios. Ora è bene soffermarsi unicamente sulla possibilità di scindere temporalmente la determinazione del portafoglio rischioso ottimo (tale per tutti gli investitori) e la scelta di quanto investire rispetto all'asset privo di rischio e considerarli quindi come momenti indipendenti: tale approccio prende il nome di *separation property*.

Il motivo per cui fino ad ora siano stati considerati portafogli finanziari e non singoli asset deriva dal concetto fondamentale implicito nel modello di Markovitz della potenza della diversificazione. La diversificazione permette, mediante l'inclusione di più asset all'interno del portafoglio, di ridurre l'esposizione totale al rischio dell'investitore. Questo lo si deve alla diversa natura delle fonti del rischio stesso: da una parte abbiamo fattori generali economici che influenzano le performance delle imprese, dall'altra elementi prettamente interni, specifici dell'asset considerato. L'investimento in più titoli consente di eliminare completamente quest'ultimo caso analizzato, il rischio micro, ma non permette di annullare il rischio totale, condizionato dal ciclo dell'economia. Per questo motivo viene apportata la distinzione tra rischio sistematico, che non può essere appunto diversificato e rischio non-sistematico (o idiosincratico) che può essere invece eliminato dalla stessa diversificazione. Formalmente la differenziazione del rischio può essere esplicitata mediante l'analisi specifica degli input necessari alla costruzione della frontiera. Data la varianza del portafoglio per semplicità equally weighted, ovvero con pesi $w = 1/n$ per ogni titolo:

$$(2) \sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} cov(r_i, r_j) \quad \text{con} \quad cov(r_i, r_j) = \sigma_i^2$$

se definiamo la varianza media e la covarianza media degli asset come rispettivamente:

$$(3) \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{e} \quad \overline{Cov} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Cov(r_i, r_j),$$

la varianza del portafoglio risulta essere pari a:

$$(4) \sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{Cov}$$

Gli effetti della diversificazione sono completamente rinvenibili nell'ultima espressione. Se la covarianza tra i rendimenti dei titoli è pari a zero, ovvero nel caso in cui il rischio sia unicamente specifico, l'inclusione di un numero elevato di asset (cioè all'aumentare di n) azzerava la varianza del portafoglio. Se invece la covarianza è positiva, il che si tramuta in un fattore di rischio comune economico che impatta sulla correlazione tra i rendimenti, la varianza del portafoglio continua ad essere positiva: nel caso estremo in cui n che tende all'infinito, il rischio specifico rappresentato dal primo termine dell'espressione è completamente diversificato, mentre il secondo termine (\overline{Cov}) tenderà ad 1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$). In sostanza, il rischio non diversificabile di un portafoglio dipende dalla covarianza dei rendimenti dei titoli: il contributo di un titolo al rischio di portafoglio è funzione della covarianza dello stesso rispetto agli altri titoli e non dalla sua varianza.

Sebbene Markovitz abbia gettato le basi dell'evoluzione delle teorie moderne di formazione del portafoglio, il suo modello ha alcune lacune. In primo luogo, all'aumentare degli asset inclusi nel portafoglio, aumenta esponenzialmente la stima della matrice delle covarianze. Inoltre il modello è altamente sensibile alla stima degli stessi input utilizzati (i rendimenti attesi e la matrice delle covarianze). Per questo motivo sarà compito del prossimo paragrafo introdurre un modello che semplifichi il calcolo degli input attraverso la distinzione teorica tra il rischio sistemico e rischio specifico.

1.2 Dal modello ad indice al CAPM

In questo paragrafo vengono introdotte le variabili fondamentali che saranno analizzate nei volatility managed portfolios. Al fine di giudicare la bontà dell'investimento verranno create delle regressioni lineari che evidenziano la magnitudo ed il segno di parametri quali l'alpha ed il beta e la loro analisi non può prescindere dal capirne l'origine teorica delle stesse. Ma procediamo con ordine. I modelli ad indice nascono dall'esigenza di colmare i principali difetti, enunciati precedentemente, derivanti dall'applicazione del modello di Markovitz alle scelte di portafoglio. Il fine principale è quello di individuare una metodologia che riduca il numero delle stime di input senza aggravare la qualità dei risultati. Attraverso la scomposizione del rischio sistematico da quello specifico, sulla base dell'assunzione della distribuzione normale dei rendimenti e della presenza di forze comuni economiche che influiscano sulle imprese, viene semplificata la stima delle covarianze e della correlazione tra gli asset.

Il rendimento del titolo *i-esimo*, definito *m* come fattore comune macroeconomico (con media 0 e standard deviation σ_m), è determinato da una componente attesa ($E(r_i)$) ed una inattesa (e_i , con media 0 e standard deviation σ_i). Alcune imprese rispondono però in maniera più marcata a shocks di mercato comuni, ragione per cui viene aggiunto un parametro β che catturi tale specifica sensibilità. La seguente relazione è espressione del modello a fattore unico:

$$(5) r_i = E(r_i) + \beta_i m + e_i$$

La natura diversa delle fonti *m* ed e_i fa sì che le due variabili siano tra di loro incorrelate, in quanto il rischio specifico del titolo (o idiosincratico) è indipendente dagli shocks che colpiscono l'intera economia. Il rischio totale sarà quindi funzione di una componente "interna" ed una "esterna" determinata dal coefficiente beta:

$$(6) \sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma^2(e_i)$$

L'analisi meramente statistica fin qui utilizzata non risponde però alla domanda di quale sia il fattore comune da includere. Tale compito spetta solitamente ad indici di mercato il cui rendimento sia espressione dei principali andamenti e fluttuazioni che impattano sul prezzo delle imprese. Una volta quindi individuato tale parametro, per scoprire la relazione tra il rendimento del titolo *i-esimo* ed il fattore comune, viene lanciata una regressione semplice: ci stiamo man mano avvicinando alla metodologia utilizzata nella analisi dei volatility managed portfolios. L'equazione della regressione è uguale a:

$$(7) R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

dove beta è la sensitività del titolo rispetto al fattore comune (ad esempio mercato), e_i è il rischio specifico e l'alpha della regressione, o meglio l'intercetta, è il premio per il rischio non "spiegato" dal mercato. Quest'ultima variabile sarà di grandissima importanza sia nella finanza di portafoglio, sia nelle successive specificazioni. Il rendimento atteso di un titolo è quindi uguale ad una componente sistematica, $\beta_i E(R_M)$, ed una non correlata ed indipendente dal mercato stesso (α).

L'approccio al modello a indice unico ha sensibilmente ridotto il numero delle stime dei coefficienti da $(n^2 - n)/2$ del modello di Markovitz a $3n + 2$, dove *n* è la numerosità dei titoli che compongono il portafoglio. In questo caso è necessaria la determinazione degli alpha, beta e varianze dei vari titoli

(3n) a cui si aggiunge la specificazione del premio per il rischio e la varianza del fattore macroeconomico comune (+2).

L'utilità dell'appena presentato modello dispiega i suoi effetti nella derivazione di in uno dei capisaldi della letteratura finanziaria: il Capital Asset Pricing Model (CAPM). Mi occuperò di tale modello inizialmente sulla falsa riga dei testi accademici, per poi ricondurre la sua essenza alla stretta relazione e interdipendenza con il modello a singolo indice.

Il CAPM è un modello finanziario di asset pricing, pubblicato in un articolo di *The Journal of Finance* da William Sharpe, John Lintner e Jan Mossin nel 1964, che determina l'efficienza del portafoglio di mercato nonché l'esistente relazione tra il premio al rischio di un titolo ed il suo beta.

Il CAPM presuppone che ogni investitore ottimizzi il proprio portafoglio *à la Markovitz*: basandosi su una lista di input (rendimenti attesi e matrice delle covarianze) ogni investitore disegna una frontiera efficiente usando tutti gli asset disponibili ed identifica un portafoglio rischioso ottimo, *P*, dall'intersezione della Capital Allocation Line (CAL) e la frontiera stessa.

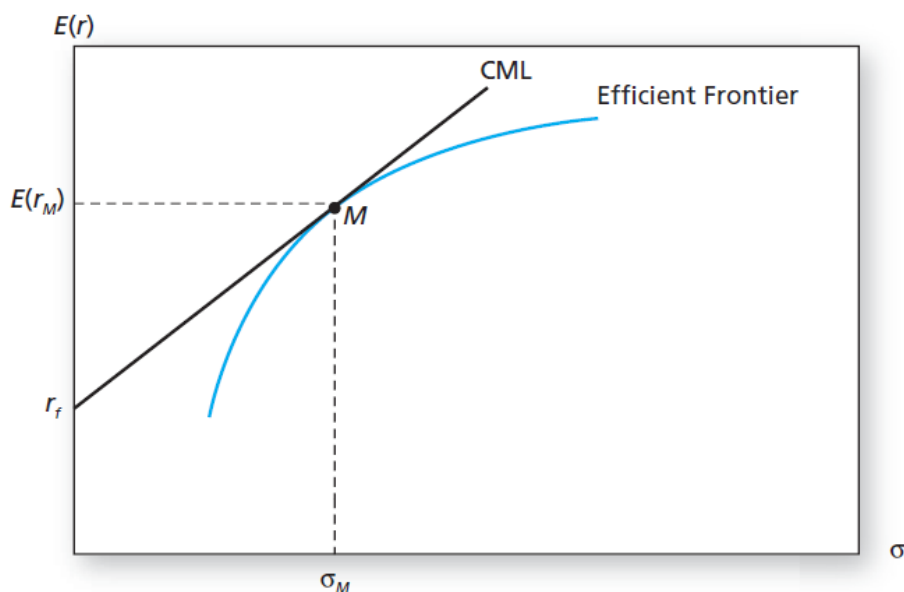


Figura 1: Capital Market Line e la frontiera efficiente: in equilibrio tutti gli investitori detengono lo stesso portafoglio che diventa portafoglio di mercato.

Fonte: *Investments* (Bodie, Kane, Marcus, decima edizione)

In equilibrio, se gli investitori condividono lo stesso identico universo di titoli, tutti deterranno lo stesso portafoglio *P*, e *P* a sua volta diverrà portafoglio di mercato, *M*. Lo stesso vale per la CAL che può essere ora considerata come Capital Market Line (CML) (Figura 1). Il portafoglio di mercato è quindi costituito da tutti gli asset esistenti in proporzione al loro valore di mercato rispetto al totale e rappresenta di conseguenza l'intera ricchezza dell'economia.

In questo scenario, l'allocazione di capitale di un investitore tra asset rischioso (quindi il portafoglio di mercato) ed asset risk-free si basa sulla seguente proporzione:

$$(8) y = \frac{E(r_M) - R_f}{A\sigma_M^2}$$

Il nominatore della precedente equazione ci fornisce una misura del valore atteso del portafoglio di mercato, in particolare il suo rendimento in eccesso rispetto al tasso risk free; al denominatore troviamo invece l'avversione al rischio A e la varianza del portafoglio M . Ciò implica che ogni investitore, in base alla sua avversione al rischio, sceglierà quanto allocare della sua ricchezza tra il portafoglio di mercato e l'asset risk free.

Introdotta brevemente il concetto cardine di portafoglio di mercato, passo ora a descrivere l'applicazione del modello al pricing dei singoli asset. Il CAPM si basa sull'intuizione che l'appropriato premio al rischio di un asset è determinato dal contributo dello stesso al rischio totale del portafoglio. Il rischio del portafoglio si configura come elemento alla base delle scelte di investimento nonché come fattore trainante della domanda di premio al rischio.

Il contributo del singolo asset alla varianza di portafoglio non è altro che la covarianza tra il rendimento del titolo ed il rendimento di mercato, mentre il suo contributo al premio al rischio del portafoglio di mercato è il valore atteso del titolo stesso. Entrambe le grandezze sono ponderate per il peso investito w_i :

$$(9) w_i Cov(R_M R_i) \text{ e } w_i E(R_i)$$

Per questo motivo il reward-to-risk ratio per un investimento i ed un investimento nel portafoglio di mercato possono essere espressi come:

$$(10) \frac{\text{Contributo di } i \text{ al premio al rischio}}{\text{Contributo di } i \text{ alla varianza}} = \frac{w_i E(R_i)}{w_i Cov(R_M R_i)} = \frac{E(R_i)}{Cov(R_M R_i)}$$

$$(11) \frac{\text{Premio al rischio di mercato}}{\text{Varianza di mercato}} = \frac{E(R_M)}{\sigma_M^2}$$

Ciò che guida la scelta di un investitore è infatti il tradeoff rischio/rendimento dell'investimento. Tale aspetto rappresenta un nodo centrale anche nei volatility managed portfolios: come vedremo più avanti infatti, il cambiamento dei pesi e la riallocazione nel tempo del portafoglio a volatilità gestita

deriva dall'evidenza empirica che il premio a rischio, o meglio il tradeoff suddetto, risulti essere poco vantaggioso in concomitanza di shock di mercato e migliori gradualmente nei mesi successivi. Ritornando però al CAPM, l'equazione (11) è definita come il prezzo del rischio di mercato, cioè l'extra rendimento che un investitore richiede per sostenere il rischio del portafoglio. In equilibrio tutti gli investimenti dovrebbero offrire lo stesso rapporto, in modo che qualora uno fosse maggiore di un altro, l'investitore potrebbe rimodulare il portafoglio a favore dell'alternativa con miglior tradeoff: questo processo impatterebbe sul prezzo dell'asset fino a che il rapporto non verrebbe stabilizzato. Questo implica che il reward-to-risk ratio del titolo i deve essere uguale a quello del mercato, per cui (11)=(10).

L'eguaglianza dei due termini ci porta all'esplicitazione dell'adeguato premio per il rischio per un titolo generico, nonché la famosa relazione tra rendimento atteso e beta:

$$(13) E(r_i) = r_f + \beta_i [E(r_M) - r_f]$$

Dove $\beta_i = Cov(R_i, R_M) / \sigma_M^2$ misura il contributo del titolo i alla varianza del portafoglio di mercato come frazione del totale della varianza del portafoglio di mercato. Se tale relazione è valida per un asset individuale, lo sarà pure per ciascuna combinazione di asset. La somma dei valori attesi dei rendimenti di ogni titolo nel mercato ci fornisce una misura del rendimento atteso del mercato, il quale beta sarà uguale ad 1. Ciò si tramuta nel fatto che titoli con beta maggiore di 1 siano considerati come investimenti aggressivi in quanto assicurano una sensibilità sopra alla media ai movimenti di mercato. Al contrario, titoli con beta minore di 1 sono da considerarsi come difensivi.

La relazione tra rendimento atteso e beta può essere alternativamente vista come equazione premio-rischio (reward-risk). Il beta di una security è quindi un'appropriata misura del suo rischio in quanto è proporzionale alla varianza a cui contribuisce l'asset nel portafoglio rischioso ottimo. Tale relazione viene rappresentata graficamente dalla Security Market Line (SML), dove sull'asse delle ascisse troveremo il beta mentre su quello delle ordinate il rendimento atteso del titolo. La pendenza della retta esprime il premio al rischio del portafoglio di mercato. La SML individua nel piano i premi per il rischio dei singoli asset in funzione del loro rischio: a differenza della CML, in cui tale misura si esplicitava con la deviazione standard del titolo, nella SML abbiamo il beta. La SML risulta quindi essere un benchmark per la valutazione delle performance di investimento, dove dato il rischio dell'asset, misurato dal suo beta, viene indicato il rendimento adeguato necessario per compensare l'investitore del rischio di aggiungerlo al portafoglio. L'analisi delle security permette quindi di individuare gli asset percepiti come sotto prezzati: la differenza tra il ritorno atteso determinato dalla

SML e quello proprio del titolo non è altro che l'alpha, misura del rendimento in eccesso (o in difetto) rispetto a quello *fair* specificato della retta.

Come accennato precedentemente, il CAPM può essere facilmente derivato anche dal modello ad indice. Date le equazioni (5) e (6), il rendimento di un portafoglio P , formato da N titoli con pesi w_k che ponderano i rispettivi parametri già trattati sia nel CAPM stesso che nel modello a fattore singolo, è uguale a:

$$(14) R_P = \sum_{k=1}^N w_k \alpha_k + \sum_{k=1}^N w_k \beta_k R_M + \sum_{k=1}^N w_k e_k$$

La scelta degli investitori si baserà sulla eliminazione del rischio specifico mediante la diversificazione e sulla massimizzazione del premio per il rischio del portafoglio tramite la selezione dei titoli con alpha positivi o l'assunzione di una posizione corta sui titoli con alpha negativo. Di conseguenza, il prezzo dei titoli con alpha positivo tenderà a crescere e, viceversa, a diminuire per i titoli con alpha negativo, fino a che tutti gli alpha sul mercato saranno uguali a zero. A questo punto l'investitore ripiegherà sul portafoglio che minimizza il rischio eliminando la componente specifica dello stesso, ovvero il portafoglio di mercato. Si è quindi alternativamente dimostrato che in equilibrio il portafoglio di mercato è il portafoglio rischioso ottimo.

Ora non mi resta che passare alla esplicitazione dei più moderni modelli teorici che completano la panoramica fino a qui posta in essere e che costituiscono il *database* appropriato nella determinazione dei volatility managed portfolios.

1.3 Il modello di Fama e French e le sue estensioni:

Il percorso teorico fino a qui effettuato termina, come era mia intenzione, con la descrizione degli input utilizzati nell'analisi dei volatility managed portfolios. L'approccio attualmente dominante per la specificazione dei fattori esplicativi del rendimento atteso di un titolo si basa sul modello multifattoriale (a tre fattori) di Fama e French, nonché le sue estensioni. Come descritto in precedenza, il CAPM utilizza una sola variabile per descrivere i rendimenti di un portafoglio (o di un titolo) rispetto a quello del mercato, il beta. Fama e French dimostrano che tale variabile non riesce a catturare appieno tutti i fattori di rischio. L'origine di tale modello risale al concetto di *Arbitrage Pricing Theory* (APT) ad opera di Steven Ross nel 1976, che evidenzia l'influenza di variabili macroeconomiche nella determinazione dei rendimenti azionari. Il modello presuppone l'assenza di opportunità di arbitraggio, ovvero la strategia che consente di ottenere un profitto sicuro a fronte di un esborso di denaro nullo assumendo una posizione lunga su un'attività finanziaria e

simultaneamente corta su un'altra. In equilibrio i titoli con stessa sensitività ad un dato insieme di fattori devono quindi necessariamente offrire gli stessi rendimenti attesi: il valore atteso del premio al rischio di un asset sarà funzione della somma dei valori attesi dei premi al rischio associati ai fattori moltiplicati per i così chiamati *factor loading*, ovvero la sensibilità dell'attività a ciascuno di tali fattori. In tale contesto la diversificazione permette, come nei modelli precedenti, di eliminare il rischio specifico così che l'APT consente di determinare precisamente il rendimento atteso del portafoglio come interamente contenuto nella componente α_i .

Fama e French propongono un modello a tre fattori che include, oltre al fattore di mercato beta, altre due variabili "micro" relative alle caratteristiche della società, ovvero le dimensioni della stessa ed il rapporto tra valore contabile e valore di mercato. Questa scelta è frutto della osservazione che due asset class tendono in media a battere i rendimenti di mercato così come predetti dalla security market line: le *small cap* (società a bassa capitalizzazione) e le società con un elevato *market-to-book* ratio (value stocks). L'equazione del modello risulta essere una estensione del CAPM ed è esprimibile nel modo seguente:

$$(15) R_{it} = \alpha_i + \beta_{iM}R_{Mt} + \beta_{iSMB}SMB_t + \beta_{iHML}HML_t + \varepsilon_{it}$$

Come si può notare dalla precedente relazione, vengono aggiunti due regressori che tengono conto degli aspetti specifici della società i prima citati. Passiamo ora a descriverli nello specifico in quanto tali fattori risultano essere i dati principalmente utilizzati nell'analisi dei volatility managed portfolios.

Per determinare le ulteriori variabili rispetto al CAPM, Fama e French hanno inizialmente individuato la mediana dei titoli del NYSE al fine di classificare tutte le azioni come "grandi" o "piccole" (big or small). Successivamente hanno diviso la popolazione dei titoli americani in tre gruppi basati sul rapporto B/M: la coda bassa 30%, il centro 40% (media), la coda alta 40%. A tal proposito è bene ricordare che titoli da un elevato rapporto valore di mercato/valore contabile sono anche chiamati "value" asset in quanto il loro valore di mercato dipende dai fondamentali presenti e già prezzati dal mercato; titoli da un basso valore di mercato/valore contabile sono considerati "growth" in quanto il loro valore di mercato dipende invece dalle aspettative di crescita future dei flussi di cassa.

A questo punto sono creati sei portafogli sulla base delle varie combinazioni di grandezza e rapporto B/M dei titoli.

$$(16) R_S = 1/3 (R_{SL} + R_{SM} + R_{SH}); R_B = 1/3 (R_{BL} + R_{BM} + R_{BH})$$

$$(17) R_H = 1/2 (R_{SH} + R_{BH}); R_L = 1/2 (R_{SL} + R_{BL})$$

Infine, sono determinati due portafogli *zero-net-investment factor*, mediante l'assunzione di una posizione lunga sul portafoglio costituito da combinazioni di titoli performanti e corta su quello meno performante. L'idea è che se le differenze nella grandezza o nel rapporto B/M dei titoli sono "prezzate", allora questi portafogli dovrebbero esibire un premio per il rischio. Il primo portafoglio, SMB, è la semplice differenza tra la media dei rendimenti dei portafogli costruiti sui piccoli titoli (SL, SM e SH) e quello sui grandi titoli (BL, BM e BH), in entrambi i casi ponderati per la capitalizzazione di mercato:

$$(18) SMB = R_S - R_B$$

Il secondo invece è la differenza tra la media dei rendimenti dei due gruppi di titoli con elevato rapporto B/M (SH e BH) e la media dei due gruppi di titoli con basso rapporto B/M (SL e BL):

$$(19) HML = R_H - R_L$$

La prima specificata analisi delle regressioni posta in essere dagli autori individua i coefficienti (β_{iHML} e β_{iSMB}) e mostra risultati sorprendenti. Quando combinati insieme, i tre fattori del modello di Fama-French riescono a spiegare oltre il 90% delle variazioni nei rendimenti dei portafogli diversificati a confronto del 70% del CAPM. Solo il 10% o meno degli stessi rendimenti è attribuibile quindi al rischio non prezzato (o al rischio non sistematico) e rinvenibile nella grandezza dell'intercetta. Se infatti questi fattori spiegassero completamente il rendimento dell'asset, l'alpha della regressione sarebbe uguale a zero. In conclusione, il beta di mercato non può quindi essere ritenuta l'unica variabile in grado di catturare appieno il rischio sistematico.

Si aggiunge alla lista dei fattori utilizzati nella mia analisi il così denominato fattore momentum (Mom factor). L'estensione del modello a tre fattori di Fama e French con l'inclusione del fattore momentum prende il nome di *Carhart four-factor model*. In generale il momentum di un titolo viene definito come la tendenza del prezzo dello stesso di continuare a salire se il trend passato è positivo e scendere nel caso opposto. Per determinare il fattore momentum vengono utilizzati sei portafogli value weighted costruiti sulla base delle dimensioni e dei rendimenti passati (da 2 a 12 mesi). Mom è quindi il rendimento medio dei due portafogli a rendimenti passati elevati meno il rendimento medio dei due portafogli a rendimenti passati bassi.

$$(20) Mom = \frac{1}{2} (Small\ High + Big\ High) - \frac{1}{2} (Small\ Low + Big\ Low)$$

Ciò implica, in linea con le metodologie di costruzione dei portafogli adottate, l'assunzione di una posizione lunga sui portafogli con elevati rendimenti passati e corta su portafogli recentemente non performanti. È bene soffermarsi sulla differenza tra il momentum e semplicemente seguire un trend storico. Quest'ultimo considera principalmente le performance assolute, ovvero comprare durante i rialzi di mercato e vendere nei *downswings*, e quindi rimanere esplicitamente esposti al rischio di mercato. Il momentum non assume un'esplicita visione sui trend di mercato e definisce i "vincenti" o "perdenti" a prescindere dal collasso o meno dello stesso. Per esempio, durante una crisi, i vincitori per il momentum sono le imprese i cui prezzi subiscono il maggior ribasso comparato alle altre società nello stesso periodo. Descritto il momentum, passiamo ora alle ulteriori estensioni del modello originario.

Nel 2015, Fama e French stessi hanno apportato delle modifiche al loro precedente lavoro includendo altri due fattori, la redditività dell'impresa e le politiche di investimento, rispettivamente Robust Minus Weak (RMW) e Conservative Minus Aggressive (CMA). Sulla stessa logica della formazione dei precedenti portafogli, queste variabili aggiuntive possono essere interpretate come le differenze tra i rendimenti di imprese dalla elevata e bassa redditività operativa e dei rendimenti di società che investono in maniera conservativa ed aggressiva.

$$(21) RMW = \frac{1}{2} (R_{SR} + R_{BR}) - \frac{1}{2} (R_{SW} + R_{BW}) \text{ e } CMA = \frac{1}{2} (R_{SC} + R_{BC}) - \frac{1}{2} (R_{SA} + R_{BA})$$

L'inclusione nella regressione di questi due fattori ha reso ridondante HML in quanto la serie storica di quest'ultimo era completamente spiegata dalle restanti quattro variabili (ad esempio, la correlazione tra HML e CMA era uguale a -0.7). Nonostante ciò, il modello suggerisce che i 5 fattori migliorino il potere esplicativo dei rendimenti dei titoli a confronto del modello a 3 fattori.

Riassumiamo i concetti fino a qui introdotti di asset pricing nella seguente regressione:

$$(22) R_{it} = \overbrace{\alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{iSMB} SMB_t + \beta_{iHML} HML_t + \beta_{iRMW} RMW_t + \beta_{iCMA} CMA_t}^{\text{CAPM} \quad \text{FF3} \quad \text{FF5}} + \varepsilon_{it}$$

I risultati dei volatility managed portfolios si basano su diversi rami della letteratura economica. Il framework teorico fino a qui analizzato permette di capire quali siano i dati utilizzati nella pratica. Si

rende ora necessario un ulteriore approfondimento per completare il quadro specifico concettuale di riferimento.

1.4 Le previsioni della volatilità nei modelli ARCH e GARH

Il cuore centrale dei volatility managed portfolios trova ragione di essere in un recente dibattito teorico circa la prevedibilità della volatilità. Il rischio, in qualsiasi forma inteso, è la variabile che permea i modelli finanziari ed i processi di *decision making*. Di conseguenza, delle accurate misure e delle buone previsioni sulla volatilità futura assumono un ruolo chiave per l'implementazione e la valutazione delle teorie di asset pricing. Un primo riferimento bibliografico è rinvenibile nell'articolo "*Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts*" di Torben G. Andersen e Tim Bollerslev del 1998. Gli autori rielaborano i precedenti approcci derivanti dallo studio delle dipendenze temporali della volatilità a frequenze giornaliere (ed inferiori) nei mercati finanziari usando modelli Auto Regressive Conditional Heteroskedastic (ARCH) e Generalised Auto Regressive Conditional Heteroskedastic (GARH).

Una speciale caratteristica della volatilità di un titolo consiste nella non diretta osservabilità. Per la sua determinazione sono quindi necessarie delle osservazioni a diversi istanti temporali, più o meno estesi. Ad esempio, nel mercato delle opzioni viene accettata l'idea che il prezzo di una call europea sia governato dal modello econometrico di Black-Scholes:

$$c_t = P_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_1 - \sigma \sqrt{T-t}) \quad \text{con} \quad d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

La sopra evidenziata formula ci permette di derivare la volatilità implicita (la standard deviation condizionata) del sottostante qualora sia noto il prezzo dell'opzione. Questa approssimazione può differire però dall'attuale volatilità in quanto è derivata dall'assunzione che il prezzo del sottostante segua un moto geometrico Browniano ($dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$). L'evidenza empirica mostra che la volatilità implicita del rendimento di un asset tende ad essere maggiore di quella esplicitata mediante un modello GARH: questo può scaturire dal premio al rischio della volatilità o dalle modalità con le quali sono calcolati i rendimenti giornalieri. Un esempio di volatilità implicita è rappresentato dal Chicago Board Options Exchange Volatility Index (VIX), che tratterò per dimostrare la "sopravvivenza" dei volatility managed portfolios ai costi di transazione. Sebbene la volatilità non sia direttamente osservabile, ha delle caratteristiche implicite che sono comunemente associabili ai rendimenti degli asset. In primo luogo, la volatilità assume valori elevati in alcuni intervalli temporali

e bassi in altri periodi, risultato noto come *volatility cluster*. Inoltre la volatilità evolve nel tempo in modo continuo e non diverge all'infinito, cioè varia all'interno di un intervallo fisso (e segue tendenzialmente un processo stazionario). Infine la volatilità sembra reagire diversamente a grandi incrementi nei prezzi rispetto a grandi decrementi degli stessi (effetto leva). Queste proprietà giocano un ruolo fondamentale nello sviluppo dei modelli di previsione.

L'approccio attualmente dominante per descrivere il comportamento nel tempo della varianza al tempo t condizionata dall'informativa in $t-1$, utilizzato come detto prima da Torben G. Andersen e Tim Bollerslev, si basa sugli ARCH (Engle, *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation*, *Econometrica* 1982). Il concetto implicito di eteroschedasticità indica che la varianza non è costante tra le diverse osservazioni del campione, mentre il termine autore-regressivo rappresenta la dipendenza delle variabili dai valori passati. Descriverò brevemente questo modello per poi passare all'articolo di nostro specifico interesse. Tendo a sottolineare come questa digressione è di fondamentale importanza, così come lo è stata l'evoluzione delle teorie di portafoglio nei precedenti paragrafi, per capire la fonte dei dati, al fine di avere una piena comprensibilità dell'utilizzo della realized volatility nei volatility managed portfolios.

Definiamo un modello per i rendimenti come $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$, dove μ_t rappresenta la media condizionata dei rendimenti e ε_t uno shock (o innovazione o più semplicemente l'errore di previsione) del rendimento del titolo al tempo t . L'idea alla base del modello ARCH è che tale shock segua un processo del tipo $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ con $z_t \sim N(0,1)$ e, per la natura di variabile casuale standardizzata di z_t , anche ε_t è distribuita come una variabile casuale normale con media 0 e varianza σ_t . La varianza condizionata al tempo t , secondo Engle, segue un processo autoregressivo che la renda funzione del quadrato degli shocks passati:

$$\text{ARCH}(1) \quad \text{ARCH}(p)$$

$$(23) \quad \text{var}(\varepsilon_t / I_{t-1}) = \overbrace{\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2}$$

Nel modello evidenziamo come z_t , come detto prima, sia una sequenza di variabili casuali (*white noise*) indipendenti ed identicamente distribuite con media zero e varianza 1 e che i coefficienti α_i devono soddisfare delle condizioni statistiche per assicurare che la varianza condizionata di ε_t sia finita. Il modello può essere quindi stimato attraverso il metodo dei minimi quadrati (OLS). Dalla struttura si può notare come elevati shocks passati $\{\varepsilon_{t-i}^2\}$ implicano una grande varianza condizionata σ_t^2 : questo si traduce nel fatto che, secondo il modello ARCH, grandi shocks tendano ad essere seguiti da grandi shocks. Questo però non ha un diretto impatto sui modelli previsionali in quanto la grandezza della varianza non è sinonimo di una equivalente elevata realizzazione. Ci dice

“solamente” che le probabilità di ottenere una grande variabilità futura è maggiore di ottenere una minore varianza. Questo concetto riprende il così denominato *volatility clustering* dei rendimenti azionari.

Il modello, d'altra parte, suppone che gli shock positivi e negativi abbiano lo stesso effetto sulla volatilità in quanto dipendono dai quadrati dei precedenti shocks. Nelle applicazioni pratiche questo risulta essere un limite, dato che i prezzi degli asset finanziari rispondono diversamente a shock positivi o negativi. Inoltre tale approccio fornisce un mero meccanismo di descrizione del comportamento della varianza condizionata senza dare alcuna indicazione delle cause scaturenti di tale andamento.

Nel 1986 Bollerslev apporta un miglioramento al modello ARCH, dispendioso dal punto di vista dei parametri necessari alla stima del processo di volatilità del rendimento, chiamato *Generalised Auto Regressive Conditional Heteroskedastic* (GARCH).

Nel caso di ARCH (1) infatti, la varianza del periodo successivo dipende unicamente dal quadrato dei residui (shocks) del periodo precedente: ciò implica che una crisi che ha causato ampi shocks non mostrerebbe la persistenza che si osserva nella realtà. Tale miglioramento è posto in essere mediante l'inclusione, oltre alla componente autoregressiva dei ritardi degli shocks, della stessa varianza condizionata ritardata. Considerando per semplicità il processo GARCH (1,1):

$$(24) \varepsilon_t = \sigma_t z_t \quad \text{e} \quad (25) \sigma_t^2 = \alpha_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Notiamo, anche in questo caso, il fenomeno del volatility clustering delle serie storiche, dato che grandi ε_{t-1}^2 o σ_{t-1}^2 comportano elevati σ_t^2 . Condizione necessaria affinché la varianza condizionata sia ben definita è che la somma dei coefficienti (a_1 e β_1) sia minore di uno.

Ma ciò che risulta essere di rilevanza in questo elaborato è la possibilità di prevedere il comportamento futuro della varianza condizionata. Se nel modello GARCH consideriamo come h come l'ultimo periodo osservato, la previsione *one-step-ahead* può essere formalizzata come:

$$(26) \sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

Dove le variabili ε_h^2 e σ_h^2 risultano essere note al tempo h . L'espressione può essere comodamente riscritta come:

$$(27) \sigma_h^2(1) = \alpha_0 + a_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

Data l'uguaglianza $\varepsilon_h^2 = \sigma_h^2 z_h^2$, possiamo ottenere la seguente equazione:

$$(28) \sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + (a_1 + \beta_1)\sigma_h^2 + a_1\sigma_h^2(\varepsilon_h^2 - 1)$$

Nel caso in cui $h=t+1$, l'equazione diventa:

$$(29) \sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + (a_1 + \beta_1)\sigma_{t+1}^2 + a_1\sigma_{t+1}^2(\varepsilon_{t+1}^2 - 1)$$

Infine, considerando che $E(\varepsilon_{t+1}^2 - 1/I_t) = 0$, la previsione della volatilità per due periodi avanti è così descritta:

$$(30) \sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (a_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1)$$

Data questa espressione si può generalizzare il risultato per l periodi futuri come:

$$(31) \sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (a_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1) \text{ con } l > 1$$

Attraverso la sostituzione iterativa del precedente processo avremo che l'equazione può essere riscritta come:

$$(32) \sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0[1-(a_1+\beta_1)^{l-1}]}{1-a_1-\beta_1} + (a_1 + \beta_1)^{l-1}\sigma_h^2(1) \text{ con } l > 1$$

e per l che tende all'infinito troveremo:

$$(33) \sigma_h^2(l) \rightarrow \frac{\alpha_0}{1-a_1-\beta_1} \text{ per } l \rightarrow \infty \text{ con } a_1 + \beta_1 < 1$$

L'espressione finale del processo GARCH (1,1) ci dice che la varianza condizionata converge alla varianza non condizionata all'aumentare dell'orizzonte di previsione. Conseguentemente a periodi di alta volatilità seguiranno periodi di volatilità minore e viceversa. In sintesi, possiamo dire che esiste un livello "normale" di volatilità al quale la varianza condizionata farà ritorno. La velocità della convergenza, e quindi la persistenza della volatilità nel tempo, è data dalla somma dei due parametri a_1 e β_1 : se la volatilità "schizza" durante un episodio di crisi economica, il lasso temporale K

necessario affinché la varianza si posizioni a “metà strada” tra la varianza non condizionata e la prima previsione sarà uguale a $(\alpha_1 + \beta_1)^K = 0,5$, per cui $K = \ln(0,5)/\ln(\alpha_1 + \beta_1)$.

Gli ARCH e GARCH hanno dato il via ad una vasta letteratura per la modellizzazione delle dipendenze temporali della volatilità attraverso gli stessi processi stocastici. Mentre la maggior parte degli studi ha documentato una persistenza significativa intertemporale della volatilità, le tradizionali valutazioni previsionali *ex-post* suggeriscono che i modelli non spieghino sufficientemente la variabilità nei rendimenti al quadrato (ex-post) e forniscano dei risultati dal limitato valore pratico. Andersen e Tim Bollerslev, nel già citato articolo “*Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts*”, mostrano come lo stesso approccio ARCH restituisca delle accurate previsioni intra giornaliere di fondamentale importanza per le applicazioni finanziarie.

I due autori, nello sviluppare la loro analisi, utilizzano due serie storiche sui tassi di cambio Deutschmark-U.S. Dollar (lo studio è antecedente all’introduzione dell’Euro) e Yen-U.S. Dollar per studiare il comportamento della volatilità attraverso il sopra citato modello GARCH (1,1). La loro formalizzazione di tale modello si basa sul seguente sistema, differente in termini nozionistici ma non concettuali:

$$(34) r_{(m),t} = \sigma_{(m),t} z_{(m),t}$$

$$(35) \sigma_{(m),t}^2 = \varphi_{(m)} + \alpha_{(m)} \left(\sigma_{(m),t-\frac{1}{m}} z_{(m),t-\frac{1}{m}} \right)^2 + \beta_{(m)} \sigma_{(m),t-\frac{1}{m}}^2$$

$$\varphi_{(m)} > 0, \alpha_{(m)} \geq 0, \beta_{(m)} \geq 0 \text{ e } z_{(m),t} \text{ i. i. d.}$$

In questo caso $\sigma_{(m),t}^2$ denota la varianza condizionata di $r_{(m),t}$ basata sull’informativa disponibile in $t-1/m$, dove m è il numero di osservazioni giornaliere. Inizialmente stimano ad intervalli giornalieri, attraverso il metodo di quasi-massima verosimiglianza (QMLE), i parametri φ_0, α_1 e β_1 che riporto nella seguente tabella (di estrazione del loro articolo, dove $\varphi = \alpha_0$).

	DM-\$	¥-\$
$\psi_{(1)}$	0.022 (0.009)	0.026 (0.008)
$\alpha_{(1)}$	0.068 (0.016)	0.104 (0.026)
$\beta_{(1)}$	0.898 (0.023)	0.844 (0.032)

Tabella 1: sono riportate le stime QMLE per il modello GARCH (1,1) dell’equazione (35) basate sui rendimenti giornalieri per i due tassi di cambio, da ottobre 1987 a settembre 1992. Gli errori standard sono riportati in parentesi.

Fonte: *Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts*, Andersen e Bollerslev (1998).

L'elevata significatività dei coefficienti, unito ad i risultati del test di Ljung-Box sulla autocorrelazione dei residui, mostrano quanto il GARCH (1,1) catturi adeguatamente le dipendenze della volatilità giornaliera. La persistenza della volatilità, evidenziate dalla stima della somma dei coefficienti α_1 e β_1 prossima ad 1, suggeriscono che la stessa sia fortemente prevedibile.

Ciò nonostante, gli autori sottolineano che le previsioni utilizzate generalmente mediante criteri Mean Squared Error (MSE) siano di bassa qualità per orizzonti temporali maggiori di un giorno. Per dimostrare tale problematica, utilizzano una comune modalità di valutazione previsionale ottenuta attraverso la regressione ex-post dei rendimenti al quadrato e della volatilità:

$$(36) r_{(m),t+1/m}^2 = a_{(m)} + b_{(m)}\sigma_{(m),t+1/m}^2 + u_{(m),t+1/m}$$

dove $t=0,1/m,2/m,\dots$. L' R^2 di questa regressione fornisce una misura diretta della variabilità dei rendimenti ex-post, $r_{(m),t+1/m}^2$, spiegata dalla stima di $\sigma_{(m),t+1/m}^2$: per questo motivo può essere interpretato come semplice indicatore della predicibilità del processo della volatilità, di potenziale significatività in termini previsionali.

L'uso dell' R^2 risulta però essere di problematica applicazione come guida principale per l'accuratezza delle previsioni della volatilità. Le decisioni finanziarie razionali si basano sulla volatilità anticipata futura e non sulla seguente realizzazione dei rendimenti al quadrato della stessa. Sotto l'ipotesi nulla che il modello GARCH (1,1) costituisca la corretta specificazione del processo, il vero rendimento della varianza è, per definizione, identico alla previsione della volatilità dello stesso GARCH. La precedente regressione si poggia quindi sull'assunzione che i rendimenti osservati siano una misura della volatilità realizzata: questo è giustificato qualora la stima della volatilità sottostante non sia distorta. Tuttavia, i rendimenti realizzati al quadrato sono una debole stima dei movimenti giornalieri della volatilità, poiché la loro componente specifica (o idiosincronica) fornisce appunto una stima distorta (nonché estremamente *noisy*) della latente volatilità. Conseguentemente è impossibile interpretare il risultante R^2 come adeguata misura della prevedibilità dei rendimenti: dai risultati degli autori, tale indicatore risulta essere, per il campione osservato, pari a 0.047 (per la regressione sul tasso di cambio Deutschemark-U.S. Dollar) e 0.026 (per la regressione sul tasso di cambio Yen-U.S. Dollar). Questo basso valore porta alla conclusione che i modelli classici di valutazione della volatilità possano essere erroneamente specificati e limitanti dal punto di vista pratico.

Andersen e Bollerslev passano quindi a studiare la precedente regressione nel tempo continuo, ma mediante un nuovo approccio, chiamato *realized volatility*. Evidenziano come al crescere della frequenza campionaria (ad intervalli di tempo brevi) della questa volta sommatoria giornaliera dei

rendimenti al quadrato (ex-post) al primo membro della seguente equazione, la precedente conclusione cambia in maniera significativa:

$$(37) \sum_{j=1, \dots, m} r_{(m), t+j/m}^2 = a_{(1)m} + b_{(1)m} \sigma_{(1)1, t+1/m}^2 + u_{(1)m, t+1}$$

L'idea è che se il movimento della volatilità è continuo, aumentare la frequenza di osservazione porta ad una stima precisa in ogni momento della volatilità.

Nella tabella è riportato l' R^2 per diverse frequenze, dove ad esempio $R_{(1)24}^2$ rappresenta la stima oraria per le due regressioni (rispettivamente pari a 0.331 e 0.237):

m	DM-\$	¥-\$
1	0.047	0.025
3	0.133	0.095
24	0.331	0.237
288	0.479	0.392

Tabella 2: sono riportati gli $R_{(1)m}^2$ della regressione (37). I rendimenti sono calcolati dalle quotazioni continue dei due tassi di cambio da ottobre 1992 a settembre 1993, per un numero totale di 260 settimane e 74.880 osservazioni di intervalli di cinque minuti. Le previsioni giornaliere della volatilità si basano sull'equazione (35) con $m=1$ e parametri determinati dalla Tabella 2. Le righe mostrano le frequenze del campione $m=1, 3, 24, 288$, rispettivamente giornaliere, 8 ore, orarie e cinque minuti.

Fonte: *Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts*, Andersen e Bollerslev (1998)

Oltre all'incremento dell' R^2 , e quindi del potere esplicativo del modello GARCH (1,1), si assiste anche ad una diminuzione dell'errore di previsione: i rendimenti cumulati di 5 minuti (caso in cui $m=288$) dell'equazione (37) sono maggiormente correlati con le previsioni giornaliere del GARCH (1,1) rispetto a quelli derivanti dall'equazione (36). Questi risultati sono rinvenibili nei successivi due grafici, il primo riferibile alla relazione tra il GARCH (1,1) e l'equazione (36), il secondo alla relazione tra GARCH (1,1) e l'equazione (37):

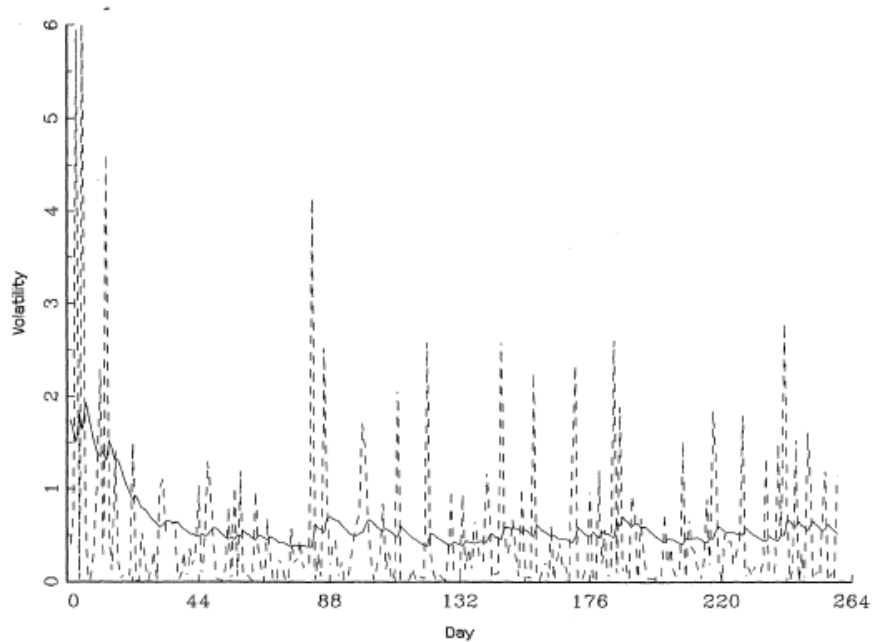


Figura 2: Previsioni dei rendimenti quadrati giornalieri e del modello GARCH (1,1). La linea spessa rappresenta le previsioni GARCH (1,1) della volatilità un giorno avanti dell'equazione (35) per il marco tedesco ed il dollaro, con $m=1$ ed i parametri nella tabella 1. La linea tratteggiata si riferisce invece ai corrispondenti rendimenti realizzati al quadrato dell'equazione (36). Il campione va dal primo ottobre 1992 al 29 settembre 1993.

Fonte: Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts, Andersen e Bollerslev (1998)

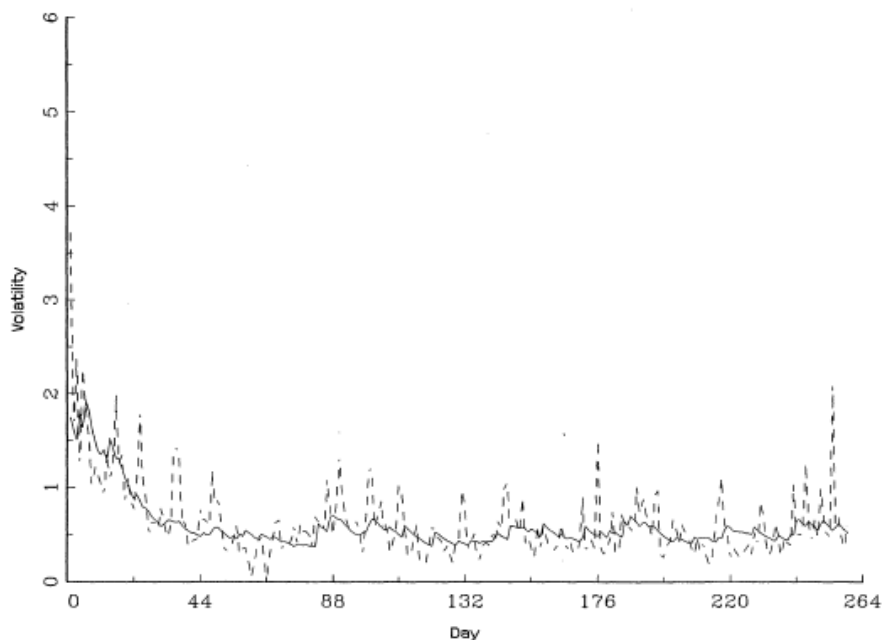


Figura 3: Previsioni dei rendimenti cumulati giornalieri di cinque minuti e del modello GARCH (1,1). La linea spessa rappresenta le previsioni GARCH (1,1) della volatilità un giorno avanti dell'equazione (35) per il marco tedesco ed il dollaro, con $m=1$ ed i parametri nella tabella 1. La linea tratteggiata si riferisce invece alla varianza giornaliera ex-post basata sui rendimenti cumulati di cinque minuti dell'equazione (37). Il campione va dal primo ottobre 1992 al 29 settembre 1993.

Fonte: Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts, Andersen e Bollerslev (1998)

L'evidenza empirica dell'articolo dimostra quindi come le previsioni della volatilità siano fortemente correlate con la futura volatilità latente e che i modelli GARCH, utilizzati mediante regressioni dei rendimenti cumulati intra-giornalieri, spieghino circa il 50% della variazione di questa misura.

Perché si è resa necessaria questa approfondita analisi? È servita in quanto i volatility managed portfolios si basano sul consenso della letteratura economica (in primis quello appena esposto) per cui la volatilità si possa accuratamente prevedere per periodi relativamente brevi. Come verrà illustrato nel seguente paragrafo, dedicato ai risultati del volatility timing, l'approssimazione che viene posta in essere fa coincidere la volatilità del mese $t+1$ con la volatilità realizzata del mese t . Tale semplificazione, rispetto ai modelli precedentemente trattati, deriva dalla possibilità che l'investitore *naive* possa facilmente implementare la strategia a volatilità gestita.

1.5 I risultati del volatility timing

La trattazione esposta precedentemente illustra gli elementi statistici dei modelli sulla volatilità, ma trascura al contempo il significato economico della predicibilità della stessa, ovvero il valore economico del *volatility timing* per un investitore avverso al rischio. Gli articoli di interesse in tale evidenza empirica sono *The Economic Value of Volatility Timing* e *The Economic Value of Volatility Timing using "realized" volatility* ad opera di Jeff Fleming, Chris Kirby e Barbara Ostdiek pubblicati rispettivamente nel *The Journal of Finance* e *The Journal of Economics* nel 2001 e 2003.

Il primo paper esamina il valore del timing della volatilità nelle strategie di asset-allocation per brevi orizzonti temporali giornalieri. Viene considerato un investitore che adotta una strategia di ottimizzazione media-varianza (a là Markovitz) per allocare le sue risorse tra quattro asset-classes: azioni, obbligazioni, oro e liquidità. L'obiettivo è quindi quello di massimizzare il rendimento atteso (o minimizzare la volatilità) dato un target di volatilità (o di rendimento atteso). La soluzione per la scelta di portafoglio dell'investitore è una strategia dinamica giornaliera di ribilanciamento, che individua la specificazione di pesi ottimali come funzione del tempo. Da evidenziare la similarità tra questo approccio di costruzione del portafoglio e quello dei volatility managed portfolios: gli autori di quest'ultima strategia fanno più volte riferimento, durante l'esposizione del loro studio, ai risultati di Fleming *e co.* Ciò che però distingue le due metodologie è la determinazione, presente solo nella prima, della stima della matrice condizionata delle covarianze e dei rendimenti attesi. Siccome le varianze e le covarianze possono essere determinate con maggiore precisione rispetto ai rendimenti attesi, quest'ultimi vengono trattati come costanti e le variazioni nei pesi sono conseguentemente guidate unicamente dalla matrice condizionata delle covarianze dei rendimenti giornalieri. Dal punto

di vista analitico, la scelta del peso dell'asset rischioso deriva dalla soluzione del seguente problema di ottimizzazione ad ogni data t :

$$\begin{aligned} & \min_{w_t} w_t' \Sigma_t w_t \\ & s. t. w_t' \mu + (1 - w_t' \mathbf{1}) R_f = \mu_p \end{aligned}$$

In tale sistema definiscono R_{t+1} , $\mu \equiv E[R_{t+1}]$ e $\Sigma_t \equiv E_t[(R_{t+1} - \mu)(R_{t+1} - \mu)']$ come rispettivamente un vettore $N \times 1$ di asset rischiosi, il valore atteso di R_{t+1} e Σ_t la matrice delle covarianze condizionate di R_{t+1} . w_t rappresenta invece il vettore dei pesi degli asset rischiosi del portafoglio, R_f l'asset privo di rischio (o liquidità) ed infine μ_p il rendimento atteso target. Il peso ottimale, dopo aver sottratto a ciascun elemento di R_{t+1} il tasso risk free, sarà uguale a:

$$(38) w_t = \frac{\mu_p \Sigma_t^{-1} \mu}{\mu' \Sigma_t^{-1} \mu}$$

La strategia di volatility timing implicita in questa equazione identifica un ribilanciamento del portafoglio che avrà la varianza minima condizionata data qualsiasi scelta del rendimento atteso o, equivalentemente, il rendimento atteso massimo dato un livello fisso di volatilità. L'idea di fondo è quindi che i pesi varino al variare di μ e Σ_t , ma dato che μ è trattato come costante, l'unica variabile ad influire sul peso è la matrice delle covarianze condizionate.

Per implementare tale strategia però, è necessaria la stima della matrice condizionata delle covarianze *one-step-ahead*, derivata mediante un approccio non-parametrico sviluppato da Foster e Nelson nel 1996. Lo stimatore è una media *rolling* ponderata dei rendimenti quadrati passati, dove i pesi sono determinati dalla minimizzazione dell'errore quadratico medio (MSE) dello stimatore stesso. In particolare la classe di stimatori utilizzati può essere scritta come di seguito:

$$(39) \hat{\Sigma}_t = \sum_{l=-t+1}^{T-t} w_{ij,t+l} (r_{i,t+l} - \mu_i)(r_{j,t+l} - \mu_j)$$

r_{it} e r_{jt} sono i rendimenti degli asset i e j mentre $w_{ij,t+l}$ è il peso attribuito al prodotto tra i residui degli stessi. La premessa logica a questo approccio è che se $\hat{\Sigma}_t$ varia nel tempo, allora la sua dinamica può essere riflessa nel movimento giornaliero dei rendimenti: per questo motivo, applicando un set coerente di pesi del prodotto dei residui (o innovazioni, come le ho chiamate precedentemente nel modello ARCH) ritardato, è possibile costruire una serie storica della stima di $\hat{\Sigma}_t$.

Foster e Nelson hanno dimostrato che la strategia ottimale per assicurare che lo stimatore restituisca il minor mean squared error e garantisca la positività della matrice covarianza è lasciare che il peso w declini esponenzialmente all'aumentare di l . La precisa espressione del peso ottimale è però dipendente dalle caratteristiche del processo della volatilità. Qualora sia stocastico, varrà la seguente equazione, dove $a_{ij,t}$ è il tasso di decadimento:

$$(40) w_{ij,t+l} = (a_{ij,t}/2)e^{-a_{ij,t}l}$$

Questa metodologia implica quindi la stima del tasso di decadimento come variabile che minimizzi il MSE dello stimatore dell'equazione (39). Tuttavia, tale procedura fa sì che si debba determinare lo stesso tasso per ciascun elemento della matrice delle covarianze: per questo motivo Fleming e co. semplificano l'analisi assumendo che sia costante e quindi $a_{ij,t} = a_t$ per ogni i e t .

Dopo aver costruito la matrice, formano un portafoglio dinamico per valutare le performance della strategia. La misura del valore economico del volatility timing è il "prezzo" che un investitore avverso al rischio pagherebbe per cambiare il portafoglio ottimo statico (ex-ante) con quello dinamico. Per dare evidenza a tale prezzo, gli autori ragionano in termini di utilità (quadratica) dell'investitore: in particolare chiamano "tassa" (fee , o Δ) quell'ammontare di spesa giornaliera che uguaglia l'utilità media del portafoglio statico ($R_{s,t+1}$) con quello dinamico ($R_{d,t+1}$), mantenendo costante il grado di avversione al rischio (γ). In formule:

$$(41) \sum_{t=0}^{T-1} (R_{d,t+1} - \Delta) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} (R_{d,t+1} - \Delta)^2 = \sum_{t=0}^{T-1} R_{s,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{s,t+1}^2$$

I risultati del loro lavoro indicano che quando la stima del rischio dei rendimenti attesi è trascurabile, ovvero è "allineata" a quello medio del campione, la strategia di volatility timing traccia una frontiera efficiente al di sopra di quella dei portafogli a pesi fissi e determina uno Sharpe ratio maggiore nel 92% delle simulazioni. Inoltre, tale efficacia migliora quando siano utilizzate stime più accurate della volatilità rispetto al criterio MSE: ad esempio, qualora la persistenza della volatilità è paragonabile a quella implicita nel modello GARCH, un investitore avverso al rischio pagherebbe un prezzo positivo per cambiare strategia nel 100% dei casi analizzati.

Gli stessi autori nel 2003 apportano delle modifiche alla stima della matrice delle covarianze condizionate del loro precedente elaborato. A differenza della prima, che si basa sulla stima *rolling* dei rendimenti giornalieri, la nuova elaborazione trova ragione nei precedentemente citati lavori di Andersen e Bollerslev, per i quali l'utilizzo di rendimenti intra-giornalieri migliora l'efficienza di

previsione della volatilità. Dividendo un intervallo di tempo in n sotto periodi di lunghezza h , viene definito r_{t+jh} come il vettore di rendimenti capitalizzati continuamente nel sotto periodo che finisce al tempo $t + jh$. Si riferiscono quindi alla quantità $V_{t+1} = \sum_{j=1}^n r_{t+jh} r'_{t+jh}$ come la matrice asintoticamente consistente delle covarianze realizzate per l'intervallo da t a $t+1$. Tale proprietà deriva da precedenti studi di Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2001) secondo i quali, definita $\int_0^1 S_{t+r} d\tau$ come misura della matrice latente delle covarianze di un vettore di rendimenti capitalizzato continuamente per l'intervallo da t a $t+1$, $\sum_{j=1}^n r_{t+jh} r'_{t+jh} - \int_0^1 S_{t+r} d\tau \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Gli autori concludono che l'utilizzo di questa matrice V , a parità di tasso di decadimento prima illustrato, fornisca delle stime più precise rispetto a quella determinata dai rendimenti giornalieri: tale risultato è dovuto al fatto che le varianze e covarianze realizzate sono più efficienti nel predire le varianze e covarianze future.

Sin da subito voglio precisare che lo studio del volatility timing nei volatility managed portfolios si basa sulla costruzione del portafoglio partendo da fattori individuali ed usando orizzonti temporali non giornalieri, bensì mensili. Questo consente l'implementazione della strategia da parte dell'investitore (stimare la matrice delle covarianze realizzate non è un compito da poco, così come il tasso di decadimento) ma soprattutto permette, focalizzandosi sul fattore di rischio sistematico, di giungere a conclusioni riguardo il cambiamento nel tempo del prezzo del rischio. Ciò non è possibile dall'analisi del volatility timing di uno specifico titolo, in quanto la parte principale della sua volatilità è, in media, idiosincratca.

1.6 La relazione tra rischio e rendimento e le Low-Risk-Anomalies

Una seconda parte della letteratura di riferimento nei volatility managed portfolio deriva dallo storico dibattito circa l'esistente relazione tra rischio e rendimento, sia nel corso del tempo e sia in un determinato periodo (cross-section). A tal riguardo, l'evoluzione delle teorie è vastissima: si possono citare numerosi articoli, a partire da Glosten *e co* (*On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*, 1993), Christian Lundblad (*The risk return tradeoff in the long run: 1836-2003*, 2004) e non ultimi Martin Lettau e Sydney Ludvigson (*Measuring and modelling variation in the risk-return tradeoff*, 2007). Tipicamente gli studi sono fatti regredendo i rendimenti realizzati futuri sulle stime della volatilità o della varianza. Ciò che però stupisce sono i differenti risultati ai quali i vari autori giungono: i coefficienti determinati da queste regressioni sono solitamente negativi o prossimi allo zero, ma in taluni casi gli stessi risultano essere positivi. I fattori

che incidono sul segno sono quindi svariati, includendo il campione utilizzato, imposizione di vincoli, l'orizzonte temporale preso in considerazione ecc.

Non reputo di fondamentale importanza procedere ora, come in precedenza, ed illustrare le varie teorie dei citati studiosi (a cui si aggiunge una lunga lista di autori): in primo luogo, sarebbero delle mere spiegazioni fine a se stesse circa i diversi approcci utilizzati; ma più specificatamente, tale dibattito teorico è trattato in maniera completamente differente, se non superflua, nei volatility managed portfolios. Non ci si interroga sulla relazione positiva o negativa del tradeoff rischio rendimento, quanto piuttosto sulla magnitudo della stessa. È la forza di tale rapporto che ha implicazioni qualitative nelle scelte di portafoglio. Anche qualora la relazione sia positiva, per cui ad un aumento del rendimento corrisponda un aumento della volatilità (come accennato prima non sempre supportata dall'evidenza empirica), il volatility timing continua ad essere vantaggioso se i rendimenti attesi non aumentano "abbastanza", comparati all'incremento della varianza. Tornerò su questo concetto più approfonditamente nel terzo capitolo quando tratterò gli effetti dell'orizzonte temporale nei volatility managed portfolios, mostrando graficamente la dipendenza che intercorre tra le due grandezze.

Sebbene non mi sia inoltrato nella specificazione della relazione nel corso tempo tra rischio e rendimento, farò diversamente per quanto concerne quelle cross sezionali. Questo perché parte delle conclusioni dei volatility managed portfolios (nonché dei test strutturali sulla loro robustezza) sono complementari e si basano su risultati recenti che documentano delle *low-risk-anomalies* (anomalie della bassa volatilità) nei campioni trasversali. Ci si riferisce generalmente a tali anomalie quando i portafogli composti da titoli a bassa varianza (o basso beta) sovra-performano in termini di rendimento aggiustato per il rischio quelli costituiti da titoli più rischiosi. Illustrerò nel caso specifico due strategie che esplorano tali anomalie, ovvero il *betting-against-beta* (BAB) ed il *risk parity*, in quanto verranno successivamente riprese (anche in termini sperimentali) per studiare la correlazione con i portafogli a volatilità gestita.

Il primo modello, Betting Against Beta, è stato presentato da Andrea Frazzini e Lasse Heje Pedersen nell'articolo *Betting Against Beta* e pubblicato nel *Journal of Financial Economics* nel 2014. Risulteranno ora utili le premesse sul CAPM, circa la nozione del beta di un titolo, la misura statistica del rischio non diversificabile, e l'alpha, ovvero il rendimento in eccesso rispetto quello stimato dalla SML. Inoltre, una principale premessa del CAPM è che gli investitori razionali investano le loro risorse nei portafogli che mostrino i più alti rendimenti attesi per unità di rischio (concetto riassumibile nella massimizzazione dello Sharpe ratio) e che conseguentemente facciano uso della leva finanziaria per meglio adeguare il portafoglio alle proprie preferenze. Tuttavia molti investitori (sia individuali che istituzionali) sono vincolati al grado di leva che possono utilizzare, e finiscono

con il sovra-pesare gli asset rischiosi anziché utilizzare appunto l'indebitamento. Questo comportamento, che porta a "spostare" le scelte di investimento verso titoli dall'elevato beta, suggerisce che gli stessi debbano offrire un rendimento aggiustato per il rischio minore (o equivalentemente un rendimento atteso minore) rispetto agli asset *low-beta*, che invece richiedono l'uso di leva. Queste ipotesi trovano riscontro in evidenze empiriche che mostrano come la Security Market Line del CAPM sia in realtà molto più piatta di quanto ipotizzato dallo stesso modello e la sua pendenza sia frutto dei vincoli (sulla leva o sui margini di mantenimento ad esempio) a cui sono soggetti gli agenti. L'implicazione teorica di tali anomalie è che il mercato "paga" troppo per i titoli *high-beta* e sotto-prezza gli asset *low-beta*, creando quindi delle opportunità di investimento/arbitraggio che gli autori dell'articolo cercano di sfruttare. Come? Creando un portafoglio/fattore, appunto Betting Against Beta (BAB) che, forte delle precedenti assunzioni, assuma una posizione lunga su titoli dal basso beta (sotto-prezzati) e corta su quelli dal beta alto (sovra-prezzati). Ad esempio, un fattore BAB è una combinazione di una posizione lunga di €1.4 su titoli *low-beta* e corta di €0.7 su *high-beta* (e due ulteriori di segno opposto alle precedenti sull'asset risk-free per rendere l'operazione *self-financing*) che restituisce un beta complessivo pari a zero, ovvero indipendente dal rischio sistematico (*market neutral*). In formule:

$$(42) r_{t+1}^{BAB} = \frac{1}{\beta_t^L} (r_{t+1}^L - r^f) - \frac{1}{\beta_t^H} (r_{t+1}^H - r^f)$$

In questo fattore vengono definiti $r_{t+1}^L = w'_L r_{t+1}$ e $r_{t+1}^H = w'_H r_{t+1}$ dove w'_L e w'_H sono rispettivamente i pesi dei portafogli a basso ed alto beta. Per definizione poniamo ovviamente $\beta_t^L < \beta_t^H$.

Gli autori dimostrano che il rendimento atteso del BAB risulta essere in media positivo e la grandezza dello stesso dipende sia dallo spread tra i beta sia da quanti vincoli siano presenti sul mercato, così come catturati dal moltiplicatore Lagrangiano φ_t .

$$(43) E_t(r_{t+1}^{BAB}) = \frac{\beta_t^H - \beta_t^L}{\beta_t^H \beta_t^L} \varphi_t \geq 0$$

La presenza di vincoli risulta essere quindi un elemento centrale nella loro teoria: Frazzini e Pedersen mostrano come gli agenti *unconstrained* mantengono un portafoglio di asset rischiosi il cui beta è minore di 1, mentre investitori *constrained* detengono un portafoglio dal beta maggiore di 1. Questa intuizione è alla base della validità della strategia per cui i titoli con beta elevato siano sovra-prezzati e viceversa quelli con beta inferiori, nonché della stima della minore inclinazione della SML rispetto a quanto predetto dal modello CAPM.

La costruzione del portafoglio ha inizio dalla classificazione ascendente dei titoli in base al loro beta e dalla successiva individuazione della mediana, che permette la creazione di due portafogli dal beta rispettivamente elevato e basso. Il peso di ciascun asset nello specifico portafoglio è funzione della grandezza relativa del beta e viene aggiustato ogni mese mediante una procedura *rolling*. Per dare evidenza empirica del fatto che, fra tutte le asset class, ci sia un relazione inversa tra alpha (o lo Sharpe ratio) ed il beta, regrediscono singolarmente dieci portafogli *equally weighted* determinati assegnando ogni titolo del NYSE al decile corrispondente la precedente ordinazione. Riporto i risultati del loro studio mediante la seguente tabella:

	P1 (Low beta)	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10 (high beta)	BAB
Excess return	0.91 (6.37)	0.98 (5.73)	1.00 (5.16)	1.03 (4.88)	1.05 (4.49)	1.10 (4.37)	1.05 (3.84)	1.08 (3.74)	1.06 (3.27)	0.97 (2.55)	0.70 (7.12)
CAPM alpha	0.52 (6.30)	0.48 (5.99)	0.42 (4.91)	0.39 (4.43)	0.34 (3.51)	0.34 (3.20)	0.22 (1.94)	0.21 (1.72)	0.10 (0.67)	-0.10 (-0.48)	0.73 (7.44)
3-factor alpha	0.40 (6.25)	0.35 (5.95)	0.26 (4.76)	0.21 (4.13)	0.13 (2.49)	0.11 (1.94)	-0.03 (-0.59)	-0.06 (-1.02)	-0.22 (-2.81)	-0.49 (-3.68)	0.73 (7.39)
4-factor alpha	0.40 (6.05)	0.37 (6.13)	0.30 (5.36)	0.25 (4.92)	0.18 (3.27)	0.20 (3.63)	0.09 (1.63)	0.11 (1.94)	0.01 (0.12)	-0.13 (-1.01)	0.55 (5.59)
5-factor alpha*	0.37 (4.54)	0.37 (4.66)	0.33 (4.50)	0.30 (4.40)	0.17 (2.44)	0.20 (2.71)	0.11 (1.40)	0.14 (1.65)	0.02 (0.21)	0.00 (-0.01)	0.55 (4.09)
Beta (ex ante)	0.64	0.79	0.88	0.97	1.05	1.12	1.21	1.31	1.44	1.70	0.00
Beta (realized)	0.67	0.87	1.00	1.10	1.22	1.32	1.42	1.51	1.66	1.85	-0.06
Volatility	15.7	18.7	21.1	23.1	25.6	27.6	29.8	31.6	35.5	41.7	10.7
Sharpe ratio	0.70	0.63	0.57	0.54	0.49	0.48	0.42	0.41	0.36	0.28	0.78

Tabella 3: Rendimenti azionari americani, 1926-2012. La tabella mostra i rendimenti dei portafogli, ordinati in maniera ascendente dalla colonna 1 (P1) alla colonna 10 (P10) a seconda dei beta dei titoli che li costituiscono. Tutte le azioni sono equi pesate all'interno di un dato portafoglio, e lo stesso è ribilanciato ogni mese per mantenere i pesi uguali. L'ultima colonna mostra il fattore BAB. La tabella include tutte le azioni disponibili nel database CR.SP da gennaio 1926 a marzo 2012. Alpha è l'intercetta della regressione di rendimenti mensili. Le variabili esplicative sono i rendimenti mensili di Fama e French e le loro estensioni. Gli errori standard sono in parentesi. Beta (ex ante) è il beta media stimato al momento della formazione del portafoglio. La volatilità e lo Sharpe ratio riportati sono annualizzati.

Fonte: *Betting Against Beta*, Andrea Frazzini e Lasse Heje Pedersen, 2014

Gli esperimenti evidenziano come l'alpha, derivato dalla regressione mensile dei rendimenti in eccesso dei fattori di Fama e French per il campione dal 1926 al 2012, sia maggiore per i portafogli *low-beta* e minore per gli *high-beta*. Lo Sharpe ratio di questi portafogli mostra la stessa tipologia di comportamento. All'ultima colonna della precedente tabella si può notare il fattore BAB, costruito come prima esposto: consistentemente con la teoria, tale fattore mostra alpha positivi per FF3, FF4 (FF3 con l'aggiunta del fattore momentum) e FF5, rispettivamente pari a 0.73, 0.55 e 0.55 ed uno Sharpe ratio uguale a 0.78. Gli esperimenti sono stati estesi sia internazionalmente, sia relativamente ad altre asset class, trovando risultati del tutto analoghi.

Le anomalie rispetto al modello CAPM possono quindi essere catturate e sfruttate dal fattore Betting-Against-Beta. L'importanza di tale risultato viaggia su binari separati rispetto a quello dei volatility managed portfolios: Moreira e Muir utilizzano, come sarà mia premura replicare, tale fattore come variabile aggiuntiva di controllo (oltre ai fattori di Fama e French) per testare la tenuta della strategia a volatilità gestita. L'idea di fondo, che svilupperò in seguito, è che se il fattore BAB spiega sufficientemente i volatility managed portfolios, la prova della loro efficienza può derivare da anomalie cross sezionali come quella appena descritta. Qualora invece sia indipendente, trova ragione di essere in altre motivazioni economiche. Lascio al secondo capitolo il compito di ritornare sull'argomento.

Accanto alle anomalie evidenziate dai fattori BAB, si pongono sul medesimo piano delle "singolarità" cross sezionali Clifford Asness, Frazzini e Pedersen con l'articolo *Leverage Aversion and Risk Parity* pubblicato nel *Financial Analyst Journal* nel 2012. Gli autori mostrano che, sulla base delle assunzioni dei BAB, l'avversione degli agenti all'utilizzo della leva finanziaria cambiano le previsioni sulle moderne teorie di portafoglio, portando l'investimento in asset sicuri ad offrire un rendimento aggiustato per il rischio maggiore di quelli più rischiosi. In questo caso però, le conseguenti opportunità di investimento sono catturate da una strategia *risk parity*, che si esplicita nella costruzione di un portafoglio in cui le asset class che lo costituiscono contribuiscono in misura uguale al rischio totale del portafoglio. Gli autori partono dall'osservazione che la tipica asset allocation 60/40, ovvero 60% in azioni e 40% in obbligazioni, non sia sufficientemente diversificata dal punto di vista di quanto ciascuna asset class alimenti il rischio del portafoglio: il movimento nel prezzo delle azioni domina la volatilità del portafoglio stesso. Per questo motivo suggeriscono una diversificazione del rischio che si basi, come accennato prima, nell'uguagliare il rischio apportato dalle azioni a quello delle obbligazioni: ciò si traduce in un logico sovra investimento nei *low-risk* assets.

Quando storicamente messi a confronto, i rendimenti cumulati dei portafogli risk parity sovraperformano quelli tradizionali 60/40, nonché il portafoglio *value-weighted* costituito da tutti i titoli in relativamente alla loro capitalizzazione di mercato. Questo può essere mostrato dalla seguente figura, che ne traccia l'andamento nel tempo per un campione composto da azioni americane per il periodo che va dal 1926 al 2010:

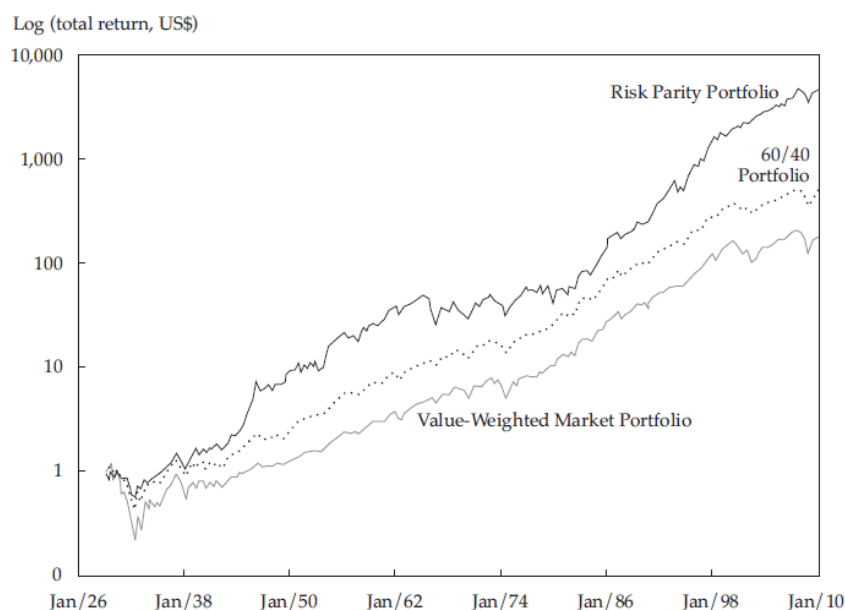


Figura 4: Rendimenti cumulati 1926-2010. La figura mostra i rendimenti totali cumulati per i portafogli value-weighted, 60/40 e risk parity.

Fonte: *Leverage Aversion and Risk Parity*, Asness, Frazzini e Pedersen, 2014.

Il fondamento logico che giustifica l'aumento di investimento in asset poco rischiosi a dispetto di quelli rischiosi, e quindi in contrasto con i dettami del CAPM, non è altro che la continuazione logica di quanto dimostrato da Frazzini e Pedersen nei betting against beta. Nel loro articolo, oltre dare prova della bontà della parzialmente esposta strategia di investimento, enfatizzano infatti il fallimento del CAPM mostrando la Security Market Line derivante dall'analisi empirica dei rendimenti delle asset class studiate. Nella Figura 5 vengono rappresentati i risultati: il beta non è altro che la pendenza della regressione mensile dei rendimenti in eccesso dei titoli (raggruppati in classi appunto) sul portafoglio value-weighted utilizzato come benchmark.

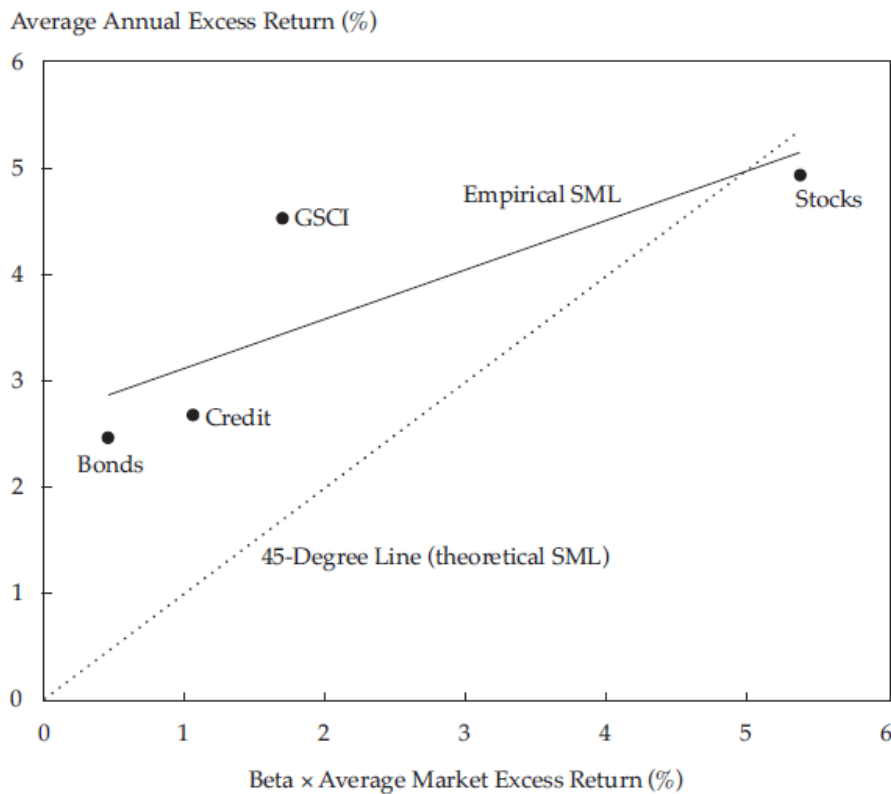


Figura 5: Security Market Line e le Asset Classes. La figura mostra a confronto SML teorica ed empirica per un portafoglio di azioni, obbligazioni, crediti e commodities. Il beta è la pendenza della regressione mensile dei rendimenti in eccesso del portafoglio su quello del mercato.

Fonte: *Leverage Aversion and Risk Parity*, Asness, Frazzini e Pedersen, 2014.

Il CAPM predice che i rendimenti attesi dei titoli siano funzione lineare (45 gradi) del rischio sistematico. La precedente figura mostra, tuttavia, che la SML empirica è decisamente più piatta in quanto le asset class più sicure (Bonds, Credit, Commodities nel grafico) forniscono dei rendimenti relativamente più alti di quanto predetto dal CAPM (e viceversa per le classi più rischiose). Tale inclinazione è alla base della teoria delle anomalie cross sezionali sia nei BAB che nei portafogli risk parity, che giustificano il vantaggio implicito nel comprare asset sicuri. A differenza dei BAB però, nella strategia risk parity le obbligazioni sono i *low-beta*, mentre le azioni sono gli *high-beta* asset. Nello specifico, i portafogli risk parity sono costruiti nel modo seguente: alla fine di ogni mese, i pesi di ogni asset class vengono ribilanciati in modo tale che siano uguali all'inverso della loro volatilità; successivamente sono moltiplicati per una costante che eguagli la volatilità realizzata ex-post con quella di un benchmark *value-weighted*. Tale approccio, così come nei volatility managed portfolios, prescinde dalla stima della matrice delle covarianze. Le evidenze degli autori determinano, in media, un portafoglio risk parity che alloca il 15% in azioni e l'85% in obbligazioni.

Dal punto di vista analitico, le performance statistiche della strategia risk parity sono messe a confronto dagli autori sia con il portafoglio 60/40 che con quello value weighted. I risultati sono presentati nella seguente tabella:

	Excess Return	t-Stat. of Excess Return	Alpha	t-Stat. of Alpha	Volatility	Sharpe Ratio	Skewness	Excess Kurtosis
<i>Long sample (U.S. stocks and bonds, 1926–2010)</i>								
CRSP stocks	6.71%*	3.18			19.05%	0.35	0.18	7.51
CRSP bonds	1.56*	4.28			3.28	0.47	-0.01	4.37
Value-weighted portfolio	3.84*	2.30			15.08	0.25	0.37	13.09
60/40 portfolio	4.65*	3.59			11.68	0.40	0.20	7.46
RP, unlevered	2.20*	4.67	1.39%*	4.44	4.25	0.52	0.05	4.58
RP	7.99*	4.78	5.50*	4.30	15.08	0.53	-0.36	1.92
RP minus value-weighted	4.15*	2.95	5.50*	4.30	12.69	0.33	-0.79	8.30
RP minus 60/40	3.34*	2.93	3.76*	3.33	10.31	0.32	-0.61	5.04

Tabella 4: Performance storiche dei portafogli risk parity, 60/40 e Value weighted (mercato). **Fonte:** *Leverage Aversion and Risk Parity*, Asness, Frazzini e Pedersen, 2014.

Nel campione si può analizzare come le azioni (CRSP stocks) mostrino sia un maggiore rendimento atteso che una maggiore volatilità rispetto alle obbligazioni (CRSP bonds). Di conseguenza, sia il portafoglio value-weighted che il 60/40 hanno rendimenti maggiori di quelli ottenuti dal risk parity che non fa ricorso alla leva finanziaria (*RP, unlevered*). Un agente che ha vincoli di leva può quindi razionalmente preferire i primi due (o anche investire semplicemente in azioni) a quest'ultimo, sebbene restituisca uno Sharpe ratio superiore: ribadisco che tale comportamento può portare a sovra apprezzare gli asset rischiosi rispetto al CAPM. Diversamente, un investitore che può indebitarsi per aumentare la leva dell'investimento, preferirà la performance storica del portafoglio risk parity (*RP* nella Tabella 4) che, a parità di volatilità con il portafoglio di mercato, offre un rendimento atteso superiore. Inoltre la statistica test dell'alpha della regressione del portafoglio risk parity risulta essere ben superiore a due, il che implica la significatività del risultato ottenuto.

Sulla falsa riga di quanto effettuato sul fattore betting against beta, nei test strutturali dei volatility managed portfolio verrà aggiunto un fattore risk parity come variabile aggiuntiva di controllo delle serie storiche. Il fine è lo stesso: cercare di dare una spiegazione razionale, che si basi su evidenze empiriche già trattate o studiate, dei risultati della strategia a volatilità gestita.

Capitolo 2. I Volatility Managed Portfolios

L'analisi fino a qui illustrata ha ricostruito il percorso storico dell'evoluzione delle teorie di scelte di portafoglio e le basi analitiche del volatility timing. Ho ritenuto essenziale tale approccio per capire perché siano stati utilizzati taluni dati ma, soprattutto, per validare i risultati dei volatility managed portfolio e concepirli come tecnica di investimento non solo teorica, ma anche applicabile nella realtà dagli investitori.

L'elaborato procede nel seguente modo: la prima parte si incentra nella costruzione del portafoglio a volatilità gestita per ciascun fattore preso in considerazione, con una particolare attenzione verso quello di mercato; successivamente viene creato un portafoglio efficiente media varianza dalla combinazione dei fattori prima citati; infine, vengono effettuati dei test strutturali per indagare sulla robustezza dei volatility managed portfolios e la redditività della strategia di volatility timing.

A tal proposito ho replicato passo dopo passo il paper "*Volatility-Managed Portfolios*" (pubblicato nel *The Journal of Finance*) di Alan Moreira e Tyler Muir del 2015, confrontandolo con lo stesso del 2016 e 2017 per evidenziare i cambiamenti di metodologia apportati dagli autori. I testi non si possono ritenere esclusivi tra di loro: i temi trattati risultano essere differenti così come le finalità delle analisi. Quando ho riscontrato difformità di valutazione o di interpretazione, ho optato per la scelta che reputavo essere più corretta concettualmente, non soffermandomi quindi al mero criterio cronologico. D'altra parte, alcune evidenze sono riportate direttamente dal testo: la loro replicabilità è limitata alla disponibilità di risorse non facilmente accessibili. Conseguentemente, qualora ci fosse un significativo divario nei risultati, illustrerò sia i miei *output* che quelli degli autori, cercando di spiegare l'origine di tale differenza e giustificare le mie scelte in termini di analisi quantitativa.

2.1 Dati e metodologia di raccolta:

Tutti i dati che ho raccolto per l'elaborazione empirica dei portafogli a volatilità gestita sono facilmente reperibili online.

Nella analisi vengono quindi utilizzati sia fattori mensili che giornalieri dei precedentemente esposti modelli di Kenneth French ed Eugene Fama. Nello specifico sono incluse le serie storiche dei seguenti fattori dal 1 luglio 1926 al 28 febbraio 2017:

- Mkt (Mercato): rappresenta il rendimento in eccesso del mercato rispetto all'asset risk free ed include tutte le società del NYSE, AMEX e NASDAQ, ponderate per capitalizzazione, che hanno un codice CRSP (Center for Research in Security Prices) di 10 o 11 all'inizio del mese t , una informazione dettagliata sul prezzo e sul numero di azioni nonché sul differenziale di rendimento rispetto al tasso Treasury bill (tasso risk free) del mese precedente.

Il fattore mercato, come vedremo meglio successivamente, verrà preso come esempio per generalizzare i risultati empirici alle altre variabili. Questo lo si deve, come affermano più volte gli autori, al fatto che rappresenta il "portafoglio" che più semplicemente può essere replicato dagli investitori. Nell'analisi dei volatility managed portfolios assume quindi la figura di fattore benchmark di riferimento.

Gli altri quattro fattori completano il modello *5 factors* di Fama e French; a questi si aggiunge il momentum ed il Betting Against Beta factor (BAB). Riprendo brevemente la definizione, già presente nel paragrafo 1.1.3, delle variabili utilizzate:

- SMB (Small Minus Big): è la differenza tra il rendimento medio dei tre portafogli *small* ed i tre portafogli *big*.

$$(1) SMB = \frac{1}{3} (R_{SL} + R_{SM} + R_{SH}) - \frac{1}{3} (R_{BL} + R_{BM} + R_{BH})$$

- HML (High Minus Low): è la differenza tra il rendimento medio dei due portafogli *value* ed i due portafogli *growth*.

$$(2) HML = \frac{1}{2} (R_{SH} + R_{BH}) - \frac{1}{2} (R_{SL} + R_{BL})$$

- Mom (Momentum): è la differenza tra il rendimento medio dei due portafogli che hanno mostrato un rendimento elevato passato (*Winner* o *High*) e quelli che hanno mostrato un rendimento basso (*Loser* o *Low*) nel mese precedente. Ricordo a tal proposito che il fattore momentum non assume un'esplicita visione sui trend di mercato e definisce i "vincenti" o "perdenti" a prescindere dall'andamento dello stesso. Per esempio, durante una crisi, per il momentum i titoli *High* sono le imprese i cui prezzi subiscono il maggior ribasso comparato alle altre società nello stesso periodo.

$$(3) Mom = \frac{1}{2} (Small High + Big High) - \frac{1}{2} (Small Low + Big Low)$$

- RMW (Robust Minus Weak): è la differenza tra il rendimento medio dei due portafogli con redditività operativa robusta (*Robust*) ed i due con redditività operativa debole (*Weak*).

$$(4) RMW = \frac{1}{2} (R_{SR} + R_{BR}) - \frac{1}{2} (R_{SW} + R_{BW})$$

- CMA (Conservative Minus Aggressive): è la differenza tra il rendimento medio dei due portafogli che adottano una politica di investimento conservativa (*Conservative*) ed i due che adottano una politica aggressiva (*Aggressive*).

$$(5) CMA = \frac{1}{2} (R_{SC} + R_{BC}) - \frac{1}{2} (R_{SA} + R_{BA})$$

- BAB (Betting Against Beta): come anticipato nel paragrafo 1.2.3, il BAB è quel fattore/portafoglio che assume una posizione lunga su titoli caratterizzati da un basso beta (*Low*) e corta su quelli da un alto beta (*High*). L'assunzione alla base è che i primi siano sotto-prezzati mentre i secondi sovra-prezzati dal mercato.

$$(6) BAB = \frac{1}{\beta_t^L} (r_{t+1}^L - r^f) - \frac{1}{\beta_t^H} (r_{t+1}^H - r^f)$$

A questi fattori, facilmente accessibili dal sito web¹ degli stessi Fama e French, Moreira e Muir aggiungono dati mensili e giornalieri di altre variabili non reperibili se non tramite esplicita richiesta agli autori di tali fonti. L'eshaustività dell'analisi empirica può prescindere da tali risorse, ma per ragioni di completezza espositiva è bene descriverle: alcune tabelle di estrazione dall'articolo, che inserirò successivamente, riportano infatti i risultati delle regressioni poste in essere su questi fattori. Nel caso specifico mi riferisco alle variabili Investment to Asset (IA) e Return On Equity (ROE), che rappresentano rispettivamente un fattore investimento e redditività. La genesi di tali dati è da attribuire all'articolo "*A Comparison of New Factor Models*" ad opera di Hou, Xue e Lu Zhang del 2014: nel loro lavoro, gli autori sostituiscono CMA e RMW dell'ultimo modello di Fama e French includendo appunto i prima citati fattori (modello *q*-factor). Tale scelta è motivata dal fatto che la variabile ROE ha origine da dati mensili¹ sul Return On Equity dei titoli componenti il campione: in

¹ http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

contrasto, il fattore RMW è costituito dai ricavi riferibili all'ultimo anno fiscale, il che si esplicita in una minore efficienza esplicativa dello stesso.

Per ragioni simili gli autori, sostituiscono CMA con Investment to Asset (IA). In particolare, il fattore IA è la differenza (*Low minus High*) mensile tra la media dei rendimenti di sei portafogli dal basso IA e quella di sei portafogli dal rapporto elevato. ROE risulta essere invece la differenza (*High minus Low*) mensile tra la media dei rendimenti di sei portafogli dal ROE elevato e quella di sei portafogli dal ROE basso. I risultati empirici della loro analisi evidenziano come il *q-factor model* sovra-performi il FF cinque fattori per quanto concerne le potenzialità di catturare le anomalie dei prezzi nonché il momentum e la redditività dei ricavi. In sostanza, concludono che il modello di Fama e French sia una versione “disturbata” (*noisy*) del q-factor.

Infine, Moreira e Muir aggiungono una ulteriore variabile di controllo, FX, la cui fonte è l'articolo “*Common Risk Factors in Currency Markets*” pubblicato da Hanno Lustig, Nikolai Roussanov e Adrien Verdelhan nel 2011. Non mi soffermerò nei dettagli, ma è bene evidenziare che lo scopo dell'elaborato è quello di indagare e sviluppare un fattore-valuta che riesca spiegare la maggior parte delle variazioni sincrone cross-sezionali dei rendimenti in eccesso medi tra tassi di cambio elevati e bassi. La logica è questa: usano s per denotare il tasso di cambio spot e f il tasso di cambio forward, entrambi in unità di valuta straniera per U.S. dollaro. Un aumento di s implica un apprezzamento della valuta domestica. Il rendimento in eccesso derivante dal comprare una valuta straniera nel mercato forward e rivenderla contestualmente in quello spot risulta essere:

$$(7) \quad rx_{t+1} = f_t - s_{t+1}$$

Costruiscono a questo punto due portafogli, sulla falsa riga della formazione dei precedenti fattori: vogliono in tal modo catturare la differenza media tra il portafoglio costituito da valute il cui spread rinvenibile nell'equazione (7) risulta essere elevato e quello in cui il suddetto differenziale è minore. Moreira e Muir ricevono il dataset giornaliero e mensile direttamente dagli autori dell'articolo, il che gli permette di costruire una misura della volatilità dello stesso. La fonte privata dei dati mi rende impossibile replicarne gli effetti e costruirne una versione a volatilità gestita.

2.2 Origine del portafoglio

I volatility managed portfolios si basano su un concetto semplice. I rendimenti mensili sono scalati per l'inverso della loro varianza realizzata nel mese precedente: ciò implica che l'esposizione nei confronti del rischio viene ridotta quando la volatilità passata risulta essere elevata ed incrementata

nel caso opposto. In questo elaborato documenterò come tale strategia di asset allocation guadagna elevati alpha per un vasto range di fattori, suggerendo che gli investitori possano beneficiare dal timing della volatilità.

Così come sottolineato nel paragrafo 1.1.2, le scelte di investimento sono guidate principalmente dal tradeoff rischio/rendimento. L'analisi dei portafogli a volatilità gestita sono motivate dal punto di vista di un semplice investitore media-varianza, che aggiusta la sua esposizione nell'asset rischioso a seconda dell'attrattività del suddetto rapporto μ_t/σ_t . Considerando che la varianza risulta essere altamente prevedibile per orizzonti temporali brevi (fino ad un anno) e le previsioni della stessa sono poco correlate con i rendimenti futuri per tali lassi di tempo, i volatility managed portfolios approssimano il tradeoff rischio/rendimento e quindi le scelte di investimento di un agente nel mercato all'inverso della volatilità realizzata il mese precedente. L'idea è quindi che se la volatilità non predice i rendimenti, il tradeoff peggiora quando la varianza aumenta: se infatti non vi è correlazione tra le due grandezze, l'aumento della volatilità si esplicita in un mero aumento del rischio, senza alcun ritorno per l'investitore. Il peso ottimale del portafoglio è quindi proporzionale all'attrattività del trade off rischio rendimento. In formula:

$$(8) w_t^* = \frac{E_t(r_{t+1})}{\sigma_t^2(r_t)}$$

Come si vedrà in seguito, questo approccio produce un significativo rendimento aggiustato per il rischio per i cinque fattori del modello di Fama e French nonché per il Betting Against Beta e le aggiuntive variabile FX, IA, ROE.

Procedo ora a spiegare la formazione del volatility managed portfolio.

2.2.1 Computazione della volatilità realizzata

Siccome la costruzione del portafoglio si basa sulla ponderazione del peso nell'asset rischioso (fattore nel caso specifico) per la varianza realizzata nel mese precedente, il primo elemento necessario da determinare è la stessa misura di rischio. Tale computazione deve essere ripetuta per tutti i fattori analizzati e presenti nel campione.

La *realized volatility* (RV) per un dato mese t ed un fattore f è la radice della varianza dei passati rendimenti giornalieri nel mese $t-1$. La varianza realizzata è uguale in formule:

$$(9) \sigma_t^2(f) = RV_t^2(f) = \sum_{d=1/22}^1 (f_{t+d} - \frac{\sum_{d=1/22}^1 f_{t+d}}{22})^2$$

Questa grandezza è infatti nota alla fine del mese t e conseguentemente viene utilizzata come informazione condizionata per prevedere i rendimenti futuri e creare il portafoglio per il mese $t+1$. L'approccio è semplice e, basandosi unicamente sui rendimenti del fattore (facilmente osservabili e privi della onerosità della stima di parametri quali la matrice delle covarianze, ad esempio, o di un modello previsionale), può essere implementato da un investitore nella realtà. In estrema sintesi la realized volatility viene utilizzata come proxy della varianza condizionata.

Ho operato nel seguente modo: in primis ho scaricato dal sito di Fama e French i rendimenti giornalieri e mensili per i fattori Mkt, SMB, HML, RMW, CMA e Mom. Disposti gli stessi su un foglio di calcolo Excel, ho computato come esplicitato dall'equazione (9) la volatilità realizzata per ogni mese, sulla base dei rendimenti giornalieri dal 1 luglio 1926 al 28 febbraio 2017 per i fattori della prima versione del modello di Fama e French, dal 1 luglio 1963 al 28 febbraio 2017 per CMA e RMW ed infine dal 1 novembre 1926 al 28 febbraio 2017 per il fattore Momentum. Riporto uno stralcio dello spreadsheet del primo anno di analisi in cui sono presenti i rendimenti di tutti i fattori per capire meglio gli output di questi primi passi:

<i>Date</i>	<i>Mkt(RV)</i>	<i>SMB(RV)</i>	<i>HML(RV)</i>	<i>RMW(RV)</i>	<i>CMA(RV)</i>	<i>Mom(RV)</i>
lug-1963	46,21%	15,74%	18,72%	16,30%	20,20%	27,48%
ago-1963	28,81%	19,31%	19,42%	13,08%	17,01%	21,21%
set-1963	38,28%	25,43%	18,03%	17,58%	18,13%	25,63%
ott-1963	41,21%	26,40%	33,47%	24,17%	28,20%	30,02%
nov-1963	130,27%	44,50%	26,88%	22,55%	31,19%	85,24%
dic-1963	31,61%	26,88%	20,59%	25,36%	33,12%	28,48%
gen-1964	25,04%	24,72%	33,68%	34,11%	35,32%	24,70%
feb-1964	16,94%	12,18%	26,11%	17,13%	21,84%	22,35%
mar-1964	20,45%	20,43%	25,70%	16,73%	16,03%	18,12%
apr-1964	33,03%	19,71%	36,50%	22,53%	19,20%	22,48%
mag-1964	30,06%	19,52%	22,14%	14,69%	26,32%	21,81%
giu-1964	40,64%	13,56%	21,84%	22,33%	18,92%	25,55%
lug-1964	27,13%	14,81%	19,07%	21,46%	18,86%	14,42%

Tabella 1: Estratto di un foglio di calcolo Excel riportante le volatilità realizzate di sei fattori per il periodo dal luglio 1963 a luglio 1964. Notare l'elevata volatilità del mercato nel novembre del 1963, probabilmente riconducibile all'assassinio di John Fitzgerald Kennedy. **Fonte:** Elaborazione personale.

Per avere una comprensione grafica dell'andamento della volatilità nel campione di circa novanta anni, ho plottato su MatLab le realized volatility per ogni fattore. Come è facile notare dalla Figura 1, è bene enfatizzare il co-movimento della volatilità per i fattori individuati e soprattutto come la stessa aumenti vertiginosamente a seguito delle grandi crisi di mercato, ad esempio la Grande Depressione del 1929, il Black Monday del 1987 ed infine la recente crisi dei mutui sub-prime del 2007. Risulta chiaro come la volatilità segua un evidente business cycle.

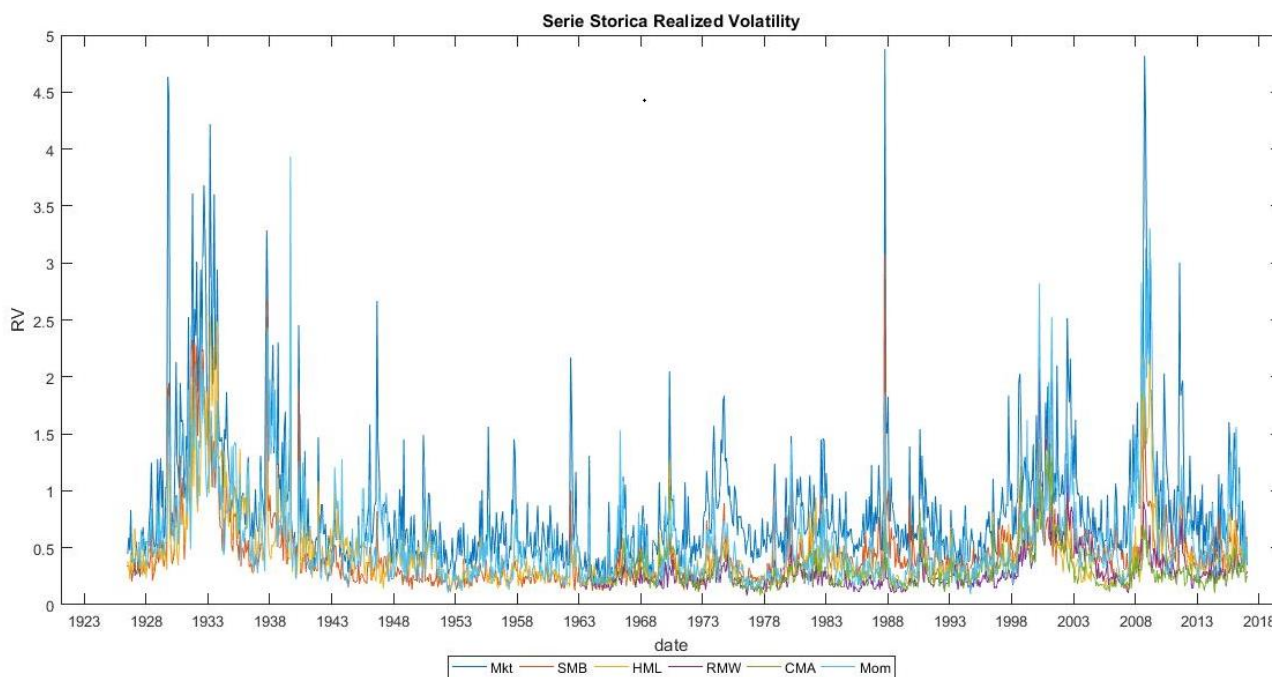


Figura 1: Volatilità realizzata dei sei fattori, Mkt, SMB, HML, RMW, CMA, Mom. **Fonte:** Elaborazione personale.

Le prossime figure cercheranno inoltre di spiegare quanto supposto fino ad ora. La relazione esistente tra la volatilità del mese precedente ed i “momenti” del mese successivo è un elemento centrale da analizzare per capire, in principio, se la strategia dei volatility managed portfolios possa essere implementata. Mi focalizzerò unicamente sul fattore mercato: l’interpretazione dei risultati sullo stesso è facilmente estendibile alle altre variabili.

Ho operato abbandonando per un secondo la natura di serie storiche dei dati ed ho conseguentemente ragionato in termini cross sezionali: il fine è di sviluppare un campione che colga la suddetta relazione, associando a ciascun rendimento del mese t la sua volatilità realizzata al tempo $t-1$. A questo punto, mediante la funzione filtro di Excel, ho ordinato la volatilità ($t-1$) in ordine crescente, in modo tale da poter classificare i rendimenti (t) del mercato a questa associati in tre gruppi, rispettivamente Low, Medium e High. Ad esempio, la classe Low equivale a tutti i rendimenti conseguenti ad una realizzazione della volatilità bassa il mese precedente. Per individuare l’ampiezza

dei gruppi ho semplicemente diviso il range per tre ($(Mkt_{MAX} - Mkt_{MIN})/3$): il risultato mi fornisce l'ampiezza dello spread tra ogni classe.

Determinati Low, Medium e High, ho studiato in ognuno di essi i rendimenti medi, la standard deviation, il tradeoff media/varianza ed infine la probabilità di recessione e plottato gli istogrammi su MatLab. Riporto nelle seguenti figure i miei risultati:

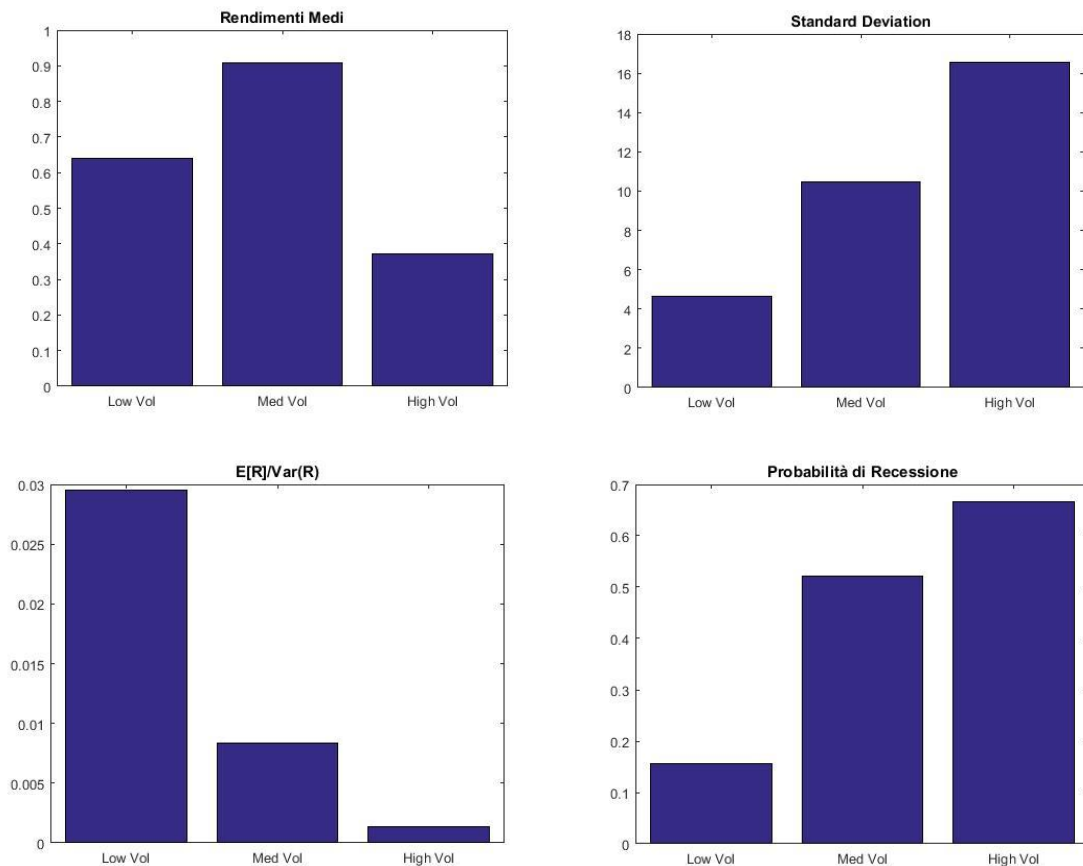


Figura 2: I quattro istogrammi illustrano la relazione tra il rendimento atteso, standard deviation, tradeoff rischio rendimento e probabilità di recessione con la volatilità realizzata passata. **Fonte:** Elaborazione personale.

Dal primo grafico in alto a sinistra possiamo notare come non sussista una relazione ben specifica tra la volatilità passata ed il rendimento. Nonostante si individui un rendimento medio maggiore per il campione Med rispetto a quello Low, il che implicherebbe un incremento dei rendimenti futuri a fronte di una crescente volatilità passata, tale dipendenza è negata dall'evidenza che il rendimento nella classe maggiore High risulta essere inferiore ai due precedenti. Differentemente, è evidente come esista un forte relazione tra la volatilità ritardata e quella corrente: ciò è graficamente rinvenibile nell'istogramma in alto a destra, dove si può vedere come all'aumentare della prima aumenti anche

la seconda. Quali sono le conseguenze per le scelte dell'investitore? Date le precedenti relazioni, risulta chiaro come il tradeoff media-varianza si riduca durante i periodi di alta volatilità (grafico in basso a sinistra).

Siccome l'investimento si basa sull'attrattività dello stesso rapporto, ciò ha come prima implicazione il fatto che un agente ottimizzante debba assumere più rischio quando il tradeoff è conveniente, ovvero quando la volatilità è bassa (Low), ed alternativamente ridurne l'esposizione nel caso opposto (High). Specificatamente, il rendimento medio per unità di varianza $E_t[R_{t+1}]/\sigma_t^2$ rappresenta l'esposizione ottimale dell'investitore media-varianza, se non anche l'implicita avversione al rischio, γ_t , da una prospettiva generale di equilibrio: risulta essere infatti quell'ammontare necessario a soddisfare la relazione $E_t[R_{t+1}] = \gamma_t \sigma_t^2$.

Infine, l'ultimo grafico in basso a destra illustra la relazione tra volatilità passata e la probabilità di recessione. Ho utilizzato una variabile dummy scaricabile dal sito² del National Bureau of Economic Research (NBER), nella quale approfondita spiegazione mi dispiegherò nel paragrafo sul Business Cycle: ora, per semplicità, è sufficiente affermare che tale variabile assume valore uno durante i mesi di crisi e zero altrimenti. Dopo aver ordinato, come fatto precedentemente, i dati ora binari in ordine crescente in base alla volatilità passata, ho anche qui diviso il campione in tre gruppi (Low, Medium e High). La probabilità di "default" è stata calcolata come rapporto tra numero di casi favorevoli, ovvero quanti "uno" erano presenti in Low ad esempio, su numero dei casi possibili, cioè la numerosità totale della singola classe (somma degli "zero" e degli "uno"). L'intuizione iniziale per cui la probabilità di recessione è maggiore in seguito a realizzazioni elevate della volatilità passata è confermata dall'istogramma.

Date queste premesse teoriche ed analitiche, il prossimo paragrafo illustrerà come sono costruiti i volatility managed portfolios. La strategia che li porta a ridurre il rischio durante i *bad-times* va ovviamente contro le convenzionali teorie che suggeriscono di mantenerne o addirittura aumentarne l'esposizione. Nell'agosto del 2015, periodo di elevata volatilità, il fondo di investimento Vanguard nell'articolo "*What to do during market volatility? Perhaps nothing*", consigliava testuali parole: "*no action is an active decision, and can be the right decision for reaching long-term financial goals*" (nessuna azione è una decisione attiva e può essere quella giusta per raggiungere obiettivi finanziari di lungo periodo). Ed ancora, dopo il rapido declino dei prezzi e l'aumento della volatilità nell'autunno del 2008, era credenza comune che tali movimenti di mercato avessero creato una *once-in-a-generation-opportunity* d'investimento. Basti citare l'articolo "dell'oracolo di Omaha" Warren Buffet "*Buy American. I am*" pubblicato nel *The New York Times* il 16 ottobre 2008, in piena crisi americana e mondiale. Buffet affermava: "I'll follow the lead of a restaurant that opened in an empty

² <http://www.nber.org/cycles.html>

bank building and then advertised: “*Put your mouth where your money was.*” *Today my money and my mouth both say equities*” (seguirò il comportamento di un ristorante che ha aperto dove prima vi era una banca e usa come slogan: “Mettete la bocca dove prima erano i vostri soldi”. Oggi sia i miei soldi che la mia bocca dicono azioni).

Conseguentemente gli investitori che avessero ridotto le loro posizioni in titoli azionari, a pareri comuni, stavano commettendo un errore. A differenza, la strategia di volatility timing dei portafogli a volatilità gestita riduce proprio in questi momenti l’esposizione e liquida quasi completamente, per poi tornare sul mercato solo quando il picco di volatilità va svanendo. Mostrerò empiricamente come i volatility managed portfolios funzionano bene durante varie crisi economiche, tra cui la Grande Depressione, il crash di mercato del 1987 e la recente recessione, assumendo meno rischio durante tali eventi.

2.2.2 Costruzione del portafoglio a fattore singolo

Il portafoglio volatility-managed viene costruito scalando l'*excess return* del fattore per l'inverso della sua varianza realizzata. Ogni mese la strategia prevede quindi un ribilanciamento dei pesi, aumentando o diminuendo l'esposizione al rischio del portafoglio relativamente alla variazione della *realized variance* del mese precedente. Il portafoglio gestito, f_t^σ (o che si voglia fattore), sarà quindi uguale a:

$$(10) f_t^\sigma = \frac{c}{RV_{t-1}^2} f_t$$

dove f_t è il rendimento in eccesso del portafoglio *buy-and-hold* di un fattore, RV_{t-1}^2 è la varianza realizzata in $t-1$ computata come spiegato nel paragrafo 2.2.1., ed infine la costante c ha lo scopo di controllare l'esposizione media della strategia. In particolare, c è tale per cui la standard deviation non condizionata dell'intero *managed factor* (f_t^σ) sia uguale a quella del completo *non-managed factor* (f_t). Riporto sia la formula che ho applicato, che i risultati per i vari fattori:

$$(11) c * var(f_t^\sigma) = var(f_t) \rightarrow c = \sqrt{var(f_t)/var(f_t^\sigma)}$$

Variabili	Mkt	SMB	HML	RMW	CMA	Mom
$var(f_t)$	4145,37	1484,12	1766,2	716,5	579,7	3221,1
$var(f_t^\sigma)$	23192,23	141646,47	118185,0	194740,9	147643,2	101688,8
c^2	0,179	0,010	0,015	0,004	0,004	0,032
c	0,423	0,102	0,122	0,061	0,063	0,178

Tabella 2: La tabella illustra i passaggi per la determinazione della costante c per i sei fattori analizzati. **Fonte:** Elaborazione personale.

Moreira e Muir sostengono che l'utilizzo di c non abbia effetto sulla strategia in quanto non ha il potere di influire nella determinazione dello Sharpe ratio. Sin da subito mi sono interrogato su l'origine di questa costante ed ho voluto indagare empiricamente l'efficacia del suo utilizzo: il problema principale, a mio avviso, è che se il punto di forza dei volatility managed portfolios è la praticabilità, intesa come facilità di implementazione, l'aggiunta di un elemento la cui determinazione è possibile unicamente *ex-post* va a minare tale importante presupposto. Per questo motivo, studierò

il portafoglio Mkt sia in presenza di c che in sua assenza, cercando di interpretare le differenze ed eventualmente estendere ad altri fattori la suddetta analisi.

Determinato f_t^σ , non resta che studiare la bontà della strategia attraverso una regressione lineare delle serie storiche mensili dei rendimenti del volatility managed portfolio su il fattore originale (ogni fattore è annualizzato in percentuale moltiplicando il rendimento mensile per 12):

$$(12) f_t^\sigma = \alpha + \beta f_t + \varepsilon_t$$
$$\text{con } f_t^\sigma = \frac{c}{RV_{t-1}^2} f_t$$

dove ripeto il fattore gestito, f_t^σ , è scalato per l'inverso della varianza realizzata nel precedente mese. Una intercetta positiva, α , ha come prima implicazione il fatto che il timing della volatilità aumenti lo Sharpe Ratio rispetto alla strategia buy-and-hold del fattore originale. Quando questo "test" è applicato a variabili sistematiche (come ad esempio il portafoglio di mercato, Mkt) che riassumono quindi le informazioni di prezzo di un'ampia gamma di assets e strategie, un alpha positivo dei volatility managed portfolios permette una espansione della frontiera media-varianza. C'è un consenso della teoria economica che i fattori utilizzati da Fama e French (e le loro estensioni), descritti approfonditamente al paragrafo 1.1.3 ed utilizzati in questa analisi, riassumano realisticamente le informazioni di pricing di un vasto pool di asset class e possano essere utilizzati per generalizzare l'andamento del mercato. Conseguentemente, è sufficiente soffermarsi unicamente sul comportamento di questi fattori. L'analisi verrà inizialmente effettuata fattore per fattore. Gli alpha's delle singole regressioni hanno una interpretazione economica esaustiva quando il fattore individuale descrive accuratamente l'insieme delle opportunità di investimento dell'investitore o, alternativamente, quando i fattori risultano essere tra loro incorrelati e catturano conseguentemente diverse dimensioni del rischio. Inoltre, l'analisi sui singoli fattori è utile in quanto mostra che il comportamento empirico documentato è pervasivo tra i fattori e che i risultati sono unicamente guidati dalla relazione tra rischio e rendimento delle serie storiche.

Nella prossima tabella riporto i risultati delle regressioni così come descritte dall'equazione (12):

<i>Output Regressione Lineare Semplice a Fattore Singolo</i>										
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ	<i>BAB</i> ^σ	<i>FX</i> ^σ	<i>ROE</i> ^σ	<i>IA</i> ^σ
<i>Mkt</i>	0,61 (0,02)									
<i>SMB</i>		0,61 (0,02)								
<i>HML</i>			0,57 (0,02)							
<i>Mom</i>				0,47 (0,03)						
<i>RMW</i>					0,59 (0,03)					
<i>CMA</i>						0,67 (0,03)				
<i>BAB</i>							0,59 (0,07)			
<i>FX</i>								0,71 (0,08)		
<i>ROE</i>									0,63 (0,07)	
<i>IA</i>										0,68 (0,05)
Alpha	4,92	-0,50	1,79	12,4	2,62	0,34	6,27	2,78	5,48	1,55
S.E.	(1,56)	(0,92)	(1,05)	(1,54)	(0,86)	(0,71)	(1,20)	(1,49)	(0,97)	(0,67)
N	1087	1087	1087	1082	643	643	1033	360	575	575
R²	0,37	0,38	0,32	0,22	0,34	0,46	0,36	0,33	0,41	0,47
RMSE	51,1	30,4	34,5	50,2	21,7	17,8	29,8	25,34	23,69	16,58

Tabella 3: La tabella riporta i risultati delle regressioni dei fattori gestiti su quelli originali. Tra parentesi gli standard error (errori robusti all'eteroschedasticità). Per quanto riguarda le variabili FX, ROE e IA ho inserito gli output di Moreira e Muir nel loro articolo.

Fonte: Elaborazione personale; *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016).

Questi appena presentati sono i primi risultati empirici sui volatility managed portfolios, che mostrano gli output delle regressioni dei fattori managed (individuabili dall'apice σ) su quelli non-managed. Il parametro di principale interesse sul quale focalizzerò l'attenzione è senza ombra di dubbio l'alpha: sono infatti più interessato ad una misura che quantifichi la bontà dell'investimento, ovvero la capacità di generare un rendimento positivo autonomamente, che non il segno della relazione tra le due tipologie di fattori. In generale, si possono notare costanti positive e statisticamente significative per tutte le variabili (a parte il caso isolato di SMB con un valore pari a -0,5).

Quale può essere una prima spiegazione di questo ottimo risultato? In una realtà dove il tradeoff rischio rendimento è costante, l'alpha delle precedenti regressioni si assesterebbe ad un valore nullo: intuitivamente, il volatility timing perde la sua efficacia quando il tradeoff rischio/rendimento non varia nel corso del tempo. Sulla base delle assunzioni avanzate prima, gli alpha sono positivi in quanto il portafoglio gestito sfrutta l'elevato prezzo del rischio durante i periodi di bassa volatilità ed evita lo sveniente trade-off rischio/rendimento durante i periodi altamente rischiosi.

Il volatility managed portfolio Mkt^σ merita una speciale attenzione. Riporto per prima cosa l'equazione della regressione e del fattore managed per il mercato (la determinazione delle altre regressioni, data questa, è di semplice intuizione):

$$Mkt_t^\sigma = 4.92 + 0.6 Mkt_t$$

$$\text{con } Mkt_t^\sigma = \frac{0.423}{RV_{t-1}^2} Mkt_t$$

L'importanza di questo portafoglio deriva dalla natura del fattore da cui deriva, Mkt, che lo rende facilmente replicabile dall'investitore medio nella realtà (a differenza della costruzione di un portafoglio dal fattore Mom, ad esempio); inoltre, la sua interpretazione si collega ad un lungo filone di letteratura sul timing del mercato a cui farò riferimento successivamente. I risultati di questo portafoglio mostrano un alpha annualizzato (i rendimenti mensili di Mkt sono moltiplicati infatti per 12) di 4.92% ed un β di 0.6% circa.

Il portafoglio che determina l'alpha maggiore è invece quello sul fattore momentum con un valore di addirittura 12 bpts. Tale evidenza è coerente con le ricerche di Barroso e Santa Clara nell'articolo "*Moments has its Moments*" pubblicato nel *The Journal of Financial Economics* nel 2015: nel suddetto paper, gli autori analizzano come nonostante il momentum sia una anomalia che renda in media positivamente (ha infatti un rendimento mensile in eccesso dell'1.75% controllando per i fattori di Fama e French/Carhart), soffre così tanto i grandi crash di mercato da non riuscire a compensare economicamente un investitore con una ragionevole avversione al rischio (-92% nel 1932 in solo due mesi e -73% nel 2009 in tre mesi, con tempistiche decennali di recupero). Sostanzialmente

evidenziano come il momentum abbia una distribuzione dei rendimenti altamente differente da quella normale, con grandi code (leptocurtica) ed una forte asimmetria verso sinistra, cioè con maggiore probabilità di accadimento di realizzazioni negative. Nel loro lavoro propongono una strategia che scali il fattore momentum, il cui rischio specifico è altamente prevedibile, per la sua volatilità realizzata nei sei mesi precedenti (notare la similarità di approccio tra Barroso/Clara e Moreira/Muir): in primo luogo, ciò comporta un incremento dello Sharpe ratio da 0.53 a 0.97, ma soprattutto una riduzione notevole dell'*excess kurtosis* da 18.24 a 2.68 ,ovvero la probabilità di ottenere un valore estremo negativo nel futuro rispetto a quello della distribuzione normale (pari a 3). Dimostrano quindi che la strategia che permette di evitare le grandi crisi di mercato attraverso il timing della volatilità del fattore momentum restituisca un risultato migliore rispetto alla versione originale dello stesso. Come anticipato in precedenza, ho voluto estendere l'analisi ad un caso non direttamente trattato dagli autori e dato per scontato nell'articolo originale: ho infatti rideterminato gli output delle regressioni sui primi sei fattori senza inserire nell'equazione (10) il parametro c . Per comodità illustrativa riporto nella seguente tabella unicamente gli alpha con relativi standard error:

<i>Gli alpha senza l'utilizzo di "c"</i>						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Mkt^σ	SMB^σ	HML^σ	Mom^σ	RMW^σ	CMA^σ
Alpha	11,6	-4,92	14,62	69,9	43,24	5,44
SE	(3,99)	(11,41)	(9,42)	(10,96)	(9,66)	(10,29)

Tabella 4: *Gli alpha delle regressioni dei fattori a volatilità gestita su quelli originali senza l'utilizzo della costante "c".
Fonte: Elaborazione personale.*

L'eliminazione di un fattore moltiplicativo che ponderasse il peso da investire mensilmente uguagliando le standard deviation delle serie storiche gestite e non, ha come prima conseguenza un aumento medio degli alpha di circa otto volte rispetto a quello calcolato in precedenza. Questo risultato è di facile interpretazione: per i sei fattori presi in considerazione il valore medio della costante c è circa uguale a 0,13 e, considerando che per determinare il portafoglio a volatilità gestita ho moltiplicato il rapporto tra il rendimento mensile e la volatilità realizzata il mese precedente per questo ammontare inferiore ad uno, era auspicabile un aumento generale degli alpha di circa $1/0,13 \cong 8$. Inoltre, è possibile notare come anche senza c tutti gli alpha delle regressioni siano positivi a parte il caso isolato del fattore SMB che continua, così come nel precedente caso, ad esibire un valore negativo. Al fine di stabilire se la mancata considerazione di c alterasse significativamente le proporzioni tra gli alpha analizzati, ho rapportato il singolo alpha del fattore per la somma degli

stessi. I risultati confermano la quasi immutata relazione tra le variabili tranne che per il fattore mercato che dimezza il suo peso rispetto agli altri alpha: la principale ragione è da attribuire al fatto che il c di Mkt assume il maggiore valore tra i fattori considerati. In conclusione, ritengo quindi che l'utilizzo di c non influisca negativamente sulla bontà dei risultati ed abbia inoltre una utile funzione di fattore normalizzante delle serie storiche.

Gli output delle regressioni della Tabella 3 cambiano relativamente poco nel caso vengano aggiunti, oltre al fattore non-gestito di interesse, quelli del modello a tre di Fama e French. La ragione che motiva questa scelta è da trovarsi nel potere esplicativo che hanno, quando congiuntamente analizzati, i fattori Mkt, SMB e HML unito alla loro capacità di cogliere i principali fattori di rischio del mercato. Prendendo sempre come riferimento il fattore mercato, e per completezza anche uno non appartenente ai primi tre, ad esempio RMW, mi sto riferendo ad un set di dieci regressioni del tipo:

$$(13) Mkt_t^\sigma = \alpha + \beta Mkt_t + \gamma SMB_t + \delta HML_t + \varepsilon_t;$$

$$(14) RMW_t^\sigma = \alpha + \beta RMW_t + \theta Mkt_t + \gamma SMB_t + \delta HML_t + \varepsilon_t$$

I risultati sono individuati nella seguente tabella, dove per comodità riporto unicamente gli alpha delle regressioni. E' facile riconoscere la somiglianza tra questi output e quelli della tabella (3) (le equazioni (13) e (14) riportano gli α delle regressioni (1) e (5) rispettivamente nella Tabella 5):

<i>Gli alpha controllando per il modello a tre fattori di Fama e French</i>										
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	Mkt^σ	SMB^σ	HML^σ	Mom^σ	RMW^σ	CMA^σ	BAB^σ	FX^σ	ROE^σ	IA^σ
Alpha	5,49	-0,26	2,47	10,43	3,41	-0,06	5,94	2,54	5,76	1,14
SE	(1,72)	(1,14)	(1,18)	(1,73)	(0,97)	(0,67)	(1,17)	(1,65)	(0,97)	(0,69)

Tabella 5: *Gli alpha della regressione inserendo come ulteriore variabile di controllo i primi tre fattori del modello a tre di Fama e French. FX, ROE e LA sono riportati direttamente dal testo originale. Fonte: Elaborazione personale; Volatility Managed Portfolios, Moreira e Muir (2015)*

Nella Tabella 3 ho aggiunto come ulteriore misura statistica il Root Mean Square Error (RMSE o errore quadratico medio). Il RMSE è la radice quadrata della varianza dei residui, ovvero la discrepanza tra i valori dei dati osservati (y_t) ed i valori stimati (\hat{y}_t):

$$(15) RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}{n}}$$

Siccome il RMSE rappresenta la standard deviation della varianza non spiegata dalla regressione, minore sarà la sua entità, maggiore sarà l'accuratezza della stessa. In questo caso il RMSE ci permette di costruire lo Sharpe Ratio in eccesso dei volatility managed portfolios, anche chiamato l'*appraisal ratio* (AR): questo rapporto esplicita quanto il trading dinamico dei portafogli a volatilità gestita espanda la frontiera efficiente media-varianza dei fattori di partenza. Più precisamente, lo Sharpe Ratio del nuovo fattore gestito sarà uguale a:

$$(16) SR_{new} = \sqrt{SR_{old}^2 + \left(\frac{\alpha}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}$$

dove SR_{old}^2 è lo Sharpe Ratio massimo del fattore originale.

Vediamo meglio che cosa rappresenta il rapporto $\frac{\alpha}{\sigma_\varepsilon}$: l'information ratio, noto sotto determinate condizioni come appraisal ratio, è una misura dell'extra rendimento rapportato al rischio specifico del fattore che è possibile ottenere dalla security analysis (ovvero la ricerca degli alpha già citata nel paragrafo 1.1.2). Quando parliamo di information ratio ci riferiamo più in generale alla seguente relazione:

$$(17) IR = \frac{E(R_p - R_b)}{\sigma_{p,b}} = \frac{\alpha}{\sigma_{p,b}}$$

dove R_p è il rendimento del portafoglio, R_b del benchmark, $E(R_p - R_b)$ è il valore atteso del rendimento attivo ed infine $\sigma_{p,b}$ è la *Tracking Error Volatility*, cioè la volatilità dei rendimenti differenziali del portafoglio rispetto all'indice di riferimento. In questo caso α è definito come rendimento in eccesso e si differenzia da quello usato nella analisi dei volatility managed portfolios: nel caso di nostro interesse ci riferiamo infatti al rendimento atteso aggiustato per il rischio, anche chiamato *Jensen's alpha*, la cui stima deriva direttamente dall'analisi della regressione effettuata. L'information ratio costituito dal Jensen's alpha al numeratore e dal RMSE al denominatore viene diversamente chiamato appraisal ratio. Maggiore è tale rapporto, migliore sarà quindi la performance del portafoglio ed il suo Sharpe ratio. L'informazione che ci fornisce differisce però dallo Sharpe ratio in quanto quest'ultimo si riferisce al rapporto tra il rendimento in eccesso (dal tasso

risk free) di un portafoglio e la sua standard deviation; l'appraisal ratio invece ci dice quanto il portafoglio attivo sovra o sotto performi un investimento passivo in un indice benchmark.

Se l'obiettivo ultimo dell'investitore media-varianza è quindi quello di massimizzare lo Sharpe ratio del portafoglio, allora l'AR è la statistica rilevante per valutare le performance dell'investimento. Il tradeoff rischio/rendimento dell'inclusione di un titolo al portafoglio è rappresentato dal contributo positivo dell'alpha (l'ormai noto premio non di mercato) e dal contributo negativo dell'aumento della varianza (attraverso il rischio specifico). Questo tradeoff è completamente catturato dall'appraisal ratio.

Per determinare l'appraisal ratio annuale dei volatility managed portfolios, dopo aver diviso l'alpha mensile per il RMSE mensile, ho moltiplicato tale rapporto per $\sqrt{12}$:

$$(18) AR_{ann} = \sqrt{12} * a_t / RMSE_t$$

Infatti, avendo moltiplicato tutti i fattori mensili per dodici al fine di annualizzarli, si è al contempo moltiplicata anche varianza dello stesso ammontare e conseguentemente lo Sharpe ratio continua ad essere una misura mensile. Per il fattore Momentum, ad esempio, l'appraisal ratio annualizzato è uguale a $\sqrt{12} \frac{12,4}{50,2} = 0,86$. Riporto nella seguente tabella i miei risultati sugli appraisal ratio dei volatility managed portfolios:

<i>Appraisal Ratio</i>										
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ	<i>BAB</i> ^σ	<i>FX</i> ^σ	<i>ROE</i> ^σ	<i>IA</i> ^σ
<i>Alpha</i>	4,92	-0,5	1,79	12,4	2,62	0,34	6,27	2,8	5,5	1,6
<i>RMSE</i>	51,1	30,4	34,5	50,2	21,7	17,8	29,8	25,3	23,7	16,6
<i>AR</i>	0,33	-0,06	0,18	0,86	0,42	0,07	0,72	0,38	0,80	0,32

Tabella 6: Gli appraisal ratio dei portafogli a volatilità gestita. **Fonte:** Elaborazione personale.

A prescindere del caso isolato del fattore SMB, tutti i restanti volatility managed portfolios esibiscono valori positivi dell'appraisal ratio.

Moreira e Muir suggeriscono un modo alternativo per quantificare la rilevanza economica dei risultati dal punto di vista di un semplice investitore media varianza. Ragionano in termini di percentuale di

guadagno di utilità durante l'intero campione delle serie storiche, modalità riassumibile dalla seguente formula:

$$(19) \Delta U_{MV,f}(\%) = \frac{SR_{new,f}^2 - SR_{old,f}^2}{SR_{old,f}^2} = \frac{AR_f}{SR_{old,f}^2}$$

Nonostante la metodologia di determinazione dello Sharpe ratio non fosse accuratamente descritta e fossero unicamente riportati i risultati relativi al fattore mercato, ho provato ugualmente a replicare questo approccio. Il nominatore dell'equazione, essendo l'appraisal ratio, è rinvenibile nella Tabella (6). Per quanto concerne lo Sharpe ratio a denominatore, $SR_{old,f}^2$, ho ragionato nel seguente modo: ho calcolato la media e la deviazione standard per i fattori originali del modello a 5 di Fama e French più il momentum su tutto il campione (per gli altri fattori era mia impossibilità continuare a causa della mancanza dei dati). Basandomi sul tasso risk free presente nel dataset di Fama e French per lo stesso lasso di tempo, ne ho determinato una media semplice: questo valore, pari a 1.26%, rappresenta l'ammontare da sottrarre ai rendimenti medi per ogni fattore al fine di determinare il nominatore dello Sharpe ratio ("old" ovviamente). A questo punto, dalla divisione di quest'ultima grandezza e la deviazione standard prima calcolata è possibile avere una misura dello Sharpe ratio originario. Il guadagno di utilità derivante dal timing della volatilità è esplicitabile come rapporto tra l'appraisal ratio al quadrato e lo Sharpe ratio vecchio al quadrato (vedi equazione (19)). I risultati per i sei fattori che ho analizzato sono nella tabella, dove è rinvenibile il procedimento logico che ho seguito ed appena descritto nella determinazione del guadagno di utilità per l'investitore media-varianza:

	<i>Guadagno di utilità del volatility timing</i>					
	<i>Mkt</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>
<i>Media_{old,f}</i>	7,85	2,54	4,80	7,89	3,68	2,89
<i>σ_{old,f}</i>	64,41	38,53	42,03	56,76	24,09	26,79
<i>SR_{old,f}</i>	0,12	0,07	0,11	0,14	0,15	0,11
<i>SR_{old,f}²</i>	0,01	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01
<i>AR</i>	9,63%	-1,64%	5,19%	24,70%	12,07%	1,91%
<i>AR²</i>	0,93%	0,03%	0,27%	6,10%	1,46%	0,04%
<i>ΔU_{MV,f}</i>	62,7%	6,3%	20,8%	317,4%	62,9%	3,2%

Tabella 7: Computazione del guadagno di utilità attraverso l'utilizzo dell'equazione (19). **Fonte:** Elaborazione personale.

Cito Moreira e Muir nel loro articolo³ per enfatizzare la bontà dei miei output: "...for example, a mean-variance investor who can only trade the market portfolio can increase lifetime utility by 65% through volatility timing." (ad esempio, un investitore media-varianza che investe unicamente nel portafoglio di mercato può aumentare la sua utilità dell'65% grazie al volatility timing). Questo risulta essere l'unico stralcio di testo in cui viene riportato l'incremento di utilità di un fattore da parte degli autori: da notare che proprio per il fattore Mkt l'aumento da me stimato si assesta sul 62.7%, molto prossimo al loro risultato.

Sebbene a prima vista questi valori siano sorprendentemente alti, vi è la necessità di trovare un benchmark di riferimento. A rigore di logica, il miglior confronto che può essere posto in essere è proprio tra il volatility timing del mercato ed il timing del rendimento atteso dello stesso fattore: la fonte di quest'ultimo risultato è l'articolo "*Predicting Excess Stock Returns Out of Sample*" di Campbell e Thompson pubblicato nel *Review of Financial Studies* nel 2008. Gli autori appena citati stimano infatti un guadagno di circa il 35% derivante dal timing dei rendimenti del mercato: in sostanza, il timing della volatilità non solo genera dei guadagni di utilità pari a circa il doppio di quello dei rendimenti, ma dispiega la sua efficacia anche tra i vari fattori analizzati.

La conferma di quanto illustrato fino ad ora risulta lampante quando viene contrapposto un ipotetico investimento di 1\$ nel fattore mercato (Mkt) con lo stesso a volatilità gestita (Mkt^σ): oltre che determinare il valore finale in dollari delle due strategie, tale studio evidenzia i movimenti nel tempo dell'andamento del portafogli. Per l'analisi, ho costruito i rendimenti nominali dei due fattori con una procedura che aggiunge al valore cumulato fino al tempo t le realizzazioni a $t+1$ e così via: l'ovvia conclusione di questa metodologia è un fattore che simula un investimento unitario *buy-and-hold* dal 1926 al 2017. Ho successivamente plottato su MatLab i rendimenti cumulati prima determinati per avere evidenza grafica delle differenti strategie:

³ *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

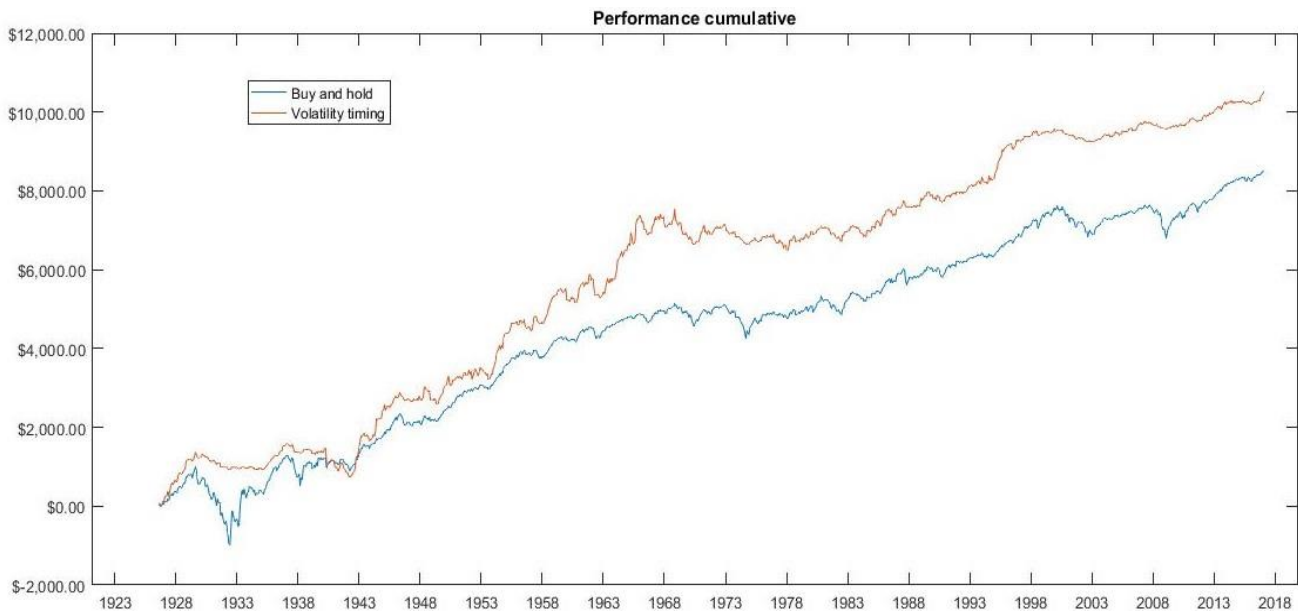


Figura 3: Rendimenti cumulati della strategia di volatility timing e di quella buy-and-hold a confronto. **Fonte:** Elaborazione personale.

Dalla Figura 3 si può notare come il volatility managed portfolios realizza un guadagno finale di \$10,600 contro gli \$8,500 della strategia buy-and-hold del fattore mercato, esibendo quindi un maggior rendimento di circa il 23%. Inoltre, a parte un singolo episodio tra il 1941 e l'inizio del 1942, il rendimento cumulato del fattore gestito si posiziona sempre al di sopra di quello originario. Ciò su cui mi voglio soffermare ora è però l'andamento del portafogli durante le grandi crisi di mercato, prime tra tutte la Grande Depressione del 1929 e la recente recessione del 2008. Per fare questo ho semplicemente riportato i dettagli della precedente Figura 3 per studiare il comportamento durante tali episodi:

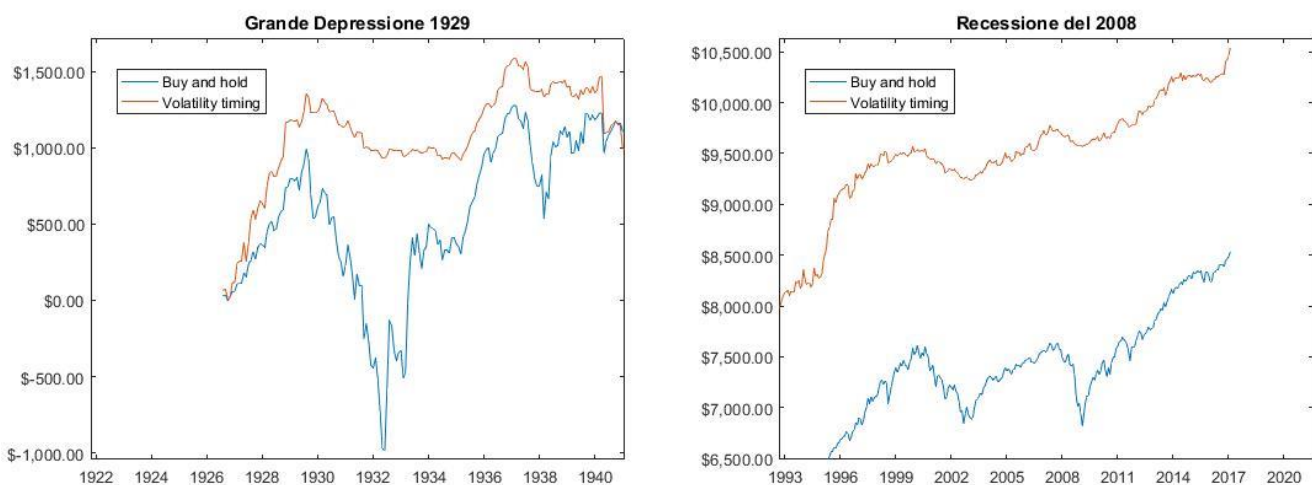


Figura 4: In questa figura vengono illustrate nel dettaglio due eventi di crisi economica, la Grande Depressione del 1929 e la più recente nel 2008, e come le strategie rispondano in maniera differente **Fonte:** Elaborazione personale.

Come anticipato prima, la strategia di volatility timing diminuisce l'esposizione al rischio subito dopo l'inizio del declino del mercato per poi riacquistare quando il primo impatto va svanendo. Nella Figure 4 si può notare come questo approccio riduca sensibilmente le perdite dell'investimento durante i peggiori eventi di crisi del campione (ed ovviamente degli ultimi novanta anni circa). Nonostante i volatility managed portfolios si comportino bene in questi periodi, soffrono maggiormente i momenti di calma del mercato: questo è coerente con l'intuizione che i portafogli gestiti assumano un maggiore rischio relativo quando la volatilità è bassa e conseguentemente subiscano delle perdite proprio in questi lassi temporali. Per avere una misura del *downside risk* ho determinato i *drawdown* di entrambi i fattori mercato, gestito e non. Il drawdown è semplicemente l'ammontare di perdite dell'investimento dall'ultimo picco esibito e può essere espresso sia in percentuale rispetto all'ultimo massimo, sia in termini assoluti. Denotato DD_t come il drawdown al tempo t , il DD_t attuale del fattore mercato è uguale:

$$(20) DD_t = \min\left(0, \frac{Mkt_t - Mkt_{max}}{Mkt_{max}}\right)$$

dove Mkt_{max} è il picco storico e Mkt_t è il rendimento cumulato fino al mese t . Sul foglio Excel ho calcolato il drawdown in termini assoluti (quindi l'ammontare di perdita dall'ultima realizzazione maggiore) per ogni mese del campione per entrambe le strategie; per la determinazione di una misura percentuale basta rapportare la perdita all'ultimo picco. Riporto in seguito una parte del mio lavoro riferibile al portafoglio buy-and-hold del fattore mercato originale (linea blu della Figura 3) da maggio 2007 a maggio 2008 (ultima crisi economica) per comprendere meglio quello ciò che ho fatto fino ad ora:

<i>Date</i>	<i>B&H</i>	<i>B&H(Cum)</i>	<i>B&H(DD)</i>	<i>BH%</i>	<i>Time Under Water</i>
mag-2007	38,88	7633,80	0,00	0,00%	0
giu-2007	-23,52	7610,28	-23,52	-0,31%	1
lug-2007	-44,76	7565,52	-68,28	-0,89%	2
ago-2007	11,04	7576,56	-57,24	-0,75%	3
set-2007	38,64	7615,20	-18,60	-0,24%	4
ott-2007	21,60	7636,80	0,00	0,00%	0
nov-2007	-57,96	7578,84	-57,96	-0,76%	1
dic-2007	-10,44	7568,40	-68,40	-0,90%	2
gen-2008	-76,32	7492,08	-144,72	-1,90%	3
feb-2008	-37,08	7455,00	-181,80	-2,38%	4
mar-2008	-11,16	7443,84	-192,96	-2,53%	5
apr-2008	55,20	7499,04	-137,76	-1,80%	6
mag-2008	22,32	7521,36	-115,44	-1,51%	7

Tabella 8: Drawdown e Time Under Water della strategia buy and hold. **Fonte:** Elaborazione personale.

Ho aggiunto un ulteriore indicatore, *Time Under Water*, che esplicita il tempo di recupero (nel mio caso mesi) necessario affinché l'investimento raggiunga nuovamente il precedente picco: ovviamente, minore sarà questo numero, migliore sarà l'impatto della crisi per il "buy-back period" del portafoglio.

Riporto nelle seguenti figure la rappresentazione, assoluta e percentuale, dei drawdown del volatility managed portfolios e del fattore mercato plottati tramite MatLab:

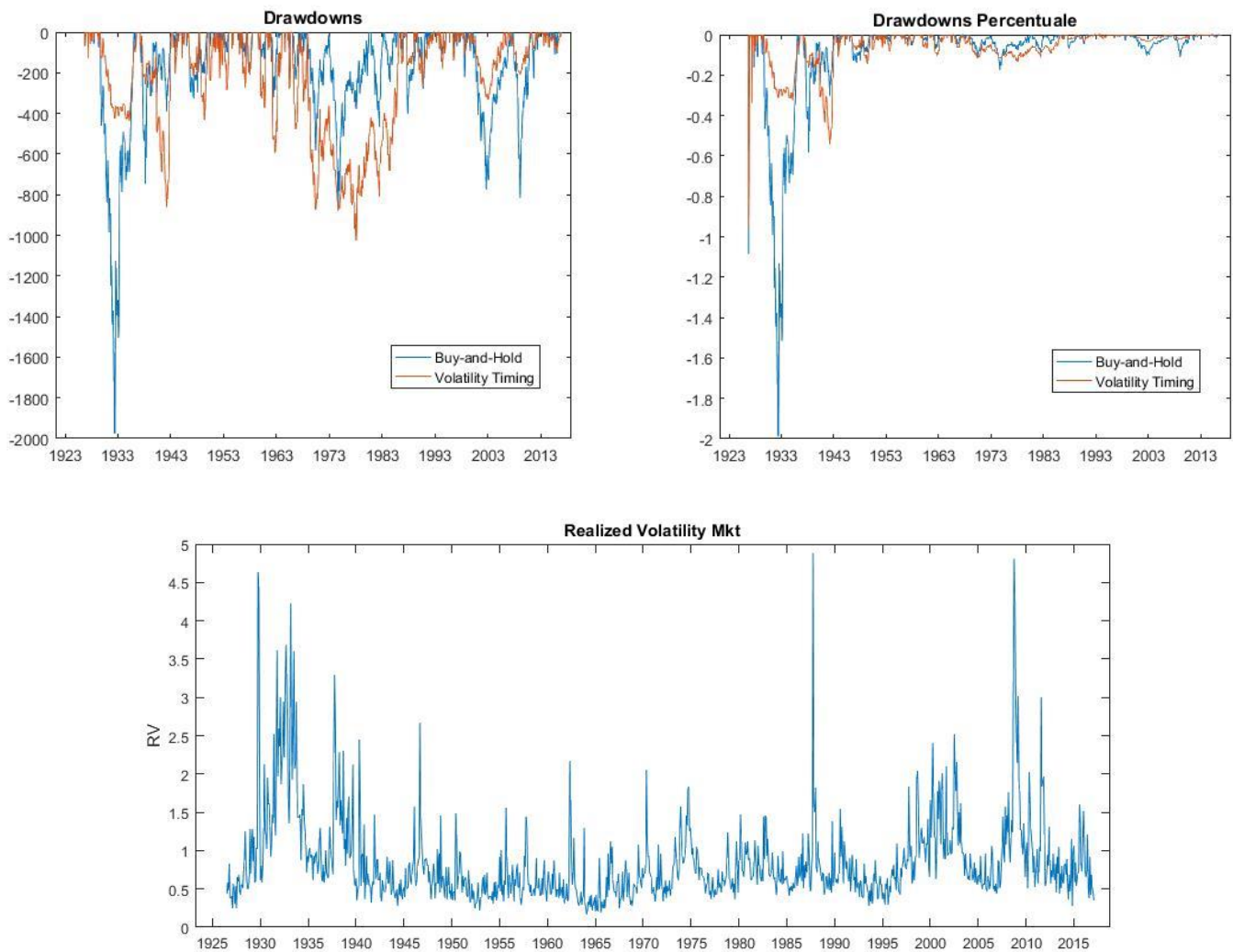


Figura 5: Rappresentazione grafica dei drawdown, drawdown percentuali e della realized volatility del fattore mercato per le strategie buy and hold e di volatility timing. **Fonte:** Elaborazione personale.

Ho determinato inoltre la media dei drawdown percentuali per entrambi le serie storiche, che risulta essere un indicatore forse maggiormente utile di quello corrente per capire il livello medio di DD che l'investitore può aspettarsi dall'investimento: per il portafoglio *buy-and-hold* tale valore si assesta a circa -8.7%, mentre per la versione a volatilità gestita sul -5.8%. Il portafoglio che si basa sul volatility timing registra storicamente un tasso di perdita minore rispetto a quello buy-and-hold.

Allo stesso modo può essere facilmente calcolato il massimo livello di perdita delle strategie cercando il minimo valore registrato dalle serie: ciò rappresenta un ipotetico *worst-case* scenario di un agente che ha investito in un picco ed ha mantenuto la posizione fino al periodo precedente la ripresa. Anche in questo caso il volatility managed portfolio si distingue positivamente: il massimo drawdown di quest'ultimo avviene nel febbraio del 1978 ed ammonta -1.028\$ circa, contro i -1.978\$ della strategia opposta registrati in giugno del 1932.

Infine è possibile studiare nel grafico successivo il comportamento della variabile *Time Under Water*:

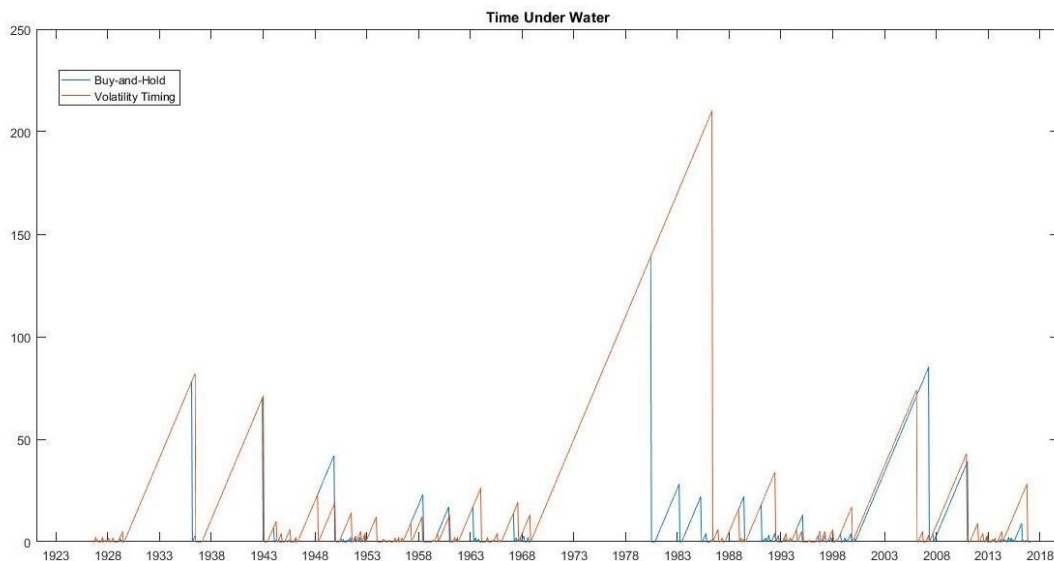


Figura 6: Time under water a confronto delle due strategie di investimento. **Fonte:** Elaborazione personale.

Sebbene il volatility timing e l'approccio buy-and-hold seguano degli andamenti ciclici molto affini (non scordiamoci che il primo non è altro che un derivato dell'altro), il portafoglio a volatilità gestita rimane "sotto l'acqua" per un massimo di 210 mesi tra novembre del 1968 e maggio del 1986 a confronto dei 139 del fattore mercato tra novembre del 1968 e maggio 1986: nonostante questo, la performance cumulata della prima strategia a novembre del 1968 era di 7.518\$ contro 5.136\$ della seconda, mentre nel periodo che coincide con la ripresa ammontava rispettivamente a 7.532\$ e \$5.140.

L'evidenza empirica da me effettuata conferma quindi la supposizione secondo la quale i volatility managed portfolios subiscono le maggiori perdite nei momenti di bassa volatilità del mercato e, viceversa, evitano gli episodi di grandi crisi quando la varianza è elevata. I drawdown prima illustrati, confrontati con la realized volatility del fattore Mkt, permettono di avere una comprensione dettagliata di quando la strategia di volatility timing perda a confronto di quella classica buy-and-hold: si può notare come durante la Grande Recessione del 1929, il Black Monday del 1987 ed infine la crisi dei mutui sub-prime del 2007 i volatility managed portfolios reagiscano in maniera decisamente minore sia dal punto di vista assoluto che percentuale rispetto al rendimento cumulato di Mkt; diversamente, le maggiori e durature perdite sono registrate tra gli anni 60' e 70', periodo di bassa agitazione finanziaria, come illustrato sia dalla Figura 3 che dalla 5. Questo non dovrebbe sorprendere in quanto, dalle assunzioni e dalla metodologia di costruzione del portafoglio a volatilità gestita, è implicito come la strategia di volatility timing assuma un maggiore rischio quando la

varianza è minore. Di conseguenza, questi risultati illustrano che i peggiori momenti della strategia tendono a non coincidere con quelli comuni di mercato; il comportamento che detta l'uscita dal mercato in concomitanza di eventi negativi ed il non "approfittare" di tali realizzazioni estreme dispiega i suoi effetti positivi nel corso del tempo a differenza delle tipiche strategie di investimento.

2.2.3 Costruzione del portafoglio multi-fattore

Nel precedente paragrafo ho illustrato *step-by-step* il procedimento da seguire per costruire un volatility managed portfolio. Cosa succede quando, invece di derivare il portafoglio a volatilità gestita da un singolo fattore, lo si faccia da un portafoglio efficiente media-varianza (Mean Variance Efficient, MVE)? Lo scopo di questo paragrafo è quindi quello di fare un ulteriore passo in avanti e considerare delle combinazioni efficienti di fattori per capire se la strategia è applicabile o quantomeno efficace anche in un contesto multi-fattoriale. Sto quindi per descrivere l'ultimo principale risultato dei volatility managed portfolios prima di dedicarmi ai test strutturali della strategia.

A differenza di come ho operato in precedenza, procederò all'esposizione sia dei miei risultati e sia di quelli degli autori originali: infatti, confrontando gli output finali di interesse, ho potuto notare una leggera differenza tra i due, dovuta principalmente alla mancanza di indicazioni precise da seguire per l'elaborazione del *dataset* (non scordiamoci che l'articolo "*Volatility Managed Portfolio*" è stato pubblicato nel *The Journal of Finance*: il fine dello stesso è discutere la validità della teoria e l'evidenza empirica, e di certo non si struttura come un "tutorial" economico/universitario). Riporterò in seguito dei brevi estratti dell'articolo per enfatizzare l'assenza di alcune informazioni che possono essere la causa della non perfetta coincidenza dei risultati.

Così come prima sono stati considerati singolarmente i fattori di Fama e French, ora l'analisi è estesa attraverso la costruzione di un portafoglio che combini linearmente più fattori. Per questo motivo, i parametri incogniti non sono altro che i pesi con cui ponderare nel corso del tempo i rendimenti dei fattori scelti, in modo tale che "*the multifactor portfolio is mean-variance efficient for the set of factors, and as such, the multifactor portfolio prices not only the individual factors but also the wide set of assets and strategies priced by them*"⁴ (il portafoglio multifattoriale sia efficiente media-varianza per un set di fattori e conseguentemente "prezzi" non solo il fattore individuale, ma anche un ampio set di asset e strategie colte dagli altri). Moreira e Muir si riferiscono a questo portafoglio chiamandolo MVE (Mean Variance Efficient) ed anch'io utilizzerò la stessa dicitura.

⁴ *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

Dati i fattori di Fama e French (e le loro estensioni), come viene costruito il portafoglio MVE? Sia F_{t+1} un vettore di rendimenti ($n \times 3$ nel caso vengano combinati linearmente i soli primi tre fattori di Fama e French) e b un peso statico che assicuri il maggior Sharpe Ratio del campione. MVE può essere quindi definito come:

$$(21) f_t^{MVE} = b'F_t$$

Quella appena descritta è l'unica indicazione utile data dagli autori per elaborare f_t^{MVE} . Siccome lo scopo di questo elaborato è, oltre che esporre la strategia dei volatility managed portfolio, quello di replicare gli esperimenti originali, sono assenti in questo contesto alcuni *hints* che, come accennato prima, ritengo siano la causa di eventuali distorsioni negli output finali. Non nascondo che la scelta finale dei pesi b sia stata frutto di numerosi tentativi e che sia stata infine orientata non su quell'ammontare che si avvicini maggiormente ai risultati dell'articolo di riferimento, bensì su quello che ritenessi maggiormente opportuno dal punto di vista procedurale.

Ho operato sulla falsa riga del procedimento di ottimizzazione spiegato al paragrafo 1.1.1 del primo capitolo, concernente la determinazione del portafoglio che massimizza la Capital Allocation Line (la cui pendenza è proprio lo Sharpe Ratio), ovvero il punto di tangenza con l'insieme delle opportunità di investimento (graficamente la rappresentazione è analoga a quella della Figura 1 del primo capitolo, dove però la retta è la CAL mentre il portafoglio tangente è P e non M). In questo caso l'avversione al rischio dell'investitore è un parametro che posso non considerare: sono infatti interessato al portafogli rischioso ottimo oggettivo, non influenzato quindi da elementi meramente soggettivi come sono le funzioni di utilità. La soluzione del problema di ottimizzazione e quindi l'identificazione degli opportuni pesi è stata risolta tramite MatLab: siccome i fattori contenuti nel portafoglio sono maggiori di due, cioè il numero massimo di "titoli" con cui è possibile determinare facilmente le incognite mediante un foglio di lavoro Excel, ho ritenuto essenziale l'utilizzo di questo software che semplifica di gran lunga i calcoli.

Le combinazioni di fattori analizzati, sia nel paper che da me, sono quattro: FF3 (Mkt, SMB e HML), FF3Mom (Mkt, SMB, HML e Mom), FF5 (Mkt, SMB, HML, CMA e RMW) e FF5Mom (Mkt, SMB, HML, CMA, RMW e Mom). Procedo alla descrizione del primo portafoglio efficiente di questi, FF3, la cui metodologia è ovviamente applicabile ai restanti tre casi. La base di partenza è il dataset di rendimenti giornalieri e mensili dei fattori Mkt, SMB e HML, nonché il tasso privo di rischio. I parametri necessari al fine dell'elaborazione del portafoglio efficiente media-varianza sono: il rendimento medio giornaliero dei fattori, il rendimento medio giornaliero del tasso risk free ed infine la matrice delle varianze e covarianze. Questi tre elementi sono infatti sufficienti a determinare i pesi

che ottimizzano il valore atteso e la varianza del portafoglio MVE attraverso l'applicazione delle seguenti formule (già esplicitate nel primo capitolo):

$$(22) E(r_{MVE}) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$$

$$(23) \sigma_{MVE}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(r_i, r_j)$$

Ho calcolato il rendimento medio giornaliero dei fattori e del tasso privo di rischio come media semplice delle osservazioni dal luglio del 1926 a febbraio del 2017. La scelta di utilizzare i rendimenti medi giornalieri e non quelli annuali, ovvero il prodotto dei primi per 252, deriva sia dell'osservazione che in un intervallo così esteso il numero medio di giorni annuali effettivi possa differire da 252, ma soprattutto in quanto al fine di applicare la formula (21) ho voluto mantenere una coerenza tra unità dei pesi b e dei fattori F_t . Per i primi tre fattori e per il tasso privo di rischio, questi sono i rendimenti trovati:

<i>Mkt</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RF</i>
2,90%	0,52%	1,69%	1,26%

Tabella 10: Rendimenti medi giornalieri per *Mkt*, *SMB*, *HML* ed il tasso *risk free*. **Fonte:** Elaborazione personale.

Riporto inoltre la matrice delle covarianze per i tre fattori, dove ricordo che gli elementi sulla diagonale principale non sono altro che le varianze dei rendimenti esplicitati:

	<i>Mkt-RF</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>
<i>Mkt-RF</i>	1,14	-0,11	0,11
<i>SMB</i>	-0,11	0,34	-0,03
<i>HML</i>	0,11	-0,03	0,34

Tabella 10: Matrice delle varianze e covarianze per i primi tre fattori del modello di Fama e French. **Fonte:** Elaborazione personale.

Arrivato a questo punto, dopo aver inserito gli input in MatLab, l'applicativo restituisce, attraverso la specificazione di un oggetto "portafoglio", i pesi ottimali che massimizzano lo Sharpe ratio. Proprio in questo contesto entrano in gioco vari fattori che possono portare a risultati diversi rispetto quelli degli autori: MatLab è un software potentissimo, che permette di inserire numerosi vincoli di portafoglio, inclusi la possibilità di vendita allo scoperto, di budget finanziari, percentuale di turnover, costi di transazione ecc. Il mio approccio è estremamente semplice e non tiene conto né dei costi di transazione, né dell'eventualità di andare corto su un asset: in questo modo l'unico vincolo imposto è che la somma dei pesi sia uguale ad uno. L'ottimizzazione posta in essere in MatLab determina i tre pesi per i tre fattori, rispettivamente pari a 63% in Mkt, 0% in SMB ed infine 37% in HML: è intuitivo come, al fine di massimizzare lo Sharpe ratio, l'allocazione di risorse nel fattore Small Minus Big sia nulla, dato che, a parità di varianza con HML, esibisce un rendimento medio pari a circa un terzo di quest'ultimo. L'impostazione portata avanti dagli autori sancisce la natura statica dei pesi ("*...the static weights that produce the maximum in-sample Sharpe ratio*⁵): una volta trovati, ho infatti calcolato f_t^{MVE} ponderando i rendimenti giornalieri per i pesi, e ripetuto il procedimento per tutta la durata del campione. Uno stralcio del foglio Excel riepiloga la creazione del nuovo fattore:

<i>Date</i>	<i>Mkt-RF</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>MVE</i>
01-lug-1926	0,10	-0,24	-0,28	-0,04
02-lug-1926	0,45	-0,32	-0,08	0,25
06-lug-1926	0,17	0,27	-0,35	-0,02

Tabella 11: Estratto del foglio di calcolo Excel riportante la determinazione del portafoglio MVE giornaliero per i primi tre fattori di Fama e French. **Fonte:** Elaborazione personale.

Ad esempio, il fattore MVE per il 1 luglio del 1926 è uguale a:

$$f_{01/07}^{MVE} = 0.1 * 0.63 - 0.24 * 0 - 0.28 * 0.37 \cong -0.04$$

Il medesimo procedimento di ponderazione è stato applicato ai rendimenti mensili, utilizzando a tal proposito gli stessi pesi che massimizzano lo Sharpe ratio del fattore MVE giornaliero.

⁵ *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

MVE viene successivamente trattato esattamente alla stregua del fattore singolo esposto al paragrafo 2.2.2 per la determinazione del portafoglio a volatilità gestita. Il volatility managed portfolio è costruito come riportato di seguito:

$$(24) f_t^{MVE,\sigma} = \frac{c}{RV_{t-1}^2(f_t^{MVE})} f_t^{MVE}$$

Anche in questo caso c è la costante che uguaglia la varianza del portafoglio $f_{t+1}^{MVE,\sigma}$ con quello MVE, pari a $c = \sqrt{\text{var}(f_t^{MVE})/\text{var}(f_t^{MVE,\sigma})}$. Riprendendo la descrizione empirica, ho calcolato, sulla base dei rendimenti giornalieri, la volatilità realizzata mensile per l'intera serie storica, $RV_{t-1}^2(f_t^{MVE})$, applicando la formula (9). Riepilogando, il dataset giornaliero è servito per trovare il denominatore dell'equazione (24) (la realized volatility), mentre quello mensile ha determinato il fattore MVE al numeratore. Il rapporto tra i due, moltiplicato per c , conclude la costruzione del portafoglio a volatilità gestita $f_t^{MVE,\sigma}$. L'analisi della regressione ($f_t^{MVE,\sigma} = \alpha + \beta f_t^{MVE} + \varepsilon_t$) che studia la relazione tra MVE originale e volatility managed è riportato nella Tabella 12. Nello specifico, l'alpha della regressione rappresenta una appropriata misura dell'espansione della frontiera media-varianza: in particolare, un alpha positivo ha come prima implicazione che il timing della volatilità aumenta lo Sharpe Ratio della migliore strategia *buy-and-hold* di un soggetto che ha la possibilità di accedere allo scambio di multipli fattori di mercato.

	<i>Portafogli Efficienti Media-Varianza (MVE)</i>				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	<i>MktRF</i>	<i>FF3</i>	<i>FF3Mom</i>	<i>FF5</i>	<i>FF5Mom</i>
Alpha	4,92	3,57	2,96	1,51	3,70
SE	(1,56)	(0,94)	(0,54)	(0,97)	(0,84)
N	1087	1087	1081	643	643
R²	0,37	0,64	0,67	0,80	0,71
RMSE	51,1	27,7	17,9	21,4	14,8
SR(MVE)	0,42	0,50	0,92	0,43	0,84
SR(VMP)	0,52	0,67	1,14	0,50	1,17
AR	0,33	0,45	0,69	0,25	0,86

Tabella 12: La tabella mostra i risultati delle regressioni per 4 combinazioni di portafogli (più quello di mercato) tra il portafoglio a MVE a volatilità gestita e quello originale. **Fonte:** Elaborazione personale.

Lo Sharpe ratio delle varie combinazioni non è altro che il rapporto tra il rendimento atteso di MVE o VMP (a cui va sottratto il tasso privo di rischio relativo allo stesso lasso temporale) e la standard deviation dello stesso portafoglio, moltiplicato per la radice di 12 al fine di avere una misura annualizzata. L'appraisal ratio invece, nell'ultima riga della tabella, è uguale all'alpha della regressione diviso il root mean square error (anche in questo caso per radice di 12 per annualizzarlo). Ho voluto aggiungere anche il fattore Mkt da solo, i cui valori relativi all'alpha ed appraisal ratio sono direttamente ripresi dagli studi precedentemente effettuati. La Tabella 12 mostra che il portafoglio MVE a volatilità gestita esibisce, per tutte le combinazioni analizzate, alpha positivi e statisticamente significativi: ciò conferma l'intuizione secondo cui il timing della volatilità espanda la frontiera media-varianza. Ad alimentare la bontà degli output sono inoltre i risultati sullo Sharpe ratio ed appraisal ratio: per quanto concerne la prima misura, si può notare come il tradeoff rischio rendimento dei volatility managed portfolio sia sempre maggiore rispetto al fattore MVE di partenza; in aggiunta, gli appraisal ratio sono economicamente significativi ed oscillano tra 0,25 e 0,86. Ho successivamente esteso l'analisi considerando sotto-campioni dei portafogli prima determinati. Nello specifico ho diviso le osservazioni in tre gruppi temporali, che si estendono rispettivamente dal 1926 al 1955, dal 1956 al 1985 ed infine dal 1986 al 2017. Ovviamente per FF5 e FF5Mom sono assenti le informazioni comprese tra gli anni 1926 e 1955 a causa della mancanza dei dati. La Tabella 13 mostra gli alpha delle nuove regressioni relative a questi periodi:

	<i>Portafoglio Efficiente Media-Varianza (MVE)</i>				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Alpha	MktRF	FF3	FF3Mom	FF5	FF5Mom
α: 1926-1955	8,39 (0,45)	3,51 (1,55)	1,99 (0,87)	n.a	n.a
α: 1956-1985	2,11 (2,91)	0,58 (0,93)	2,02 (0,88)	0,52 (1,31)	2,46 (0,99)
α: 1986-2017	4,14 (0,55)	3,38 (1,44)	3,49 (0,73)	2,65 (0,76)	3,86 (0,71)

Tabella 13: Risultati delle regressioni della Tabella 12 dopo aver diviso la serie storica in tre sotto-campioni, rispettivamente dal 1926 al 1955, dal 1956 al 1985 e dal 1986 al 2017. **Fonte:** Elaborazione personale.

I risultati mostrano che, nonostante gli alpha siano positivi in tutti i tre sotto-periodi, le regressioni del primo e dell'ultimo gruppo hanno degli alpha più elevati e significativi rispetto a quello centrale. Questo non fa altro che confermare quanto esposto nel paragrafo sui drawback: periodi di bassa

volatilità, come quelli rappresentati proprio dal 1956 al 1985, coincidono con le minori performance del portafoglio a volatilità gestita. Di converso, se la volatilità fosse stata costante durante un particolare lasso di tempo, il volatility managed portfolio sarebbe stato identico ad una strategia buy-and-hold, così come gli alpha sarebbero stati uguali a zero.

Questa analisi conclude la descrizione della costruzione del portafoglio a volatilità gestita, sia a fattore singolo che, come appena presentato, multiplo. In generale, si è dimostrata l'efficienza della strategia in entrambi i casi, motivata sia dalla presenza di alpha strettamente positivi (e significativi), sia da sostanziali appraisal ratio, nonché da un incremento degli Sharpe ratio rispetto al fattore originale. L'elaborato prosegue indagando se questi ottimi risultati perdurano anche quando sottoposti a test strutturali ed infine si cercherà di capire nello specifico i fondamenti teorici del modello.

2.3 Test strutturali

I paragrafi che seguono sono volti ad investigare potenziali spiegazioni del perché la strategia di volatility timing restituisca così elevati rendimenti aggiustati per il rischio sottoponendo la stessa a specifici test strutturali. Per fare ciò ho replicato due dei quattro esperimenti effettuati dagli autori: il *buisness cycle risk* e l'esplorazione delle differenze rispetto alle anomalie cross sezionali. Per quanto concerne i restanti, mi limiterò a riportare il lavoro ed i risultati di Moreira e Muir e solo alcune mie elaborazioni personali, in quanto i dati da loro utilizzati non sono facilmente reperibili in rete.

2.3.1 Il Business Cycle Risk

La figura 3 ha mostrato come il volatility managed portfolio del fattore mercato restituisca nel corso del tempo un rendimento cumulato maggiore rispetto alla classica strategia buy-and-hold. In aggiunta, ha graficamente messo in evidenza come il portafoglio gestito sia meno soggetto ai movimenti comuni di mercato, rappresentati in primis dalle grandi crisi, dove la volatilità assume valori elevati. Questo paragrafo si propone di analizzare l'influenza del ciclo economico sulla strategia di volatility timing, cercando di capire se il rischio implicito in tali fluttuazioni possano essere una spiegazione dei precedenti risultati.

Come anticipato al paragrafo 2.2.1, nello studio della dipendenza della probabilità di default dalla varianza realizzata passata, ho utilizzato una variabile dummy scaricabile dal sito della Federal Reserve Bank di St. Louis (FRED)⁶: in particolare, il suddetto dataset non è altro che una

⁶ www.fred.stlouisfed.org/series/USRECP

trasformazione in chiave binaria dell'analisi effettuata dal National Bureau of Economic Research (NBER) sul business cycle americano e mondiale. A tal proposito, NBER definisce un periodo di recessione come un declino significativo dell'attività economica che perduri per un lasso di tempo variabile (non necessariamente due trimestri) e che impatti sostanzialmente su indicatori come il PIL, prodotto reale, occupazione ecc. La serie storica da me utilizzata si basa quindi sullo studio dei *turning points* (giri di boa) del NBER ed è composta da una variabile dummy che esplicita i momenti di espansione e recessioni: un valore uguale ad 1 coincide con un periodo di recessione, mentre un valore pari a 0 determina un momento di espansione economica. Nello specifico, la recessione inizia il primo giorno che segue il picco e finisce l'ultimo giorno del periodo in cui si registra il minimo valore. Anche in questo caso, lo strumento utile per la comprensione della relazione tra il ciclo economico e le performance dei volatility managed portfolios è una regressione lineare (multipla): nello specifico, viene riproposta l'equazione (12), con l'aggiunta della nuova variabile dummy che interagisce direttamente con il fattore originale. Avremo quindi sei regressioni di questo tipo:

$$(25) f_t^\sigma = \alpha_0 + \alpha_1 1_{rec,t} + \beta_0 f_t + \beta_1 1_{rec,t} * f_t + \varepsilon_t$$

Il nuovo regressore " $1_{rec,t} * f_t$ " è il prodotto della variabile binaria per il fattore originale per tutta la lunghezza della serie storica. Una equazione come quella precedente permette quindi di interpretare facilmente gli output della regressione. Qualora infatti, in un dato mese t , la variabile $1_{rec,t}$ assuma un valore pari zero, coincidente quindi con una condizione di crescita economica, e l'equazione (25) diventerà:

$$f_t^\sigma = \alpha_0 + \beta_0 f_t + \varepsilon_t$$

In periodi di recessione, $1_{rec,t}$ è di costruzione pari ad uno ed avremo invece:

$$f_t^\sigma = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_0 f_t + \beta_1 f_t + \varepsilon_t$$

In quest'ultimo caso, il beta che ci interessa evidenziare ed analizzare non sarà altro che la somma dei due coefficienti β_0 e β_1 . Riporto nella seguente tabella i risultati della regressione multipla appena individuata per i soliti fattori di Fama e French e la variabile momentum:

<i>Beta durante le recessioni</i>						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ
<i>MktRF</i>	0,79 (0,11)					
<i>MktRF x Irec</i>	-0,44 (0,13)					
<i>SMB</i>		0,64 (0,12)				
<i>SMB x Irec</i>		-0,13 (0,15)				
<i>HML</i>			0,74 (0,10)			
<i>HML x Irec</i>			-0,46 (0,15)			
<i>Mom</i>				0,69 (0,08)		
<i>Mom x Irec</i>				-0,46 (0,12)		
<i>RMW</i>					0,59 (0,15)	
<i>RMW x Irec</i>					-0,05 (0,20)	
<i>CMA</i>						0,75 (0,11)
<i>CMA x Irec</i>						-0,35 (0,12)
<i>N</i>	1087	1087	1087	1082	643	643
<i>R</i> ²	0,42	0,38	0,37	0,27	0,34	0,48

Tabella 14: La tabella illustra i risultati delle regressioni dopo l'inclusione di una variabile dummy che assume valore 0 in caso di espansione economica ed 1 in caso di recessione. **Fonte:** Elaborazione personale.

Prendo come esempio il fattore mercato per interpretare i risultati. Per MktRF, la regressione assume la seguente forma esplicita:

$$f_{Mkt,t}^{\sigma} = 2,49 + 0,79 * f_{Mkt,t} - 0,44 * 1_{rec,Mkt,t} * f_{Mkt,t}$$

Più in particolare, la regressione del portafoglio a volatilità gestita per il fattore mercato è uguale a $f_{Mkt,t}^{\sigma} = 2,49 + 0,79 * f_{Mkt,t}$ in espansione, e $f_{Mkt,t}^{\sigma} = 2,49 + 0,79 * f_{Mkt,t} - 0,44 * 1_{rec,Mkt,t} * f_{Mkt,t}$ in recessione. La successiva lettura economica è che in periodi di recessione, in cui la variabile

dicotomica è uguale ad uno, il beta di interesse (somma di β_0 e β_1 , 0,35 in questo caso) è minore dello stesso in casi di espansione (cioè β_0 , 0,79): ciò implica che la strategia di volatility timing assume meno rischio durante le recessioni. Come si può notare nella Tabella 14, per tutti i fattori il coefficiente β_1 assume valori negativi, indicando quindi che i beta del portafoglio in recessione sono minori rispetto agli stessi durante momenti economici favorevoli.

Infine, guardando semplicemente alla Figura 1 (serie storica delle realized volatility di ciascun fattore), è facile vedere come la volatilità di tutti i fattori tende a crescere durante le crisi di mercato. Come ripetuto più volte, la strategia di volatility timing riduce l'esposizione al rischio durante le recessioni (così come stimate dall'NBER) e questo rende difficile utilizzare questa tipologia di rischio come unica variabile esplicativa degli ottimi risultati stimati.

2.3.2 Differenze con anomalie cross-sectional

In questa sezione indago empiricamente se la strategia alla base dei volatility managed portfolio sia diversa da quelle che esplorano un debole trade-off rischio rendimento nei dati cross-sezionali. Nel primo capitolo ho avuto modo di spiegare approfonditamente sia il portafoglio Betting Against Beta (BAB) che quello risk parity, evidenziando come i due approcci sfruttino a loro vantaggio delle anomalie che si riscontrano nel pricing degli asset sul mercato.

Per quanto concerne il BAB, Frazzini e Pedersen dimostrano nel loro articolo⁷ come un investimento che va lungo su azioni dal beta basso e corto su azioni da beta alto possa guadagnare elevati alpha rispetto a quanto predetto sia dal CAPM che dal modello a fattori multipli di Fama e French. Gli autori teorizzano quindi una strategia che ha empiricamente risultati estremamente positivi, trovandone una ragione economica: Moreira e Muir si domandano quindi se le stesse anomalie cross-sezionali possano essere una spiegazione delle performance dei volatility managed portfolios. Al fine di capire un eventuale dipendenza, ho posto in essere due test: in primo luogo, ho aggiunto alle regressioni singole della Tabella 3 il fattore BAB come ulteriore regressore; successivamente, ho analizzato gli output della regressione tra il BAB originale e quello a volatilità gestita.

I risultati del primo esperimento sono rinvenibili nella Tabella 15. Ho scaricato dal sito⁸ di Applied Quantitative Research (AQR Capital Management, il fondo di investimento dove lavorano gli stessi autore dell'articolo originale) il dataset del fattore BAB, calcolato come descritto nel primo capitolo: una difficoltà che ho incontrato è stata uguagliare i giorni della suddetta serie storica con quelli di Fama e French, in quanto nella prima erano presenti più giorni rispetto la seconda. Risolto il problema

⁷ *Betting Against Beta*. Journal of Financial Economics (2014)

⁸ www.aqr.com/library/data-sets

(con la funzione CERCA.VERT di Excel), che portava ad una stima dei parametri ovviamente distorta, ho semplicemente aggiunto BAB come variabile di controllo alle regressioni singole viste nel paragrafo 2.2.2:

<i>Regressioni controllando per il fattore BAB</i>						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ
<i>Mkt</i>	0,61 (0,09)					
<i>SMB</i>		0,61 (0,11)				
<i>HML</i>			0,57 (0,11)			
<i>Mom</i>				0,49 (0,09)		
<i>RMW</i>					0,64 (0,12)	
<i>CMA</i>						0,71 (0,08)
<i>BAB</i>	0,11 (0,06)	0,01 (0,05)	0,05 (0,06)	-0,08 (0,05)	-0,14 (0,03)	-0,06 (0,03)
Alpha S.E.	3,18 (1,91)	-0,71 (1,31)	1,53 (1,22)	13,3 (2,09)	3,86 (0,92)	0,81 (0,67)
N	1033	1033	1033	1033	643	643
R²	0,37	0,37	0,32	0,22	0,38	0,46
RMSE	51,1	31,1	35,2	51,1	21,1	17,6

Tabella 15: Regressioni controllando ciascun fattore individualmente per il portafoglio Betting Against Beta. **Fonte:** Elaborazione personale.

La Tabella 15 mostra che gli output delle regressioni sono praticamente identici a quelli della Tabella 3: gli alpha non risentono dell'aggiunta di BAB. Inoltre, i coefficienti del fattore BAB non appaiono significativi, ulteriore aspetto che conferma la stretta indipendenza (o assenza di correlazione) tra le due strategie.

Il secondo esperimento è stato svolto sulla falsa riga del procedimento di costruzione del volatility managed portfolio dei singoli fattori. Ho per questo motivo calcolato la volatilità realizzata mensile del BAB, ponderato il fattore gestito come rendimento dello stesso sulla realized volatility del mese

precedente ed infine moltiplicato quest'ultimo rapporto per la costante normalizzante c . I risultati della regressione del BAB managed su quello originale sono stati presentati già nella Tabella 3, ma solo adesso procedo con la loro interpretazione. L'alpha della regressione, pari a 6,27, oltre che essere il valore più elevato tra tutti gli alpha determinati, risulta essere strettamente significativo: questo conferma come la strategia di volatility timing sovra-performa anche in questo caso la classica buy-and-hold. I risultati di questo test stabiliscono che, siccome è possibile "time the volatility" del fattore BAB, le due strategie, quelle dei volatility managed portfolio e del Betting Against Beta, rimangono pertanto prettamente distinte ed indipendenti. La spiegazione teorica di questa differenza risiede in una diversità concettuale degli approcci: mentre gli elevati rendimenti aggiustati per il rischio del fattore BAB riflettono il fatto che le differenze nei rendimenti medi non sono spiegate dalla differenza nei beta del CAPM nei dati cross-sectional, la strategia dei portafogli a volatilità gestita si basa sul fatto che, tra periodi di tempo, le differenze medie nei rendimenti non sono spiegate da differenze nella varianza delle azioni di mercato. Conseguentemente, sia l'una che l'altra catturano differenti fenomenologie nei dati.

Accanto ai BAB, la seconda strategia analizzata è il risk parity di Asness, Frazzini e Pedersen: anche per quest'ultima ho effettuato una descrizione completa nel paragrafo 1.2.3 del primo capitolo. Riprendendo quanto già detto, gli autori mostrano che l'approccio risk parity⁹, che si esplicita nella costruzione di un portafoglio in cui le asset class contribuiscono in misura uguale al rischio totale del portafoglio, renda nel lungo periodo più che la classica allocazione 60/40. In altre parole, il risk parity ignora le informazioni riguardo il rendimento atteso e le covarianze ed alloca le risorse in modo tale che il contributo delle asset class alla volatilità sia lo stesso. Moreira e Muir seguono lo stesso procedimento illustrato nell'articolo di Asness, Frazzini e Pedersen e costruiscono una variabile risk parity ponderando i fattori per una componente b'_t :

$$(26) RP_{t+1} = b'_t f_{t+1}$$

dove f è il vettore di fattori e

$$(27) b_{i,t} = \frac{1/\tilde{\sigma}_t^i}{\sum_i 1/\tilde{\sigma}_t^i}$$

ed infine $\tilde{\sigma}_t^i$ è una stima rolling a tre anni della volatilità per ciascun fattore. Questo implica che se la volatilità di un fattore aumenta rispetto ad un altro, la strategia bilancerà l'esposizione a favore del

⁹ Asness, C.S., Frazzini, A., and Pedersen, L. *Leverage aversion and risk parity*. Financial Analysts Journal (2012)

fattore con minor rischio. Differentemente, quando ci si riferisce ad una combinazione di fattori come nella Tabella 12, il peso relativo di ognuno di essi viene mantenuto costante e l'esposizione totale al rischio viene incrementata o diminuita sulla base della volatilità totale. Per dimostrare empiricamente che i volatility managed portfolio sono differenti da quelli risk parity, Moreira e Muir aggiungono come ulteriore regressore il fattore risk parity, mediante un procedimento simile a quello dei BAB, al fine di indagare eventuali differenze significative. Viene infatti dapprima costruito un portafoglio risk parity per le stesse combinazioni dei fattori di Fama e French della Tabella 12, poi regressito il portafoglio a volatilità gestita MVE sullo stesso statico e su quello risk parity. In formule:

$$(28) f_t^{MVE,\sigma} = \alpha + \beta f_t^{MVE} + \varphi RP_t + \varepsilon_t$$

I risultati delle regressioni, direttamente riportate dall'articolo¹⁰, sono nella Tabella 16: gli alpha delle regressioni sono sostanzialmente uguali a quelle dell'analisi a fattore multiplo degli stessi Muir e Moreira.

	<i>Alpha controllando per fattore risk parity</i>				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	<i>MktRF</i>	<i>FF3</i>	<i>FF3Mom</i>	<i>FF5</i>	<i>FF5Mom</i>
Alpha	4,86	5,00	4,09	1,32	1,97
SE	(1,56)	(1,00)	(0,57)	(0,31)	(0,40)

Tabella 16: Sono riportati gli alpha e gli standard error della regressione (28). Questi risultati sono sostanzialmente immutati rispetto a quelli determinati dagli autori nei portafogli a fattore multiplo. Nello specifico, gli alpha erano rispettivamente pari a: 4.86, 4.99, 4.04, 1.34, 2.01.

Fonte: *Volatility Managed Portfolio, Moreira e Muir 2016*

Conseguentemente, controllare per il portafoglio risk parity costruito seguendo le indicazioni di Asness e co. (2012) non ha un impatto diretto nei risultati dei volatility managed portfolio, suggerendo anche in questo caso che le due strategie colgano differenti fenomeni empirici.

¹⁰ *Volatility Managed Portfolios, Moreira e Muir (2016)*

2.3.3 Costi di Transazione

L'analisi procede illustrando come la strategia di volatility timing sopravviva ai costi di transazione. Fino ad ora ho per semplicità ignorato l'eventualità che, nel modificare l'esposizione mensile, l'investitore si trovasse a sostenere dei costi impliciti per il trading del portafoglio. Siccome queste modifiche occorrono, e per lo più occorrono frequentemente (mensilmente), si rende necessario questo test strutturale per capire se i volatility managed portfolio sono robusti rispetto a queste frizioni finanziarie. Porto di conseguenza un estratto dei risultati degli autori, che mi appresto a commentare di seguito.

w	Description	$ \Delta w $	$E[R]$	α	α After Trading Costs			
					1bps	10bps	14bps	Break Even
$\frac{1}{RV_t^2}$	Realized Variance	0.73	9.47%	4.86%	4.77%	3.98%	3.63%	56bps
$\frac{1}{RV_t}$	Realized Vol	0.38	9.84%	3.85%	3.80%	3.39%	3.21%	84bps
$\frac{1}{E_t[RV_{t+1}^2]}$	Expected Variance	0.37	9.47%	3.30%	3.26%	2.86%	2.68%	74bps
$\frac{1}{\max(E[RV_t^2], RV_t^2)}$	RV Above Mean	0.10	9.10%	2.20%	2.19%	2.08%	2.03%	183bps

Tabella 17: sono riportati le variazioni medie assolute dei pesi mensili, il rendimento atteso e gli alpha (prima e dopo i costi di transazione) per quattro tipologie diverse di volatility timing.

Fonte: Volatility Managed Portfolio, Moreira e Muir 2016

Come hanno operato Moreira e co.? In primis, hanno considerato diverse modalità che permettessero di cogliere il volatility timing (oltre a quella precedentemente esposta della realized volatility, alla prima riga della Tabella 16) e che al contempo riducessero l'attività di trading del portafoglio: è stato quindi utilizzato come fattore ponderatore la standard deviation (seconda riga), la varianza attesa (terza riga) ed infine viene determinato un approccio che consente il trading solo quando la varianza supera il suo valore medio (quarta riga). Ognuna di queste strategie riduce il trading implicito nella versione originale dei volatility managed portfolio e quindi i costi di transazione: per ciascuna di esse vengono determinati i cambiamenti medi assoluti nei pesi mensili ($|\Delta w|$, decrescenti rispetto la prima riga), i rendimenti attesi ($E[R]$) e gli alpha prima dell'introduzione dei costi di transazione. Le ultime quattro colonne della Tabella 16 illustrano invece gli alpha quando vengono aggiunti i *transaction costs*: in particolare, vengono indicati crescenti livelli di costi di transazione, che vanno da un singolo punto percentuale (1bps) a quattordici (14bps). L'ultima colonna illustra il costo di transazione implicito in bps necessario ad annullare l'alpha della regressione. La metodologia di calcolo dei costi

di transazione ha una specifica fonte, ovvero il già trattato articolo “*The economic value of volatility timing using realized volatility*”¹¹. In questo lavoro gli autori stimano che le commissioni per grandi istituzioni finanziarie sono di circa 6\$ per ogni contratto futures sullo S&P 500. Assumono inoltre, sulla base di un bid-ask spread medio pari a 50\$ e sul prezzo medio dei futures del loro campione uguale a 551,39\$, un costo di transazione annualizzato del 2,56% per un contratto di \$551,39 x 500 (ipotizzando quindi una grandezza pari a 500 volte l'indice S&P 500). Questo vuol dire che, se in media viene scambiato un contratto all'anno, i costi di transazione riducono i rendimenti di 256 basis points. In base alla frequenza del trade, i costi di transazione ridurranno i rendimenti del portafoglio della misura appropriata: nel nostro caso, i trading costs saranno ovviamente mensili.

I risultati di Moreira e Muir sono lampanti, e determinano ancora una volta la validità dei volatility managed portfolio. La Tabella 16 indica chiaramente come gli alpha annualizzati si riducano di alcuni punti percentuali a seconda della tipologia di volatility timing posta in essere, ma che continuino a risultare fortemente positivi. Ed ancora, i portafogli a volatilità gestita sopravvivono in tutte le loro forme ai costi di transazione: anche nel caso estremo in cui siano pari a 14bps, i quattro portafogli esibiscono degli alpha positivi che oscillano tra 2,03% e 3,63%.

Infine, bisogna specificare che non vengono riportati i risultati per gli altri fattori (SMB, HML, RMW, CMA e Mom) in quanto la realized volatility di Mkt varia in misura maggiore rispetto alle altre variabili, implicando maggiori cambiamenti mensili dei pesi e quindi del trading stesso. Di conseguenza, se la strategia sopravvive ai costi di transazione in questo caso, si comporterà allo stesso modo per i restanti fattori.

2.3.4 Vincoli di leva finanziaria

Nel primo capitolo ho avuto modo di esporre come i vincoli di leva finanziaria siano alla base delle anomalie cross sezionali. L'impossibilità da parte degli investitori di indebitarsi a piacimento porta a sovra-pesare alcune tipologie di asset anziché usare l'indebitamento, e questo comportamento sposta drasticamente le decisioni di investimento: per il Betting Against Beta, la scelta ricade sui titoli dall'elevato beta, mentre per la strategia di risk parity nei titoli poco rischiosi (obbligazioni ad esempio). Il seguente paragrafo è volto a capire empiricamente l'importanza della leva nei volatility managed portfolio e viene successivamente mostrato come un investitore possa beneficiare degli stessi anche sotto stretti vincoli finanziari.

¹¹ Fleming, J., Kirby, C., and Ostdiek, B. *The economic value of volatility timing using realized volatility*. Journal of Financial Economics, (2003)

La prima riga della Tabella 18 illustra la distribuzione dei pesi della strategia di volatility timing originale, ovvero quella in cui la ponderazione del fattore (mercato in questo caso) si basa sulla varianza realizzata del mese precedente ($\frac{1}{RV_t^2}$). Le ultime quattro colonne mostrano rispettivamente la mediana, il 75-esimo, il 90-esimo ed il 99-esimo percentile della distribuzione di W_t : in questo primo caso, ho determinato i valori assunti dai pesi di Mkt attraverso la classica formula dei percentili ($P_k = (n + 1) * k/100$) e riportato gli stessi nella Tabella 18. Per Mkt si hanno rispettivamente 0,92, 1,58, 2,67 e 6,97 e ciò ha come diretta implicazione che la strategia di base fa un uso modesto della leva nella maggior parte dei casi (basti pensare che la mediana è prossima ad uno), ma si ha un sostanziale aumento nella parte alta della distribuzione, quando la varianza realizzata assume valori inferiori. In particolare, si può vedere come al crescere della distribuzione, l'incremento stesso dei pesi è più che proporzionale, passando da un +73% tra P50 e P75 ad un +162% tra P90 e P99. Questo è ovviamente coerente con la metodologia di costruzione del portafoglio, la cui esposizione aumenta al diminuire della volatilità del mese precedente e viceversa e che fa coincidere i momenti di quiete del mercato con quelli di massima leva della strategia.

<i>Pesi e Performance di volatility managed portfolio alternativi</i>						
<i>Distribuzione dei pesi</i>						
<i>Wt</i>	<i>VMP</i>	<i>Alpha</i>	<i>P50</i>	<i>P75</i>	<i>P90</i>	<i>P99</i>
$\frac{c}{RV_t^2}$	Real. Var	4,92 (1,56)	0,92	1,58 +73%	2,67 +68%	6,97 +162%
$\frac{c}{RV_t}$	Real. Vol	3,11 (1,06)	0,62	0,82 +31%	1,06 +29%	1,71 +62%
$\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1)$	No Lev	1,92 (0,81)	0,92	1 +8%	1 +0%	1 +0%
$\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1,5)$	50% Lev	2,31 (0,94)	0,92	1,5 +63%	1,5 0%	1,5 0%

Tabella 18: sono riportati gli alpha e le distribuzioni percentuali dei pesi per 4 tipologie diverse di volatility timing. **Fonte:** Elaborazione personale.

Per validare i risultati, ho seguito l'approccio di Moreira e Muir ed ho utilizzato delle strategie di volatility timing alternative a quella originaria: ho in questo caso elaborato personalmente un peso pari all'inverso della volatilità (non varianza) realizzata (così come avevo illustrato nel paragrafo sui

costi di transazione, riportando però i risultati degli autori), nonché determinato altre due ponderazioni aggiuntive. Quest'ultime non sono altro che quella originale ma vincolate all'utilizzo di leva: in particolare, la prima ($\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1)$) non la ammette proprio, restituendo un valore del peso pari ad 1 qualora il rapporto $\frac{c}{RV_t^2}$ ne sia maggiore; diversamente, la seconda ($\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1,5)$) permette un'esposizione del 50%, consistente con il margine generalmente richiesto dal mercato. Sulla base di questi nuovi pesi mensili, ho calcolato i fattori moltiplicando gli stessi per Mkt per l'intera serie storica e successivamente ho replicato le regressioni singole sui fattori originali al fine di determinare gli alpha delle strategie alternative. I risultati di questi esperimenti sono nella Tabella 18. L'utilizzo della realized volatility anziché variance comporta una riduzione generale nella distribuzione dei pesi, soprattutto del 99-esimo percentile, che assume un valore di 1,71: in questo caso, l'esposizione al rischio durante i periodi di bassa volatilità del mercato è pari ad un quarto della strategia che pondera per la varianza realizzata. Nonostante questo, l'alpha della regressione risulta essere positivo (3,11) nonché strettamente significativo. Allo stesso modo è possibile commentare i risultati dei portafogli originali con vincoli di leva, per i quali la distribuzione dei pesi segue i *constraints* imposti, mentre gli alpha delle regressioni, sebbene inferiori a quelli senza limiti di indebitamento, sono sia positivi che statisticamente significativi.

Prima di giungere alle conclusioni teoriche di questo test, voglio descrivere delle ulteriori analisi degli autori dell'articolo. Arrivati a questo punto, Moreira e Muir¹², sostenendo che lo Sharpe ratio non risulta essere una buona misura per valutare i guadagni di utilità in presenza di un vincolo di leva, si apprestano a descrivere la seguente figura:

¹² *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

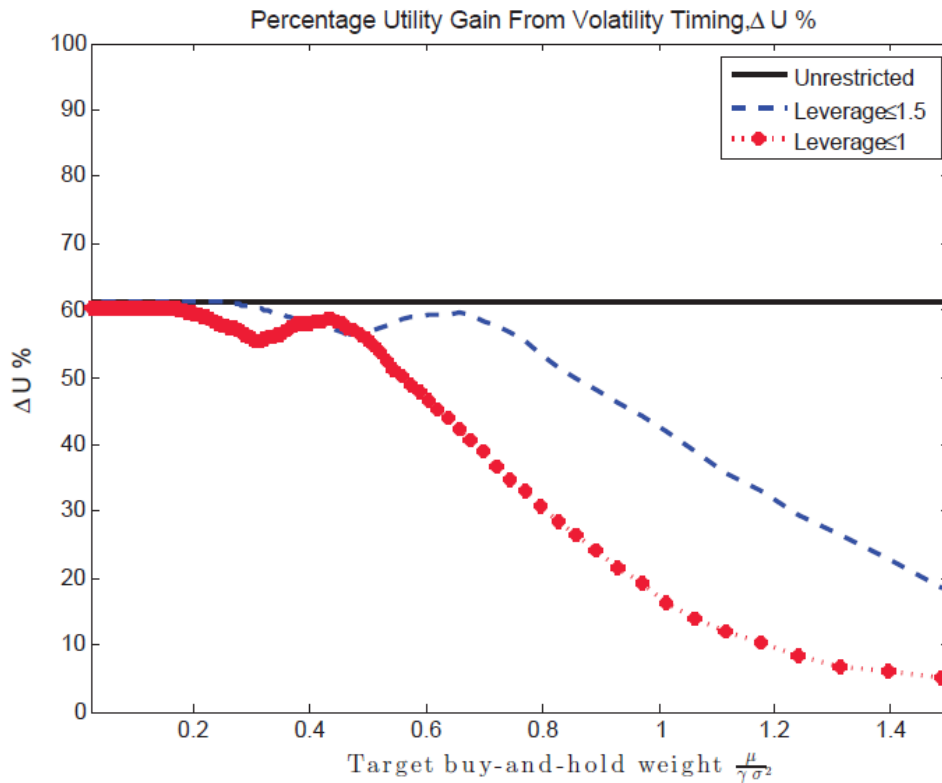


Figura 7: La linea nera rappresenta il guadagno di utilità per un investitore senza vincoli di leva del portafoglio a volatilità gestita. La linea rossa e blu rappresentano tali guadagni nel caso venga imposto un limite rispettivamente pari a 1 e 1,5.
Fonte: Volatility Managed Portfolio, Moreira e Muir 2017.

Nella Figura 7 viene computato e rappresentato il guadagno di utilità per un investitore media-varianza. Nel grafico vengono quindi plottate le percentuali di guadagno di utilità $\Delta U\%$ per un soggetto con differenti livelli di avversione al rischio e vincoli di leva che passa da una strategia buy-and-hold and una di volatility timing del fattore Mkt. Più in particolare, la funzione di utilità utilizzata è uguale a:

$$(29) U = E[w_t R_{t+1}] - \frac{1}{2} \gamma \text{var}(w_t R_{t+1})$$

Per un individuo che segue una strategia buy-and-hold, i pesi risultano essere costanti e funzione della sua avversione al rischio. In formule avremo:

$$(30) w = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{\sigma^2}$$

A questo si aggiunge un investitore che segue il timing della volatilità e aggiusta conseguentemente la sua esposizione in base alla variazione della stessa nel mese precedente. Avremo quindi:

$$(31) w_t = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{\sigma_t^2}$$

In entrambi i casi, $1 - w_t$ è costituito dall'asset risk free. Per ogni grado di avversione al rischio, denotata da γ , Moreira e Muir calcolano i pesi e valutano il guadagno di utilità: l'asse delle ascisse della Figura 7 illustra infatti il peso w della strategia buy-and-hold al variare dell'avversione al rischio e rappresenta quindi il peso non condizionato nell'asset rischioso.

La linea spessa della Figura 7 indica un incremento di utilità pari circa al 60% per un investitore *unconstrained* che detiene il portafoglio a volatilità gestita del fattore mercato. In assenza di vincoli infatti, il guadagno di utilità è pari $\Delta U\% = \frac{U(w_t)}{U(w)} - 1$ ed è indipendente dal livello di avversione al rischio. Questo risultato è altresì coerente con la Tabella 7, nella quale avevo stimato un ammontare prossimo al 62%.

Successivamente gli autori impongono un vincolo sulla leva finanziaria analogo a quello della Tabella 18, sia ai pesi del portafoglio buy-and-hold che a quello volatility managed, rispettivamente pari ad 1 ed 1,5. Per un investitore con una elevata avversione al rischio (γ elevato) questi limiti sono sostanzialmente non vincolanti ed il guadagno di utilità del volatility timing rimane prettamente inalterato. Al diminuire della stessa avversione, aumenta conseguentemente l'esposizione fino a "toccare" il vincolo imposto. Estremizzata la situazione, un investitore che sia neutrale al rischio ($\gamma = 0$) desidererà una infinita esposizione al rischio e quindi non farà volatility timing in quanto w_t sarà sempre superiore al limite determinato. Inoltre, la precedente figura mostra che un investitore la cui esposizione al rischio è il 100% in azioni (ovvero con $\gamma \cong 2.2$) e che ha un vincolo di leva del 50%, avrà un aumento dell'utilità di circa il 45% rispetto alla classica strategia buy-and-hold. Diversamente, un individuo che segue una allocazione 60/40 in completa assenza di leva avrà un beneficio del 50%. Questi risultati suggeriscono l'ottimo funzionamento dei volatility managed portfolios anche in presenza di *leverage constraints*

Moreira e Muir portano avanti l'analisi seguendo la linea teorica delle anomalie cross sezionali. Per un investitore che è abbastanza avverso al rischio, la strategia base dei portafogli a volatilità gestita necessita di un modo per raggiungere una elevata esposizione al rischio quando la volatilità è sufficientemente bassa. Per tener conto che l'utilizzo di una elevata leva possa essere costoso o irrealizzabile, viene implementato un approccio usando le opzioni sullo S&P 500. Certamente ci possono essere diversi modi per raggiungere un beta maggiore di 1 e l'utilizzo delle opzioni è soltanto

un esempio: in questo caso gli autori utilizzano il portafoglio costruito da Constantinides, Jackwerth e Savov nell'articolo *The puzzle of index option returns* (2013)¹³, focalizzandosi nelle opzioni in the money con scadenza tra i 60 ed i 90 giorni il cui beta di mercato è circa pari a 7. Ogniqualevolta la strategia richiede l'utilizzo di leva (per costruzione durante i periodi di bassa volatilità), sarà utilizzato il portafoglio di opzioni per raggiungere l'esposizione al rischio desiderata. Riporto la tabella frutto dello studio di Moreira e Muir:

	Buy and Hold	Vol Timing	Vol Timing With Embedded Leverage	
			Calls	Calls + Puts
Sharpe Ratio	0.39	0.59	0.54	0.60
α	–	4.03	5.90	6.67
s.e.(α)	–	(1.81)	(3.01)	(2.86)
β	–	0.53	0.59	0.59
Appraisal Ratio	–	0.44	0.39	0.46

Tabella 19: Utilizzo delle opzioni per raggiungere la desiderata esposizione al rischio. Il database si estende dal 1986 al 2012.

Fonte: *Volatility Managed Portfolio*, Moreira e Muir 2016.

Nella Tabella 19 viene comparata la strategia implementata con le opzioni con quella utilizzando la leva finanziaria. Gli alpha sono molto simili, il che suggerisce come i risultati dei volatility managed portfolio siano indipendenti dai vincoli di leva anche per investitori con bassa avversione al rischio. Concludo il paragrafo completando quanto accennato ad inizio ed alla luce dei nuovi risultati: ho spiegato come sia nel portafoglio BAB che in quello risk parity, i vincoli all'utilizzo della leva finanziaria comportino un maggiore rendimento aggiustato per il rischio dei *low-beta* e *low-risk* assets rispetto a quanto predetto dal modello CAMP. In sostanza, Black (1972)¹⁴, Black, Jensen¹⁵ e Scholes (1972) ed i prima citati Frazzini e Pedersen (2014) dimostrano come i *leverage constraints* possano distorcere il trade-off rischio rendimento nei dati cross-section. Se questo approccio viene traslato ai volatility managed portfolio, si è portati a credere che i periodi di bassa volatilità siano analoghi a titoli dal basso beta (o basso rendimento) e di conseguenza abbiano rendimenti attesi elevati rispetto alla volontà degli investitori di assumere rischio: mentre a livello teorico i vincoli di leva potrebbero spiegare ex-ante i risultati, si è dimostrato come gli investitori possano beneficiare del timing della

¹³ Constantinides, Jackwerth, Savov, A. *The puzzle of index option returns*. Review of Asset Pricing Studies (2013).

¹⁴ Black, F. *Capital market equilibrium with restricted borrowing*. The Journal of Business (1972)

¹⁵ Jensen, Black, Scholes. *The capital asset pricing model: Some empirical tests*. (1972)

volatilità anche sotto stringenti *leverage constraints*: vincoli non sembrano quindi essere una valida spiegazione ex-post. Nonostante questo, i risultati sia sulla leva che sui costi di transazione suggeriscono che la strategia possa essere implementata con successo nella realtà.

2.3.5 Co movimenti della volatilità

L'ultimo test che ho effettuato sui volatility managed portfolio risponde alla domanda se i risultati precedentemente analizzati possano essere raggiunti mediante l'utilizzo di un fattore comune di volatilità. Il mio esperimento si differenzia leggermente da quello degli autori, ma segue comunque una loro indicazione data in calce. La Figura 1 aveva messo in luce la tendenza della realized volatility a seguire un ciclo comune per tutti i fattori analizzati, e ciò era intuibile dai co-movimenti della stessa nel plot della serie storica. L'idea di base è che, se i fattori vengono ponderati per un fattore comune di volatilità, gli output non dovrebbero variare drasticamente.

<i>Regressioni con volatilità comune</i>						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ
Alpha	4,92	1,53	3,61	8,72	-0,24	0,33
S.E.	1,68	1,09	1,16	1,96	1,09	0,66
N	1087	1087	1087	1082	644	644
R²	0,37	0,34	0,28	0,27	0,31	0,32
RMSE	51,1	31,1	35,6	48,6	22,2	19,8

Tabella 19: Risultati delle regressioni specificate nella Tabella 3 ponderando ciascun fattore per la volatilità realizzata di Mkt. **Fonte:** Elaborazione personale.

A tal fine, Moreira e Muir computano il componente principale della realized variance e normalizzano ciascun fattore per questo ammontare ($\frac{1}{RV_t^{PC}}$); diversamente, io ho ponderato le variabili per la già calcolata varianza realizzata del fattore Mkt, vista la sua possibile interpretazione come misura di rischio comune. I risultati della Tabella 20 mostrano come gli alpha siano leggermente inferiori rispetto a quelli originali della Tabella 3, ma al contempo rimanga praticamente inalterata sia la positività degli stessi, sia la loro significatività. Nella maggior parte dei casi, il timing attraverso una volatilità comune lascia sostanzialmente immutati gli ottimi risultati prima determinati. Gli autori inoltre aggiungono: “*The strong co-movement among equities validates our approach, where we*

*impose a constant weight across portfolios to construct the MVE portfolio*¹⁶.” (il forte movimento tra le azioni valida il nostro approccio, ovvero l'imposizione di pesi costanti tra i portafogli per costruire quello MVE).

Questa ultima analisi conclude il secondo capitolo dell'elaborato: dopo aver illustrato la costruzione del portafoglio a volatilità gestita ed averlo sottoposto ad esperimenti che testassero le sue performance sotto condizioni sempre più vicine alle realtà di mercato, si è giunti alla conclusione che lo stesso possa essere considerato come una vera e propria opportunità di investimento. Spetta ora al terzo capitolo capire teoricamente il perché funzioni.

¹⁶ *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

Capitolo 3. Interpretazioni Teoriche

Nel precedente capitolo ho avuto modo di replicare passo dopo passo gli esperimenti di Moreira e Muir nelle varie versioni dell'articolo "*Volatility Managed Portfolios*". Sebbene il corpo centrale dell'elaborato sia già stato trattato, nei successivi paragrafi è mia volontà riportare le analisi teoriche degli autori che cercano di dare una spiegazione alla bontà dei risultati del volatility timing. Di conseguenza, il mio apporto empirico è sostanzialmente terminato, ma ho sentito la necessità di completare una panoramica a trecentosessanta gradi di un tema finanziario altamente specifico, ancora mai tradotto in italiano.

3.1 Il timing della volatilità ed il trade-off rischio rendimento

Questo paragrafo può essere considerato come un preambolo ai test strutturali del secondo capitolo: così come in precedenza si è cercato di capire empiricamente se vincoli di leva o costi di transazioni fossero una valida spiegazione dei volatility managed portfolios, in questa sezione viene mostrato come i vantaggi del volatility timing siano strettamente collegati al trade-off rischio rendimento. Per prima cosa, illustrerò come gli alpha siano proporzionali alla covarianza tra la varianza ed il prezzo del rischio dei fattori.

Prendendo una formulazione nel tempo continuo, si consideri un processo di valore totale di un portafoglio R_t , con un rendimento in eccesso pari a μ_t (dove r_t è il tasso istantaneo risk-free) ed una volatilità condizionata uguale a σ_t :

$$(1) dR_t = (r_t + \mu_t)dt + \sigma_t dB_t$$

Esattamente come nel tempo discreto, viene costruita la versione a volatilità gestita del rendimento del portafoglio, con la variabile c che assume ancora la funzione di costante normalizzante.

$$(2) dR_t^\sigma = r_t dt + \frac{c}{\sigma_t^2} (dR_t - r_t dt)$$

L'alpha della regressione rispetto la serie storica del portafoglio a volatilità gestita ed il rendimento in eccesso del portafoglio originale (rispettivamente $dR_t^\sigma - r_t dt$ e $dR_t - r_t dt$) è uguale a:

$$(3) \text{ T.D: } f_t^\sigma = \alpha + \beta f_t + \varepsilon_t$$

$$(4) \text{ T.C: } \alpha = E[dR_t^\sigma - r_t dt]/dt - \beta E[dR_t - r_t dt]/dt.$$

Inoltre, come desumibile dall'equazione (2), esprimiamo nel seguente modo le relazioni esistenti tra le variabili:

$$(5) E[dR_t^\sigma - r_t dt]/dt = cE\left[\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right]$$

$$(6) \beta = \frac{c}{E[\sigma_t^2]}$$

ed infine, la covarianza tra il prezzo del rischio e la varianza è uguale a (ho riportato nell'equazione (7) la classica espressione statistica della covarianza, che viene direttamente applicata per determinare (8)):

$$(7) \text{ Cov}(x, y) = E(x, y) - \mu_x \mu_y$$

$$(8) \text{ Cov}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}, \sigma_t^2\right) = E\left[\frac{\mu_t}{\sigma_t^2} \sigma_t^2\right] - E\left[\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right] E[\sigma_t^2]$$

In questo modo otteniamo una relazione tra l'alpha e la dinamica del prezzo del rischio $\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}$, ovvero

$$(9) \alpha = -\text{cov}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}, \sigma_t^2\right) \frac{c}{E[\sigma_t^2]}$$

In sostanza, l'alpha risulta essere una diretta misura del co movimento tra il prezzo del rischio (il famoso trade-off) e la varianza stessa. Nel caso in cui i rendimenti attesi e la volatilità si muovano insieme, ovvero quando $\mu_t = \gamma \sigma_t^2$ l'alpha assumerà un valore nullo ($\alpha = 0$). Intuitivamente, evitando periodi di alta volatilità si evita al contempo tempo il rischio; ma se il trade-off rischio rendimento è alto, si sacrifica allo stesso modo parte del rendimento atteso, lasciando la strategia di volatility timing con un alpha uguale a zero. Differentemente, quando i rendimenti attesi sono costanti o indipendenti dalla volatilità, la precedente equazione (9) diventa:

$$(10) \alpha = cE\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right) J_\sigma$$

$$(11) J_{\sigma} = \left(E[\sigma_t^2] E\left[\frac{1}{\sigma_t^2}\right] - 1 \right) > 0$$

Dove J_{σ} è un termine di disuguaglianza di Jensen, che incrementa la volatilità della volatilità: questo avviene perché, più varia la volatilità, più varia il premio per il rischio che il portafoglio può catturare. Conseguentemente, l'alpha della strategia aumenta se aumenta la volatilità della volatilità.

L'articolo dei volatility managed portfolio del 2016 approccia a quanto appena trattato in modo diverso, ovvero in termini di modelli condizionati vs incondizionati. Principale fonte di questa metodologia è l'articolo di Jagannathan e Wang "The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns" (1996), che specifica una interpretazione dinamica del CAPM (condizionata appunto) e dimostra la validità del citato modello anche qualora i beta dei titoli varino nel tempo. Secondo tale via, gli alpha condizionati della strategia di volatility timing sono nulli, in quanto non sono altro che una versione "gestita" dei fattori originali. Nello specifico, i volatility managed portfolios sono in una forma del tipo $z_t R_{t+1}$ (con $z_t = 1/\sigma_t^2$) che, per definizione, ha rispetto R_{t+1} un alpha condizionato uguale a zero: ne consegue che $E_t[z_t R_{t+1}] = \beta_t \mu_t$, dove $\beta_t = z_t$ e $\mu_t = E_t[R_{t+1}]$. Prendendo l'aspettativa incondizionata, con β il beta incondizionato e $\beta\mu$ il rendimento atteso implicito nel modello *unconditional*, l'alpha incondizionato sarà uguale a:

$$(12) \alpha = E_t[z_t R_{t+1}] - \beta\mu = (E[\beta_t] - \beta)\mu + cov(\beta_t, \mu_t)$$

dove, se z_t non è correlato con i momenti dei rendimenti, l'alpha sarà uguale a zero. Come è possibile vedere dall'equazione (12), l'alpha viene inoltre scomposto in una componente $E[\beta_t] - \beta$ che cattura l'abilità della strategia di fare *volatility timing* ed una, $cov(\beta_t, \mu_t)$, che coglie i co movimenti con i rendimenti attesi. In linea teorica, il comportamento che porta ad assumere rischio quando la varianza condizionata è bassa comporta che il beta incondizionato sia inferiore a quello medio e conseguentemente il primo termine dell'equazione (12) sia positivo: questa tipologia di volatility timing genera un alpha positivo solo quando la volatilità risulta essere poco correlata con i rendimenti attesi, in modo tale che il secondo termine dell'equazione (12) non compensi la riduzione del rischio incondizionato.

Si considerino ora due casi: nel primo in cui non vi è alcuna relazione nelle serie storiche tra rischio e rendimento, così che la $cov(\beta_t, \mu_t) \approx 0$; nel secondo, tale rapporto è invece altamente forte e $\mu_t = \gamma\sigma_t^2$, ovvero come sarebbe in un modello di equilibrio generale dove un agente detiene il portafoglio di mercato data un'avversione al rischio γ ed un incremento della varianza è proporzionalmente compensato da un aumento del rendimento atteso. In quest'ultimo caso, un investitore manterrebbe un peso costante nell'asset rischioso e non farebbe volatility timing: la strategia pone quindi $z_t =$

$1/\sigma_t^2$ e fa nascere un tradeoff ben specifico. Da una parte, $E[\beta_t] > \beta$ e conseguentemente il primo termine dell'equazione (12) diventa positivo: l'incremento di β_t quando la volatilità è bassa e l'aumento dello stesso quando la volatilità è alta fa diventare il beta medio condizionato maggiore di quello incondizionato. Dall'altra, in una realtà dove il trade-off rischio rendimento è costante, la riduzione del rischio è alle spese di minori rendimenti attesi, in quanto $cov(\beta_t, \mu_t) = cov(1/\sigma_t^2, \mu_t) = \gamma cov(1/\sigma_t^2, \sigma_t^2) = < 0$. Questo porta il secondo termine della (12) a ridurre l'alpha incondizionato. In conclusione, se il tradeoff rischio rendimento è forte, non vi sarà beneficio dal volatility timing.

Quando la covarianza tra β_t e μ_t è nulla e non vi è alcuna relazione tra rischio e rendimento, l'equazione (12) si riduce a $\alpha = (E[\beta_t] - \beta)\mu$. In altre parole, l'alpha incondizionato deriva completamente dal timing della volatilità, che implica un aumento dell'esposizione al rischio quando la volatilità è bassa ed il tradeoff rischio rendimento è favorevole (e viceversa). Moreira e Muir stimano che la differenza tra il beta medio condizionato ed il beta incondizionato sia pari a $E[\beta_t] - \beta = 0,6$: questo spread cattura quanto la strategia possa fare volatility timing, e maggiore è la volatilità che il modello per la volatilità attesa riesce a predire ($E[\beta_t]$), maggiore sarà questo differenziale. Dato il rendimento medio del mercato $\mu = 0,08$, la formula (12) restituisce un alpha pari a 4,8%. La stima empirica degli autori per l'alpha della regressione del fattore mercato gestito su quello originale era uguale a 4,86% (a differenza della mia pari a 4,92%) e molto simile al 4,8% prima determinato: questo dimostra come i risultati del secondo capitolo sia consistenti con una mancanza di tradeoff rischio rendimento nei dati utilizzati. In sostanza, l'equazione (12) implica che la condizione necessaria affinché l'alpha della strategia dei volatility managed portfolios sia positivo è che la relazione tra rischio e rendimento sia sufficientemente debole e non per forza uguale a zero.

I risultati di questo paragrafo hanno quindi illustrato una stretta relazione tra gli alpha di un portafoglio a volatilità gestita e la dinamica del prezzo del rischio per un asset individuale.

3.1.1 La forza del trade-off rischio rendimento

Il precedente paragrafo ha mostrato come l'alpha della strategia dei volatility managed portfolios sia quantitativamente consistente con l'assenza di relazione tra i rendimenti attesi ed il rischio nelle serie storiche. Ripropongo una ulteriore analisi empirica personale che studia direttamente tale rapporto nei dati utilizzati. Così come al secondo capitolo ho analizzato l'interdipendenza tra la volatilità passata e sia la varianza che i rendimenti futuri trattando il dataset in termini cross sezionali (rimando per questo al paragrafo 2.2.1), in questo contesto tornerò a ragionare sulla natura temporale dello stesso e farò utilizzo delle regressioni lineari per quantificare le relazioni.

I primi risultati sono nella seguente Tabella 1, che mettono in luce la persistenza della volatilità nelle variabili: in particolare, ho lanciato una regressione del tipo $RV_t^f = \alpha + RV_{t-1}^f \beta + \varepsilon_t$ della volatilità corrente su quella passata per ogni fattore preso in considerazione; in aggiunta, ho replicato l'analisi anche sul portafoglio MVE formato dai primi tre fattori di Fama e French.

<i>Persistenza della volatilità</i>							
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	RV_t^{Mkt}	RV_t^{SMB}	RV_t^{HML}	RV_t^{Mom}	RV_t^{RMW}	RV_t^{CMA}	RV_t^{MVE}
RV_{t-1}^{Mkt}	0,71 (0,04)						
RV_{t-1}^{SMB}		0,73 (0,05)					
RV_{t-1}^{HML}			0,78 (0,03)				
RV_{t-1}^{Mom}				0,72 (0,05)			
RV_{t-1}^{RMW}					0,81 (0,03)		
RV_{t-1}^{CMA}						0,74 (0,05)	
RV_{t-1}^{MVE}							0,76 (0,04)
Costante	0,24	0,12	0,09	0,15	0,06	0,08	0,13
SE	(0,03)	(0,02)	(0,01)	(0,28)	(0,01)	(0,01)	(0,02)
N	1087	1087	1087	1083	643	643	1087
R²	0,50	0,53	0,61	0,52	0,66	0,56	0,58

Tabella 1: Relazione esistente tra la volatilità realizzata in $t-1$ e quella in t per i fattori analizzati ed il portafoglio MVE. I risultati determinano una forte relazione tra il mese corrente e quello precedente.

Fonte: Elaborazione personale.

La diversa modalità di analisi non scaturisce in un differente risultato rispetto a quello implicito nella Figura 2 del secondo capitolo. Per tutti i fattori analizzati si può notare che il beta della regressione è costantemente positivo e strettamente significativo: questo si traduce in un'ovvia dipendenza della volatilità presente da quella passata, anche nell'ultimo caso del portafoglio MVE.

Successivamente ho studiato il comportamento tra la volatilità realizzata ed i rendimenti futuri (così come nel grafico in alto a sinistra della Figura 2 del secondo capitolo). A tal fine ho lanciato una regressione dei fattori mensili in t sulla volatilità realizzata degli stessi in $t-1$, per capire se l'incremento della volatilità passata predica o meno rendimenti futuri maggiori. La regressione assume la seguente forma $R_t^f = \alpha + RV_{t-1}^f \beta + \varepsilon_t$ ed i risultati sono rappresentati nella Tabella 2:

<i>Tradeoff rischio rendimento per ciascun fattore</i>							
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	R_t^{Mkt}	R_t^{SMB}	R_t^{HML}	R_t^{Mom}	R_t^{RMW}	R_t^{CMA}	R_t^{MVE}
RV_{t-1}^{Mkt}	-0,06 (0,61)						
RV_{t-1}^{SMB}		0,49 (0,41)					
RV_{t-1}^{HML}			0,88 (066)				
RV_{t-1}^{Mom}				-1,52 (0,78)			
RV_{t-1}^{RMW}					1,26 (0,78)		
RV_{t-1}^{CMA}						1,57 (0,72)	
RV_{t-1}^{MVE}							-0,88 (0,41)
N	1087	1087	1087	1082	643	643	1087
R^2	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00

Tabella 2: Relazione esistente tra la volatilità passata ed i rendimenti futuri per i fattori analizzati più il portafoglio MVE. I coefficienti assumono valori non significativi, coerente con l'ipotesi di assenza di relazione.

Fonte: Elaborazione personale.

I coefficienti della Tabella 2 assumono valori positivi e negativi tra i fattori ma, in generale, non risultano essere significativi: di conseguenza, non è possibile determinare alcuna chiara relazione tra la volatilità dei fattori ed i loro rendimenti futuri, esattamente come avevo illustrato nel secondo capitolo. Meccanicamente, questa è la ragione per cui la strategia funziona: come già trattato in precedenza, ma è bene ribadirlo in questo paragrafo, se la volatilità dei fattori è persistente e non predice un aumento dei rendimenti, allora un incremento della volatilità si traduce solamente nel peggioramento del tradeoff rischio rendimento. Questo era rinvenibile nel grafico che mostrava la

dipendenza di $E_t[R_{t+1}]/\sigma_t^2$ dalla volatilità passata (sempre nella Figura 2 del secondo capitolo), suggerendo che un agente ottimizzante dovesse assumere più rischio quando il tradeoff è conveniente, ovvero quando la volatilità è bassa (Low), ed alternativamente ridurne l'esposizione nel caso opposto (High). Intuitivamente, la mancanza di tale tradeoff nei dati sfocia nella profittabilità del timing della volatilità.

Tuttavia, Moreira e Muir sottolineano il fatto che la tematica del tradeoff rischio rendimento sia, nel loro lavoro, diversa da quella trattata nella letteratura economica: non si interrogano infatti sulla relazione positiva o negativa del tradeoff, quanto piuttosto sulla magnitudo della stessa. È la forza di tale rapporto che ha implicazioni qualitative nelle scelte di portafoglio. Anche qualora la relazione sia positiva, per cui ad un aumento del rendimento corrisponda un aumento della volatilità (come detto prima tale ipotesi non è supportata dall'evidenza empirica dei dati utilizzati), il volatility timing continua ad essere vantaggioso se i rendimenti attesi non aumentano "abbastanza" comparati all'incremento della varianza. La strategia dei volatility managed portfolios sfrutta sia questa debole relazione che la grande variazione della volatilità (se infatti il tradeoff fosse "violato", non ci sarebbe un grande beneficio dal volatility timing qualora la volatilità non cambiasse drasticamente nel corso del tempo) e produce degli elevati rendimenti aggiustati per il rischio. Gli alpha positivi, l'incremento degli Sharpe ratio, nonché i benefici di utilità dei portafogli a volatilità gestita aiutano a quantificare *"the failure of the risk return tradeoff in economic terms"*¹⁷.

3.1.2 La dinamica del trade-off rischio rendimento

I volatility managed portfolios sono stati implementati bilanciando i pesi una volta al mese ed eseguendo una regressione a frequenza mensile. Arrivati a questo punto, gli autori si chiedono se questa strategia continui a valere ad intervalli di tempo più brevi. Minore frequenze sono utili per capire completamente la relazione dinamica tra shocks di volatilità, rendimenti attesi ed il prezzo del rischio: in particolare, permettono di riconciliare i risultati con i ben noti studi empirici che i movimenti sia della varianza, sia del rendimento delle azioni, sono controciclici.

Lo strumento utilizzato dagli autori per questa analisi è un VAR (Vector Auto Regressive) a frequenza mensile per i rendimenti attesi e la varianza del portafoglio mercato condizionati: i rendimenti attesi sono creati utilizzando una *forecasting regression* del prossimo mese sui price to earnings ratio (mediante la serie storica dei cyclically-adjusted-price-to-earnings CAPE di Shiller), sul default spread (BaaAaa) e sulla varianza realizzata; la varianza attesa è invece costituita da un modello log-normale ed include tre ritardi della volatilità realizzata del mercato. Successivamente, utilizzano la

¹⁷ *Volatility Managed Portfolios*, Moreira e Muir (2016)

funzione impulso di risposta (Impulse Response Function) per studiare gli effetti sui rendimenti e sulla varianza di uno shock di volatilità: gli autori impongono inoltre una avversione al rischio di poco superiore a due, così che un investitore media varianza detenga in media il portafoglio di mercato (cioè in assenza di movimenti dei rendimenti attesi e della volatilità, il peso $w = 1$). Riporto i risultati nella seguente Figura 1, di diretta estrazione dall'articolo del 2016:

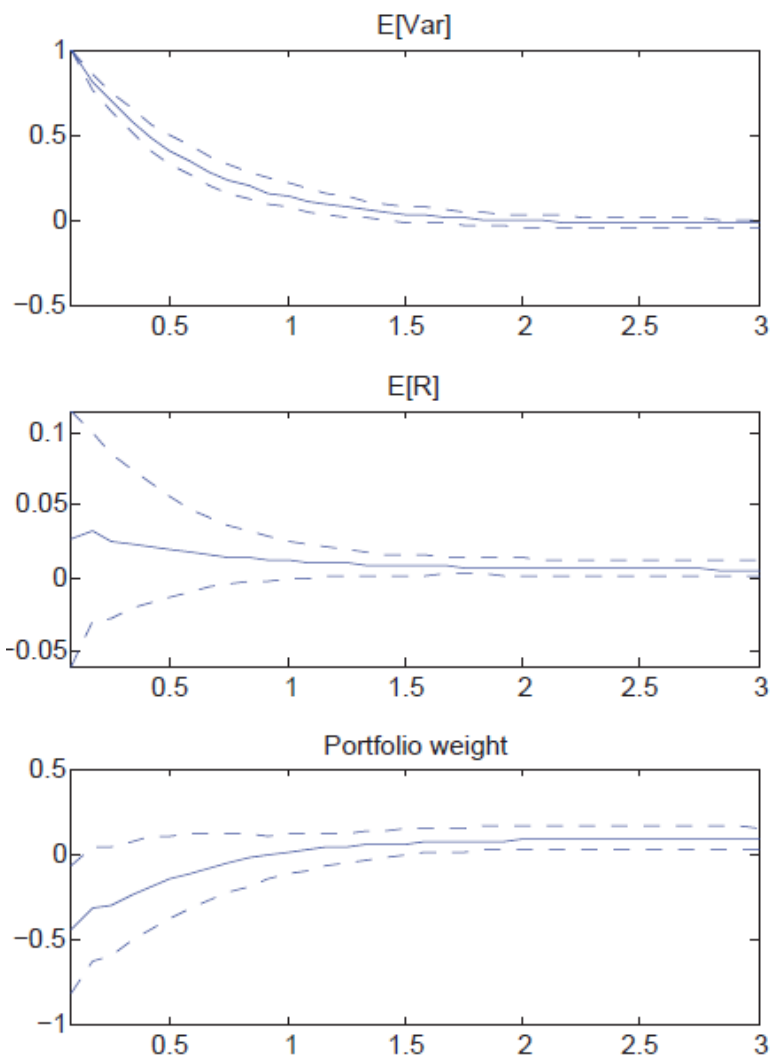


Figura 1: Dinamica del tradeoff rischio-rendimento. La figura mostra l'impulso di risposta della varianza attesa e del rendimento atteso per il portafoglio di mercato a fronte di uno shock della varianza realizzata. Sulle ascisse gli anni.

Fonte: *Volatility Managed Portfolios*, Moreira, Muir 2016

I tre grafici illustrano il comportamento delle variabili nel corso del tempo (l'asse delle ascisse sono anni infatti): mentre i primi due si riferiscono ai rendimenti attesi ed alla varianza, l'ultimo restituisce le implicazioni di portafoglio per un investitore che aggiusta la sua esposizione al rischio

proporzionalmente al rapporto $E_r[R_{t+1}]/var_t[R_{t+1}]$. Dalla Figura 1 è evidente come la varianza risponda allo shock aumentando vertiginosamente, per poi tornare al livello originario dopo poco più di un anno, in coerenza con la caratteristica *mean-reverting* della variabile. I rendimenti attesi invece crescono inizialmente in maniera inferiore, ma rimangono elevati per un periodo più lungo di tempo. Dato un incremento della varianza ma solo un piccolo e persistente aumento dei rendimenti attesi, il pannello inferiore della Figura 1 mostra che è ottimale per un investitore ridurre, in concomitanza dello shock, la sua esposizione del 50% circa: l'andamento della prima citata variabile, ovvero il fatto che i rendimenti attesi non siano aumentati abbastanza rispetto l'incremento della varianza, determina uno sfavorevole tradeoff tra rischio e rendimento, ed il peso del portafoglio rimane inferiore ad uno per circa 12 mesi.

La bassa persistenza dello shock di volatilità implica che il tradeoff inizialmente deteriori, ma gradualmente migliori quando la volatilità svanisce nel post-recessione. Conseguentemente, i precedenti risultati non sono in conflitto con l'evidenza secondo la quale i movimenti della varianza e dei rendimenti attesi delle azioni siano contro ciclici, ovvero che entrambe le grandezze tendano ad essere elevate durante le crisi e minori nei boom economici. Dopo le grandi crisi, come la recente recessione iniziata nell'ottobre del 2008, la strategia dei volatility managed portfolios esce inizialmente dal mercato (vendendo) per evitare il prima citato sfavorevole tradeoff, ma poi cattura, comprando in seguito, la persistenza dell'aumento dei rendimenti attesi quando lo shock svanisce.

Moreira e Muir continuano l'analisi studiando il comportamento della strategia a frequenze inferiori: nello specifico, formano un portafoglio concettualmente uguale a quello del fattore singolo del secondo capitolo (cioè usando i pesi proporzionali alle varianze realizzate mensili), mantenendo però la stessa posizione (o peso) per T periodi prima di bilanciare nuovamente. Definiscono $f_{t \rightarrow t+T}$ come un fattore cumulato di rendimenti, consistente con la sommatoria dei rendimenti che vanno dalla fine del mese t a $t+T$. Si avrà una regressione del tipo:

$$(13) \frac{c}{RV_t^2(f_{t+1})} f_{t \rightarrow t+T} = \alpha + \beta f_{t \rightarrow t+T} + \varepsilon_{t+T}$$

A questo punto, studiano il comportamento degli alpha e degli appraisal ratio sia per il fattore mercato che per il portafoglio MVE (Fama e French 3 e Fama e French 3 più momentum) al variare del periodo di bilanciamento e rappresentano graficamente i risultati nella successiva Figura 2.

Gli alpha, nonostante siano statisticamente significativi per lunghi periodi (T), perdono gradualmente di intensità. Ad esempio, per il portafoglio di mercato, gli alpha sono statisticamente diversi da zero (con un intervallo di confidenza del 10%) per più di 18 mesi. Lo stesso trend è riscontrato per i due portafogli MVE. Da notare che per un periodo di ribilanciamento nullo, i risultati coincidono con

quelli del secondo capitolo: basta vedere l'alpha e l'appraisal ratio del portafoglio di mercato nella Figura 2 che sono uguali, per $T=0$, rispettivamente a 4,9 e 0,33 circa.

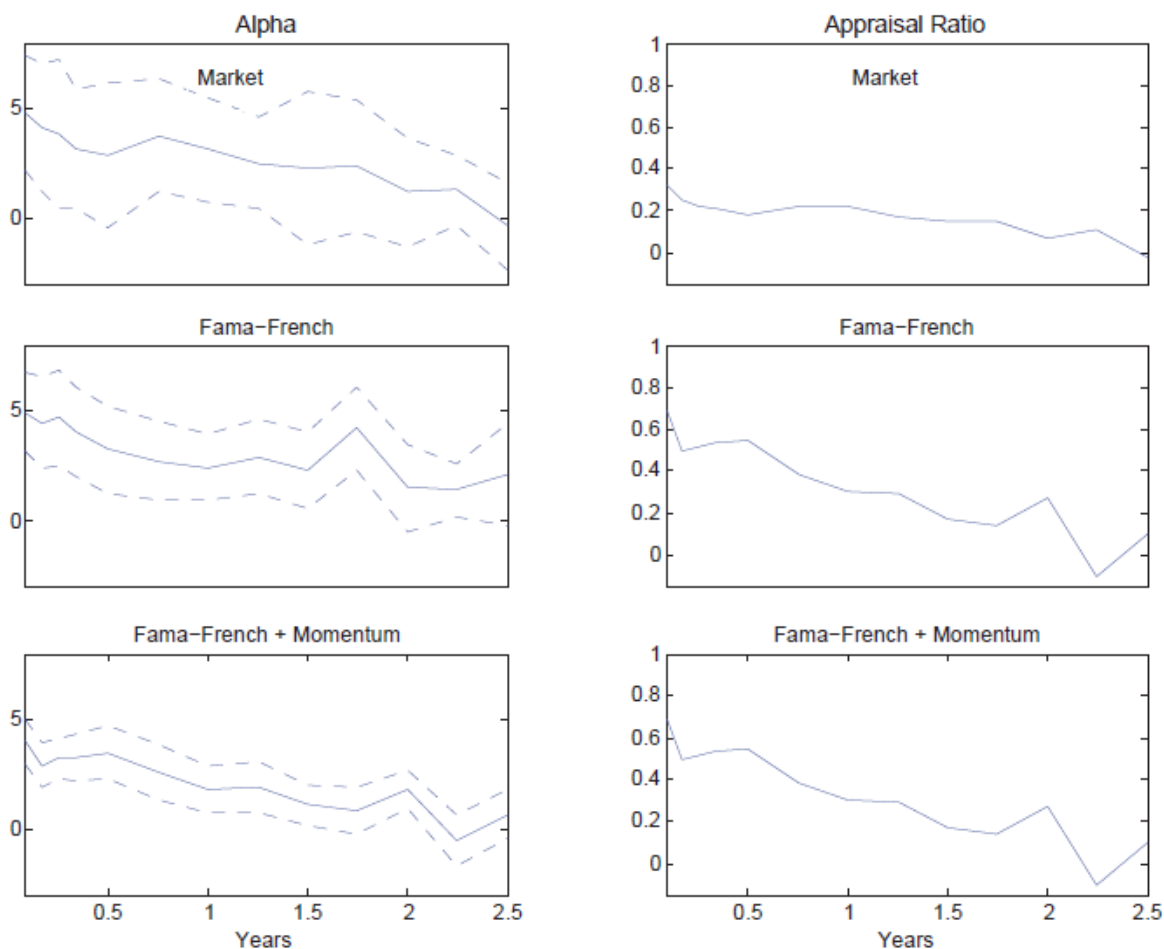


Figura 2: Risultati negli alpha e negli appraisal ratio al variare del periodo di ribilanciamento nell'asse dell'ascisse. Tutti i valori sono annualizzati. Viene incluso un intervallo di confidenza al 90%.

Fonte: *Volatility Managed Portfolios*, Moreira, Muir 2016,

A conclusione di questo paragrafo, è evidente come i risultati degli alpha mensili del secondo capitolo siano simili a quelli di lungo periodo impliciti nella Figura 2. Questo ha come diretta conseguenza che, come dimostrato nella prima parte del paragrafo 3.1, vi sia una relazione negativa anche a più basse frequenze tra varianza e prezzo del rischio.

3.2 Implicazioni nelle scelte di portafoglio

La mia descrizione procede seguendo l'impostazione espositiva dell'articolo Volatility Managed Portfolio del 2016: in questo paragrafo riporterò quindi le implicazioni teoriche delle scelte di investimento derivanti dall'analisi empirica precedentemente effettuata. Ribadisco in questo frangente che la successiva (e precedente) opera di interpretazione e sviluppo teorico è da attribuire unicamente a Moreira e Muir: conseguentemente procederò illustrando come gli stessi abbiano dapprima calcolato e confrontato i guadagni di utilità derivanti dal timing dei rendimenti e della volatilità in termini analitici, per poi studiare successivamente il comportamento allocativo di un investitore di lungo periodo.

3.2.1 Expected return e volatility timing a confronto

Al fine di effettuare un confronto teorico tra il timing dei rendimenti e della volatilità, Moreira e Muir si soffermano su un problema di allocazione finanziaria di un portafoglio composto da un asset rischioso ed uno *risk free*: i successivi risultati non sono altro che una estensione diretta dei portafogli MVE determinati al paragrafo 2.2.2 del secondo capitolo (nella Tabella 12).

Gli autori approcciano alla stima dei benefici del timing della volatilità e dei rendimenti utilizzando un semplice modello media-varianza di preferenze dell'investitore: il loro scopo è quello di evidenziare "in formule", attraverso l'esplicitazione di una differenza di utilità, il vantaggio di una tipologia di investimento sull'altra. Come ho già più volte ripetuto, un investitore media varianza alloca le risorse, ed in particolare l'esposizione al rischio, in base al tradeoff rappresentabile dal seguente rapporto: $E_t[R_{t+1}]/Var_t[R_{t+1}]$. Siccome l'investimento si basa sull'attrattività del precedente rapporto, ciò ha come prima implicazione il fatto che un agente ottimizzante debba assumere più rischio quando il tradeoff è conveniente, ovvero quando la volatilità è bassa, ed alternativamente ridurne l'esposizione nel caso opposto. Specificatamente, il rendimento medio per unità di varianza rappresenta l'esposizione ottimale dell'investitore media-varianza, se non anche l'implicita avversione al rischio, γ_t , da una prospettiva generale di equilibrio: risulta essere infatti quell'ammontare necessario a soddisfare la relazione $E_t[R_{t+1}] = \gamma_t \sigma_t^2$.

Ribaditi i concetti cardine trattati nel secondo capitolo, inizio col descrivere il timing dei rendimenti attesi per poi passare a quello della volatilità. In entrambi i casi, la base di partenza è un processo dei rendimenti in eccesso uguale a:

$$(14) r_{t+1} = \mu + x_t + \sqrt{Y_t} e_{t+1}$$

dove $E[x_t] = E[e_t] = 0$ e x_t, e_{t+1} sono tra di loro indipendenti e di conseguenza, $E(r_{t+1}) = \mu$. L'allocazione di un investitore media-varianza che segue una strategia di timing dei rendimenti attesi nell'asset rischioso sarà uguale alle seguenti equazioni (considerando che $1-w$ non è altro che l'asset risk free):

$$(15) w = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{E[Y_t] + \sigma_x^2}$$

$$(16) w(x_t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu + x_t}{E[Y_t]}$$

La differenza tra le due è da ritrovarsi nel fatto che l'equazione (15) non fa uso di informazioni condizionate, mentre la (16) utilizza informazioni sulla media condizionata ma non tiene conto delle fluttuazioni della volatilità: in altre parole la (15) è il benchmark di riferimento per confrontare i guadagni di utilità dell'approccio al timing dei rendimenti (adesso rinvenibile nella (16)) con quello della volatilità (che tra poco esplicherò). Arrivati a questo punto, al fine di determinare i rendimenti attesi dei portafogli, basterà moltiplicare il processo (14) per i pesi (15) e (16):

$$(17) E[wr_{t+1}] = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu^2}{E[Y_t] + \sigma_x^2} = \frac{1}{\gamma} S^2$$

$$(18) E[w(x_t)r_{t+1}] = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu + \sigma_x^2}{E[Y_t]} = \frac{1}{\gamma} \frac{(S^2 + R_r^2)}{1 - R_r^2}$$

Negli ultimi elementi dell'equazioni (17) e (18), S può essere interpretato come lo Sharpe ratio non condizionato dei portafogli ($S = \frac{\mu}{\sqrt{E[Y_t] + \sigma_x^2}}$), mentre R_r^2 è la porzione della variazione dei rendimenti catturata dal segnale *forecasting* x (alternativamente può essere visto come l'R quadro di una regressione della prevedibilità dei rendimenti). L'incremento nei rendimenti attesi derivante dal timing, e quindi la differenza tra l'equazione (17) e (18), è funzione crescente della previsione dei rendimenti stessi ed assume l'inesistenza di un tradeoff tra rischio e rendimento. In formule, tale delta è esprimibile come:

$$(19) \frac{1 + S^2}{S^2} \frac{R_r^2}{1 - R_r^2}$$

La stessa formulazione era stata utilizzata da Campbell e Thompson nell'articolo "*Predicting Excess Stock Returns Out of Sample*" pubblicato nel *Review of Financial Studies* nel 2008. Così come anticipato nel paragrafo 2.2.2 del secondo capitolo, gli autori appena citati mostrano che un investitore media varianza esibisce un incremento dei rendimenti attesi (o dell'utilità per come l'avevo considerata nel secondo capitolo) di circa il 35% derivante dall'utilizzo di variabili condizionate note. Moreira e Muir estendono le computazioni teoriche di Campbell e Thompson (2008) al fine di valutare il valore aggiunto del timing della volatilità. Basandosi sui risultati empirici del secondo capitolo ed aggiungendo unicamente un segnale di volatilità, continuano ad assumere, a fronte di quanto spiegato nei precedenti paragrafi, che non ci sia un tradeoff rischio rendimento nelle serie storiche. In particolare, il processo della varianza è di tipo log-normale $Y_t = e^{y_t}$ con $y_t = \hat{y}_t + u_y$ e dove \hat{y}_t è la componente prevedibile della volatilità delle azioni di mercato. In questo modo si possono determinare un peso ottimale ed un rendimento atteso uguale alle equazioni (20) e (21), equivalenti alle (16) e (18) per il timing della volatilità:

$$(20) w(y_t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{e^{2(\hat{y} + \sigma_u^2)}}$$

$$(21) E[w(y_t)r_{t+1}] = \frac{1}{\gamma} S^2 e^{Var(\hat{y}_t)}$$

Inoltre l'equazione (21) può essere riscritta come funzione dell'R quadro della regressione della varianza realizzata futura sul segnale \hat{y} , $E[w(y_t)r_{t+1}] = \frac{1}{\gamma} S^2 e^{R_y^2 Var(y_t)}$. Conseguentemente, l'incremento nei rendimenti attesi del timing della volatilità è esprimibile come differenza tra la (21) e (17), perciò uguale a $e^{R_y^2 Var(y_t)}$. Quest'ultima equazione permette di calcolare rapidamente il guadagno di utilità in base alla conoscenza dei parametri R_y^2 e $Var(y_t)$ del campione: Moreira e Muir stimano che la varianza totale (1926-2015) della varianza mensile log-normale realizzata è pari a 1.06 mentre $R_y^2 = 38\%$, ovvero l' R^2 di un semplice modello che utilizza la *lagged variance* per prevedere quella futura. Inserendo tali valori si scopre che il timing della volatilità implica un incremento proporzionale nei rendimenti attesi rispetto alla strategia non condizionata del $e^{0.38 \cdot 1.06} = 50\%$ circa. Questo risultato è inoltre migliorabile in base ai modelli previsionali utilizzati per determinare la volatilità futura: l'incremento dei rendimenti attesi è infatti direttamente proporzionale all'aumento

dell' R^2 . Ad esempio, gli autori stimano che attraverso un modello che tenga conto della caratteristica *mean reverting* ed utilizzi la *lagged variance* realizzata per costruire una previsione OLS (in altre parole un modello AR(1) per la varianza) si raggiunga un $R_y^2 = 53\%$, determinando un aumento del 75% circa nei rendimenti attesi.

In sostanza, le analisi appena effettuate mostrano come le strategie che seguono il timing della volatilità evidenzino degli incrementi nei rendimenti attesi (o dell'utilità) maggiori di quelle basate sulle previsioni della media condizionata. Un semplice calcolo, affermano gli autori, mostra come il potere previsionale del portafoglio di mercato debba avere un R-quadro superiore all'1% mensile per sopra-performare l'approccio di *volatility timing*: tuttavia, tale valore è sostanzialmente superiore a quello documentato dalla letteratura economica sulla prevedibilità dei rendimenti. Inoltre, anche qualora sia possibile prevedere per alcune variabili un rendimento atteso condizionato al di sopra di questa soglia, non è detto che gli investitori dispongano di sufficiente preparazione finanziaria per accedere a questi fattori. Al contrario, le informazioni sulla volatilità sono maggiormente disponibili ed anche un investitore *naive* che approssimi la volatilità del mese successivo a quella realizzata del mese precedente (come d'altronde ho operato nel secondo capitolo) avrà un guadagno di utilità maggiore rispetto ad un agente che segue una strategia di *timing* dei rendimenti.

Infine, bisogna sottolineare come il timing della volatilità sia stato implementato con successo, oltre che per il fattore Mkt (mercato), per almeno altri cinque fattori (HML, Mom, RMW, CMA, BAB): Moreira e Muir aggiungono che le previsioni delle varianze condizionate dei vari fattori con un modello AR(1) siano molto affini tra di loro, restituendo inoltre degli R-quadro mensili di circa il 50%-60%. Differentemente, non è detto che le variabili che aiutino a prevedere il rendimento medio del portafoglio aggregato di mercato possano essere applicate anche agli altri fattori: conseguentemente, sarebbe necessario individuare degli ulteriori segnali predittivi dei rendimenti che siano appropriati ai restanti fattori. Il timing della volatilità è in sostanza facilmente replicabile tra i fattori in quanto i ritardi della loro varianza (i così detti *lags*) sono una accurata ed attendibile metodologia per stimare la varianza attesa condizionata tra le variabili.

3.2.2 *Il volatility timing per un investitore di lungo periodo*

Mi appresto ora a descrivere il paragrafo più quantitativo dell'articolo "Volatility Managed Portfolios" (2015, 2016), e lo faccio prescindendo da una meticolosa spiegazione matematica del contenuto (che va forse oltre lo scopo del mio elaborato), ma cercando di cogliere i fondamenti teorici e concreti del lavoro degli autori. Dopo aver confrontato la strategia di *volatility timing* con quella degli *expected return timing*, Moreira e Muir si accingono quindi a studiare il problema di allocazione

delle risorse di un investitore di lungo periodo e di quanto lo stesso debba aggiustare la sua posizione a fronte dei cambiamenti di breve termine nella volatilità. Questa analisi è di fondamentale importanza per interpretare i risultati dei *volatility managed portfolios*, in quanto una parte dei rendimenti segue un comportamento *mean-reverting*, ovvero quella caratteristica che fa coincidere ad un basso rendimento dell'azione oggi, una parziale compensazione dello stesso domani. Qualora la porzione della variazione dei rendimenti di un titolo sia fortemente dovuta alla parte transitoria (*mean-reverting* appunto), un investitore con un orizzonte temporale di un giorno considererebbe tale azione fortemente rischiosa, mentre un agente con un orizzonte di due giorni la percepirebbe come perfettamente sicura. Differentemente, se i rendimenti sono temporalmente indipendenti, così che una realizzazione negativa oggi non fornisce alcuna informazione su quanto accadrà domani, allora l'orizzonte di investimento non avrebbe alcuna importanza. Questi risultati sono alla base dell'evidenza empirica del lavoro di Campbell e Shiller nell'articolo *Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends* pubblicato nel *The Journal of Finance* (1988), secondo cui i movimenti dei rendimenti (ovvero le fluttuazioni della volatilità) hanno entrambe le componenti, quella transitoria (*mean-reverting*) e quella permanente. Mentre un investitore di breve periodo è indifferente e risponde in maniera uniforme ai cambiamenti della volatilità, la tipologia della stessa importa considerevolmente per un agente di lungo periodo: se l'incremento della volatilità è causato dall'aumento della componente permanente dei rendimenti, l'investitore di lungo periodo risponderà in maniera più aggressiva rispetto a quello di breve periodo; ma qualora l'aumento sia invece dovuto alla porzione *mean-reverting*, l'investitore di lungo periodo percepirà tale shock come transitorio e conseguentemente meno rischioso. Questi elementi empirici, ed in particolare il fatto che una buona frazione della variazione dei rendimenti sia transitoria, hanno come diretta conseguenza che gli shocks di breve periodo della volatilità possano non essere una buona misura del rischio di un investitore di lungo periodo.

Seguendo la terminologia di Merton nel celebre articolo *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (Econometrica, 1973), il portafoglio ottimo di un investitore di lungo periodo è la somma di una domanda miopica (*Myopic demand*), cioè quella richiesta da un investitore di breve periodo, ed una di copertura (*Hedging demand*), ovvero quella che deriva dalla correlazione dei rendimenti con i cambiamenti nelle opportunità di investimento. Specificatamente, nel caso in cui i rendimenti siano *mean-reverting*, l'*hedging demand* porterà l'investitore di lungo periodo ad allocare maggiormente le proprie risorse nei portafogli volatili rispetto a quello di breve periodo, in quanto tale caratteristica rende il titolo meno volatile nel lungo periodo (come esplicitato in precedenza). Tuttavia, un incremento nella volatilità potrebbe determinare un aumento della *hedging demand* tale da compensare la riduzione dell'esposizione nel portafoglio dovuta alla domanda miopica: in questa

eventualità, l'investitore di lungo periodo potrebbe semplicemente ignorare la variazione nel tempo della volatilità, in accordo con l'articolo di Cochrane *"Is Now the Time to Buy Stocks"* pubblicato nel *The Wall Street Journal* nel novembre del 2008. Riporto un estratto del citato articolo per una migliore comprensione: *"And what about volatility? (...) if you were happy with a 50/50 portfolio with an expected return of 7% and 15% volatility, 50% volatility means you should hold only 4.5% of your portfolio in stocks! (...) expected returns would need to rise from 7% per year to 78% per year to justify a 50/50 allocation with 50% volatility. (...) The answer to this paradox is that the standard formula is wrong. (...) Stocks act like long-term bonds, when prices decline and dividend yields rise, subsequent returns rise as well. (...) If bond prices go down more, bond yields and long-run returns will rise just enough that you face no long-run risk. (...) the same logic explains why you can ignore "short-run" volatility in stock markets."* ("E per quanto riguarda la volatilità? (...) se sei felice con un portafoglio 50/50 con un rendimento atteso del 7% ed una standard deviation del 15%, una volatilità del 50% implicherebbe una allocazione di solo 4.5% nelle azioni! (...) i rendimenti attesi dovrebbe incrementare fino al 78% l'anno per giustificare tale allocazione 50/50 con 50% di volatilità. (...) La risposta a questo paradosso è che la formula è sbagliata. (...). Le azioni si comportano come una obbligazione di lunga scadenza, quando i prezzi scendono ed il dividend yield cresce, i rendimenti stessi aumentano. (...) Se il prezzo scende ancora, il bond yields ed il rendimento di lungo periodo cresceranno abbastanza per non far correre alcun rischio di lungo periodo. (...) per lo stesso motivo, si possono ignorare shock di breve termine nella volatilità delle azioni di mercato").¹⁸ Alla luce di queste considerazioni, è necessario approfondire le scelte di portafoglio di lungo periodo al fine di tenere conto dell'*hedging demand*.

Moreira e Muir risolvono un problema di allocazione di portafoglio in un contesto stocastico caratterizzato da: a) variazione nella volatilità; b) variazione nei rendimenti attesi (*mean-reversion*); c) debole relazione nelle serie storiche tra rendimento atteso e volatilità e d) variazione nella parte *mean-reverting* dei rendimenti (ovvero la variazione nella frazione della volatilità dovuta a shock *mean-reverting*). Questi elementi, considerati insieme, contribuiscono a convalidare gli esperimenti empirici mostrati nel secondo capitolo: in particolare, a) e c) sono le caratteristiche implicite nelle serie storiche utilizzate e b) aiuta a capire se la presenza di una evoluzione *mean-reverting* nei rendimenti cambi le scelte di un investitore di lungo periodo. Infine d) permette di considerare l'eventualità che un aumento della volatilità sia associato ad un incremento più che proporzionale della parte *mean-reverting* dei rendimenti. Questa ultima caratteristica è fondamentale per catturare appieno il consiglio di Cochrane nell'autunno del 2008, in quanto, come spiegherò meglio tra poco,

¹⁸ Cochrane, J. H. *Is now the time to buy stocks?* The Wall Street Journal, 12 novembre 2008.

l'orizzonte temporale impatta le scelte di un investitore a shock nella volatilità solo se l'ammontare di *mean-reversion* nel rendimento dell'azione non varia proporzionalmente con la volatilità stessa. Gli autori assumono quindi un portafoglio composto da una obbligazione priva di rischio che restituisce un tasso costante rdt e da un asset rischioso S_t , il cui processo dinamico è dato da:

$$(22) \frac{dS_t}{S_t} = (r + x_t)dt + D\sqrt{y_t}bB_t + FdZ_t$$

dove appunto S_t è il valore totale del portafoglio completamente costituito dall'asset rischioso e dal reinvestimento dei suoi dividendi, x_t è uno scalare che guida il rendimento atteso in eccesso del titolo e y_t uno scalare che determina il rendimento della volatilità. Gli shocks bB_t e dZ_t sono dei moti Browniani indipendenti ed a tre dimensioni, dove ciascuna riga coglie rispettivamente gli shocks dei rendimenti realizzati, rendimenti attesi e volatilità: la presenza di due differenti moti Browniani permette una variazione non proporzionale degli shocks *mean-reverting* nella volatilità. Infine i vettori di esposizione del rendimento D e F sono scelti in modo tale che ci siano due tipologie di shocks che impattino sui rendimenti: in primis quelli permanenti, incorrelati con i rendimenti attesi futuri; successivamente quelli *mean-reverting*, che invece ne risultano essere correlati, ma in modo tale che il valore di S_t di lungo periodo resti immutato. Questi ultimi diminuiscono infatti i rendimenti odierni, ma fanno aumentare quelli attesi tanto da compensare e neutralizzare l'effetto di lungo periodo. Gli shocks permanenti e *mean-reverting* sono stati chiamati nella letteratura economica come anche *cash-flow* e *discount-rate* shocks rispettivamente (Campbell e Vuolteenaho¹⁹).

Formalmente la varianza dell'asset rischioso è $\sigma^2(y) = yD'D + F'F$ e le variabili di stato evolvono invece nel modo seguente:

$$(23) dx_t = k_x(\mu_x - x_t)dt + G\sqrt{y_t}dB_t + HdZ_t$$

$$(24) dy_t = k_y(\mu_y - y_t)dt + L\sqrt{y_t}dB_t$$

L'equazione (24), cioè il processo della volatilità, segue un processo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) *a la Heston*²⁰. μ_y e μ_x sono rispettivamente la volatilità ed il tasso di sconto medio di lungo periodo (per t che tende all'infinito, x_t e y_t convergono a μ_x e μ_y), mentre k_y e k_x sono degli scalari positivi che

¹⁹ Campbell, J. Y, Vuolteenaho, T. *Bad beta, good beta*. American Economic Review, pp. 1249–1275 (2004).

²⁰ Heston, S. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option", JSTOR (1993)

rappresentano il tasso di *mean-reversion* di x_t e y_t (ovvero la velocità con cui tendono a μ_x e μ_y). Ed ancora, i vettori 3×1 G e H hanno le prime due righe uguali a zero, così che solamente il terzo shock di ciascun Browniano modifichi il tasso di sconto: il fatto che gli shocks dei rendimenti attesi abbiano un effetto transitorio implica che $G[3] = -D[3]k_x$ e $H[3] = -F[3]k_x$ e conseguentemente l'iniziale caduta (aumento) del prezzo è perfettamente compensata da un incremento (diminuzione) nei rendimenti attesi futuri. In altre parole, questi shocks sono *mean-reverting*. Differentemente, il vettore 3×1 L ha la prima riga uguale a zero, la seconda cattura invece gli shocks meramente della volatilità, che sono contemporaneamente incorrelati a quelli *mean-reverting* (ovvero gli shocks ai rendimenti attesi x), ed infine la terza coglie co-movimenti della volatilità e dei rendimenti attesi. In sintesi, (22), (23) e (24) rappresentano le opportunità di investimento.

Infine Moreira e Muir specificano le preferenze degli investitori attraverso una funzione di utilità ricorsiva così come descritta da Epstein e Zin²¹ ed in particolare quella esplicitata dallo stesso Epstein e Duffie²² nel tempo continuo:

$$(25) J = E_t \int_t^{\infty} f(C_s, J_s) ds$$

$$(26) f(C, J) = \rho \frac{1 - \gamma}{1 - \varphi^{-1}} J * \left[\left(\frac{C}{J(1 - \gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1 - \varphi^{-1}} - 1 \right]$$

In generale, una funzione di utilità ricorsiva ha due componenti: un *time aggregator* che caratterizza le preferenze in assenza di incertezza ed un *risk aggregator*, utilizzato per aggregare il rischio associato all'utilità futura. Nell'equazione (26) invece, ρ è il tasso di preferenza temporale, γ è il coefficiente di avversione al rischio e φ è il grado di elasticità di sostituzione intertemporale.

Gli autori definiscono a questo punto il vincolo di bilancio dell'investitore, dato W_t la sua ricchezza totale e w_t il peso nell'asset rischioso:

$$(27) \frac{dW_t}{W_t} = \left[w_t x_t + r - \frac{C_t}{W_t} \right] dt + w_t D \sqrt{y_t} dB_t + w_t F dZ_t$$

²¹ Epstein, L. G. Zin, S. E. *Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework*. Econometrica (1989)

²² Duffie, D. Epstein, L. G. *Stochastic differential utility*. Econometrica (1992)

L'investitore massimizza quindi la funzione di utilità (25) soggetta al vincolo di bilancio intertemporale (27) ed all'evoluzione delle variabili di stato x_t e y_t . Il problema di ottimizzazione ha quindi tre variabili di stato, ovvero la ricchezza dell'investitore più i due driver (i rendimenti attesi x e la volatilità y) delle opportunità di investimento. L'equazione di *Bellman* che esplicita il problema è la seguente (28):

$$(28) \quad 0 = \sup_{w,C} f(C_t, J_t) + [w_t x_t W_t + r W_t - C_t] J_W + \frac{1}{2} w_t^2 W_t^2 J_{WW} (y_t D' D + F' F) + \frac{1}{2} Y_t J_{yy} L' L \\ + k_y (\mu_y - y_t) J_y + k_x (\mu_x - x_t) J_x + \frac{1}{2} J_{xx} (y_t G' G + H' H) \\ + y_t J_{xy} G' L + w_t W_t J_{xW} (G' D y_t + F' H) + w_t W_t J_{yW} L' D Y_t$$

Esplorando l'omogeneità del problema rispetto alla ricchezza, l'equazione (28) può essere semplificata a due variabili di stato: in particolare, l'equazione precedente è soddisfatta da una funzione del tipo $J(W, x, Y) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{V(x,y)}$. Al fine di avere una comprensione completa dei risultati che seguono, la politica ottimale di portafoglio può essere scritta come:

$$(29) \quad w_t = \frac{x_t}{\gamma(D' D y_t + F' F)} + V_x \frac{G' D y_t + F' H}{\gamma(D' D y_t + F' F)} + V_y \frac{L' D y_t}{\gamma(D' D y_t + F' F)}$$

Il primo termine della (29) non è altro che la *myopic demand* che riflette, come spiegato prima, le scelte di portafoglio di un investitore di breve periodo. I successivi due rappresentano l'*hedging demand*: mentre Chacko e Viceira²³ mostrano come il terzo elemento (che evidenzia come le innovazioni della volatilità siano fortemente correlati con i rendimenti) non sia quantitativamente significativo, la letteratura economica sulla predicibilità dei rendimenti si sofferma sul secondo termine e sul fatto che, dato che i rendimenti attesi tendono ad aumentare dopo basse realizzazioni attuali, l'investimento nell'asset rischioso sia una copertura naturale tra le opportunità di investimento. Questo effetto porta ad una sovra-allocazione nell'asset rischioso (V_x è solitamente negativo). Assumendo quindi che i rendimenti realizzati siano incorrelati con le innovazioni (o shocks) di volatilità, per cui $L' D = 0$, la politica ottimale di portafoglio può essere riscritta come:

²³ Chacko, G. Viceira, L. M. *Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets*. Review of Financial Studies (2005)

$$(30) \quad w_t = \underbrace{\frac{x_t}{\gamma \sigma^2(y_t)}}_{\text{Myopic}} - \underbrace{\frac{k_x V_x}{\gamma} \theta(y_t)}_{\text{Hedging}},$$

con $\sigma^2(y_t) = D'Dy_t + F'F$ e $\theta(y_t) = \frac{G'Dy_t + F'H}{k_x \sigma^2(y_t)}$ è la frazione della volatilità dei rendimenti dovuta a shocks *mean-reverting*.

L'analisi degli autori enfatizza quanto la forza della *hedging demand* dipenda dalla tipologia di cambiamento della volatilità. Nel primo caso, se la volatilità degli shock *mean-reverting* varia proporzionalmente alla volatilità totale, $\theta(y_t)$ è costante e l'investitore di lungo periodo risponderà a variazioni della volatilità esattamente come quello di breve: più precisamente, la presenza di *mean-reversion* implica una esposizione maggiore dell'investitore di lungo periodo, ma da sola non è una condizione sufficiente per giustificare il fatto che quest'ultimo non si preoccupi dei movimenti della volatilità. Nella seconda eventualità, è facile vedere dall'equazione (30) che solo nel caso in cui la volatilità degli shock *mean-reverting* aumenti più che proporzionalmente rispetto a quella totale ($\theta'(y_t) > 0$), l'*hedging demand* determinerà un aumento dell'esposizione al rischio complessiva, controbilanciando la diminuzione dovuta alla *myopic demand*. Di conseguenza, il consiglio di Chocrane nel ottobre del 2008, cioè che un investitore di lungo periodo dovrebbe ignorare le variazioni nella volatilità, risulta valido solo qualora l'incremento dell'*hedging demand* sia sufficientemente ampio.

La Figura 3 formalizza tale concetto ipotizzando che lo shock nella volatilità sia completamente *mean-reverting*: un rendimento negativo/positivo in $t+1$ implica un aumento/diminuzione della stessa magnitudo in $t+2$, ed un investitore di lungo periodo (due periodi) non troverà l'investimento rischioso come quelli breve (un periodo).

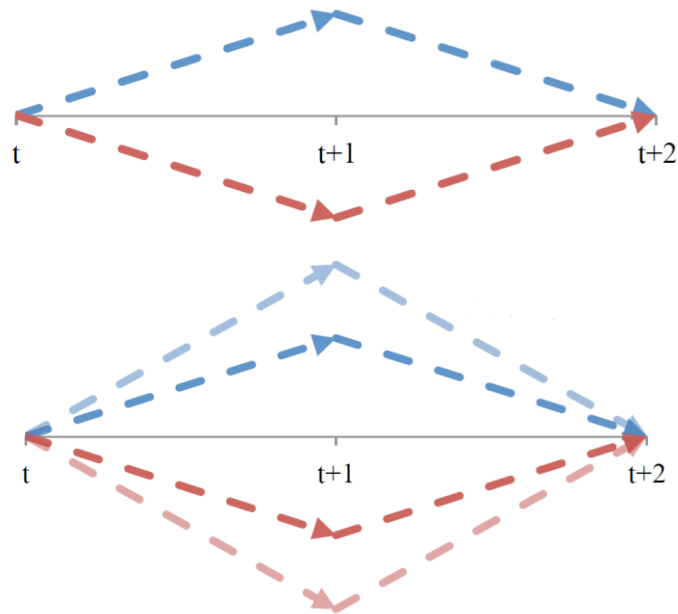


Figura 4: Le figure sono una descrizione stilizzata dell'aumento della parte mean-reverting della volatilità. Le linee tratteggiate più leggere della figura in basso mostrano il caso di un aumento della volatilità rispetto alla figura superiore.

Fonte: *Volatility Managed Portfolios*, Moreira, Muir 2015

Infine, l'ultimo caso sussiste quando l'incremento della volatilità è associato ad una riduzione nella porzione *mean-reverting* dello shock ($\theta'(y_t) < 0$): l'investitore di lungo periodo vorrà sicuramente porre in essere una strategia di volatility timing più di quanto lo voglia uno di breve termine.

A questo punto Moreira e Muir fittano la politica ottimale di portafoglio prima esplicitata con l'*equity premium* non condizionato mediante la seguente relazione lineare:

$$(31) w^*(y) \approx a + b * \frac{\mu_x}{\gamma \sigma^2(y)}$$

Le scelte di un investitore di breve periodo combaciano perfettamente con la (31) quando $a=0$ e $b=1$, così che lo stesso non allochi ricchezza nel portafoglio *buy-and-hold* ed investa completamente nel volatility managed portfolio. La Figura 4 illustra b come funzione dell'orizzonte temporale, dove il coefficiente sull'asse delle ordinate rappresenta il peso che un investitore di lungo periodo alloca in un volatility managed portfolio rispetto ad uno di breve:

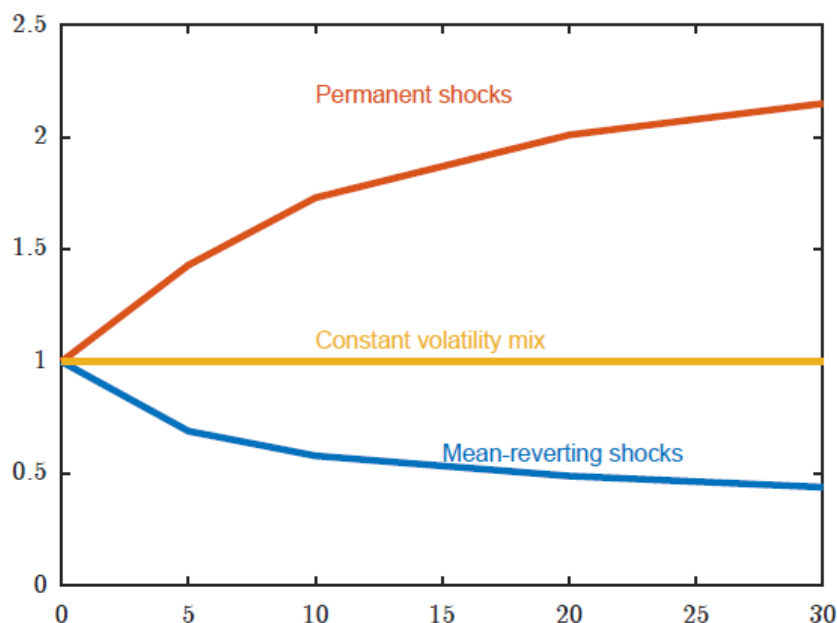


Figura 4: Peso che un investitore di lungo periodo alloca in un volatility managed portfolio rispetto uno di breve in base alla natura della variazione della volatilità e dell'orizzonte temporale.

Fonte: *Volatility Managed Portfolios*, Moreira, Muir 2015

L'eventualità prima descritta coincide con la linea gialla della figura, ovvero quando la volatilità degli shock *mean-reverting* varia proporzionalmente alla volatilità totale: il coefficiente b è uguale ad 1 e l'investitore di lungo periodo risponde alla volatilità come quello di breve. La parte *mean-reverting* della volatilità deve aumentare più che proporzionalmente (linea blu) per fare in modo che l'investitore di lungo periodo risponda alla volatilità in maniera inferiore rispetto a quello di breve ($b < 1$): l'asset rischioso diventa infatti più sicuro per via della natura *mean-reverting* della sua varianza. Tuttavia l'intuizione alla base della Figura 3 è giusta qualitativamente ma non quantitativamente: l'effetto dovuto alla *hedging demand* non è grande abbastanza da compensare completamente la riduzione della *myopic demand*; conseguentemente anche gli investitori di lungo periodo percepiscono gli shock *mean-reverting* come rischiosi per via della lentezza dello stesso processo di *mean-reversion*. Infine, quando la variazione della volatilità è causata dalla porzione permanente (linea rossa), l'investitore di lungo periodo risponde in maniera più marcata di quello di breve a cambiamenti della varianza ($b > 1$). Dato il tempo che impiegano i prezzi a ritornare al loro valore medio, la stima empirica degli autori suggerisce che un investitore di lungo periodo (30 anni) sia comunque interessato alla variazione nel tempo della volatilità anche qualora essa sia correlata unicamente alla porzione *mean-reverting* dei rendimenti.

Concludo il paragrafo con un breve riassunto di quanto precedentemente illustrato. Moreira e Muir trattano il caso dell'investitore di lungo periodo trovando valido il teorema dei due fondi: tutti gli

investitori, a prescindere dall'orizzonte di investimento, mantengono una combinazione lineare di un portafoglio passivo *buy-and-hold* ed un *volatility managed portfolio*. I pesi dipendono sia dall'orizzonte temporale, sia dalla natura della variazione della volatilità nel tempo, transitoria o permanente (ed ovviamente da parametri quali l'avversione al rischio). Un investitore di breve allocherà tutta la sua ricchezza nel portafoglio a volatilità gestita ($b=1$); quello di lungo periodo invece investirà molto nel *volatility managed portfolio* se la volatilità dipende dalla parte permanente dei rendimenti, ma in maniera inferiore quando questa deriva dalla parte *mean-reverting* (o transitoria). Ad esempio, nel caso di un orizzonte di investimento di 30 anni (Figura 4), dove la variazione nel tempo della volatilità è completamente dovuta alla porzione transitoria, l'investitore deterrà all'incirca la metà di un *volatility managed portfolio* rispetto ad uno di breve periodo. In ogni caso, l'investitore gioverà comunque dal timing della volatilità.

3.3 Implicazioni per la teoria economica e considerazioni finali

I risultati empirici dei *volatility managed portfolios* (gli elevati alpha, Sharpe ratio, appraisal ratio ecc.) sono senza ombra di dubbio estremamente positivi e si vanno ad inserire nel filone teorico/accademico delle variazioni nel tempo dei premi per il rischio. Gli autori si apprestano quindi a valutare la potenza statistica del loro approccio comparandolo con quello di altre quattro teorie che studiano il pricing in condizioni di equilibrio: l'*habit model*²⁴; i modelli di rischio di lungo²⁵; i modelli sul cambiamento nel tempo dei rari disastri²⁶ ed infine i modelli in cui l'investitore di riferimento è un intermediario finanziario²⁷. Sia nei modelli *intermediary* che *habit* la variazione nel tempo del rischio e del premio al rischio è endogena ed è funzione degli shocks passati. In entrambi i casi gli shock passati modificano la sensitività della utilità marginale dei futuri shocks: per Cochrane e Campbell, uno shock positivo fa allontanare l'agente dal suo livello di abitudine (*habit*) naturale, riducendo la sua avversione al rischio; per He e Krishnamurthy invece, tale shock riduce l'avversione al rischio effettiva di tutta l'economia, incrementando nello specifico la ricchezza degli intermediari finanziari. In entrambe le situazioni, uno shock negativo rende l'utilità marginale volatile, sfociando

²⁴ Campbell, Cochrane. *By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior*. Journal of Political Economy (1999)

²⁵ Bansal, Yaron, A. *Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles*. The Journal of Finance (2004)

²⁶ Wachter. *Can time-varying risk of rare disasters explain aggregate stock market volatility?* The Journal of Finance (2013)

²⁷ He, Krishnamurthy. *Intermediary asset pricing*. The American Economic Review (2012)

in un aumento endogeno della volatilità del prezzo degli asset: qualunque asset con un premio al rischio positivo sarà caratterizzato da un incremento endogeno della volatilità del suo rendimento nei periodi in cui anche il prezzo del rischio è elevato. Per Watcher (2013) ed il suo modello del rischio di disastro, è la probabilità dello stesso che guida la varianza del mercato ed il premio al rischio: nella sua analisi però, la covarianza tra la varianza ed il prezzo del rischio è positiva, inconsistente con quanto determinato da Moreira e Muir nei loro dati. Infine Bansal e Yaron (2004) attribuiscono alla persistenza nei movimenti della volatilità la variazione dei premi al rischio. La loro teoria sviluppa una $cov\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}, \sigma_t^2\right) < 0$ in quanto gli shock della volatilità non aumentano all'aumentare della stessa (la volatilità ha una varianza costante rispetto a se stessa) e riducono il prezzo del rischio.

I modelli appena citati non studiano né il pricing in termini cross-sezionali, né lo fanno per orizzonti temporali estesi come nei portafogli a volatilità gestita: lo scopo di Moreira e Muir è semplicemente quello di paragonare i loro risultati empirici con quelli impliciti nelle altre teorie, accumulate tutte dal fatto che cercano di spiegare la variazione nel tempo dei premi al rischio. Come? Lo fanno replicando ciascun di questi modelli come nel loro articolo originale e successivamente specificando quattro serie storiche dei rendimenti del mercato della stessa lunghezza di quella utilizzata nel secondo capitolo. La regressione standard (nel senso che è stata adattata a tutti i modelli) predittiva del rendimento in eccesso del mercato sulla volatilità del mese precedente è uguale a:

$$(32) R_{mkt,t+1} - R_{f,t+1} = a + \gamma \hat{\sigma}_{mkt,t}^2 + \epsilon_{t+1}$$

e la Figura 5 mostra nei grafici a destra l'istogramma delle stime del coefficiente γ (il trade-off rischio rendimento) per i quattro casi. Gli autori costruiscono poi quattro volatility managed portfolio esattamente come fatto nel secondo capitolo e li adattano ai modelli presi in considerazione: la Figura 5, nelle prime due colonne, illustra rispettivamente gli alpha e gli appraisal ratio delle restanti strategie computati lanciando mille simulazioni per un campione di cento anni (la linea tratteggiata "Data" mostra invece i risultati dei portafogli a volatilità gestita originali di Moreira e Muir).

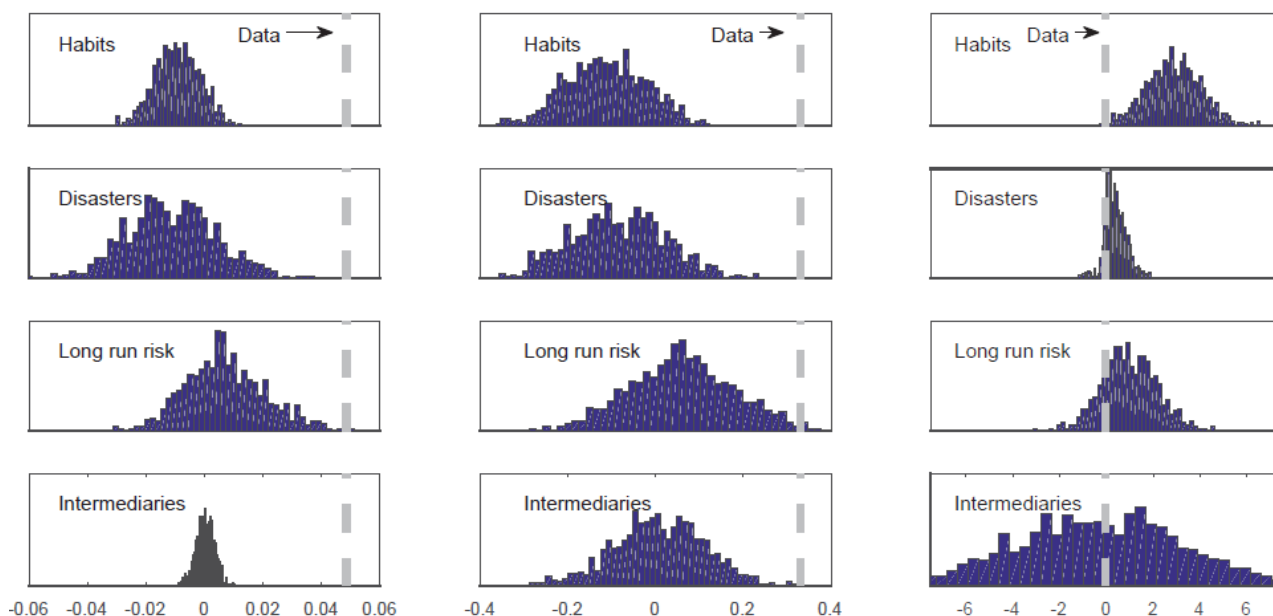


Figura 5: Modelli sulla variazione nel tempo del premio per il rischio e volatility managed portfolio a confronto. I grafici rappresentano l'alpha, l'appraisal ratio e il coefficiente γ dell'equazione (32) nelle colonne a sinistra, centro e destra rispettivamente. Le quattro righe sono in ordine l'habit model, disaster model, long-run risk model ed infine intermediary model degli autori prima citati. La linea tratteggiata illustra gli output dei volatility managed portfolios.

Fonte: Volatility Managed Portfolios, Moreira, Muir 2017

Come è facile notare, il paragone tra gli output evidenziati nel paragrafo 2.2.2. e quelli mediante gli altri quattro approcci è evidente: nonostante il tradeoff rischio rendimento sia debole in tutti i casi, nessun modello si avvicina minimamente agli alpha ed appraisal ratio raggiunti dai portafogli a volatilità gestita di Moreira e Muir. Gli alpha risultano essere in media zero o addirittura negativi: dall'equazione (9) del presente capitolo ($\alpha = -cov(\gamma_t, \sigma_t^2) * \frac{c}{E[\sigma_t^2]}$) ciò ha come diretta conseguenza che $cov(\gamma_t, \sigma_t^2) > 0$ dove $\gamma_t = E_t[R_{t+1}]/\sigma_t^2$ e può essere interpretato come l'effettiva avversione al rischio del mercato. A differenza della prova empirica mostrata dagli autori secondo cui la suddetta covarianza risulta essere negativa, i quattro modelli presi in considerazione sono caratterizzati da un segno debolmente positivo, in quanto l'avversione al rischio γ_t aumenta o rimane costante quando la volatilità è alta (i periodi rischiosi).

Cosa spiega quindi i risultati del mio elaborato? L'economia non è una scienza esatta, ed il successo dei volatility managed portfolios non ha ancora trovato una specifica ragione di essere. Una risposta esatta a questa domanda è quindi al di fuori dello scopo dell'articolo (nonché della mia trattazione), sia esso del 2015, 2016 o 2017, ed è lasciato, dicono gli autori, a sviluppi futuri. Comunque sia, Moreira e Muir cercano di dare adito ad alcune motivazioni. La più facile possibile è che la propensione ad assumere rischio si correla negativamente con la volatilità: in altre parole, l'investitore sceglie di non fare il timing della volatilità in quanto è meno avverso al rischio durante

i periodi di alta instabilità finanziaria. Alternativamente, mediante un modello di agenti rappresentativi, una plausibile spiegazione è che la volatilità guidata dalla possibile conoscenza di parametri strutturali sia diversa da quella derivante da forme di rischio note. Ed ancora, ragione dei volatility managed portfolios potrebbe attribuirsi alla lentezza degli investitori a fare trading sul mercato: questo potrebbe spiegare perché un brusco aumento della volatilità non determini un corrispondente incremento dei rendimenti attesi, in linea con i risultati della funzione di impulso della Figura 1 di questo capitolo.

Una motivazione finale è stata ampiamente trattata nel paragrafo 3.2.2, ovvero concernente la composizione della natura degli shocks di volatilità. Si è visto come un investitore di lungo periodo possa trovare il portafoglio a volatilità gestita meno conveniente qualora lo shock della volatilità sia causato dalla parte transitoria (o *mean-reverting* o *discount rate*) della stessa: intuitivamente, un incremento della parte *mean-reverting* potrebbe far diminuire la ricchezza dell'investitore domani, ma non avrebbe alcun effetto di lungo periodo. Tuttavia, gli autori hanno evidenziato quantitativamente che anche un agente di lungo periodo possa beneficiare dai volatility managed portfolios: conseguentemente, la variazione della composizione degli shocks riduce, ma non risolve, il puzzle del *volatility timing*.

Conclusione

I risultati del mio lavoro hanno messo in luce come la strategia attiva che pondera l'esposizione al rischio dell'investitore per la volatilità realizzata del periodo precedente, funzioni bene su un orizzonte temporale esteso per circa novanta anni. A tale conclusione sono arrivato attraverso una analisi empirica basata su un campione di fattori che riassume realisticamente le informazioni di pricing di un vasto pool di asset classes e che generalizza l'andamento del mercato azionario americano.

La bontà dei *volatility managed portfolios* è sancita dalla stretta significatività e consistenza economica di comuni e celebri indicatori di *performance* finanziaria. In particolare ho evidenziato come le regressioni dei fattori a volatilità gestita su quelli originali producano *alpha* elevati e positivi (pari mediamente al 3,9%), *appraisal ratio* e *Sharpe ratio* decisamente maggiori di zero (tra lo 0,30 e 0,90 e 0,10 e 0,99 rispettivamente), e guadagni di utilità di circa il 60% rispetto ad un classico approccio *buy and hold*. Inoltre la strategia di *volatility timing* realizza un rendimento cumulato maggiore del 23% rispetto a quella *buy and hold* durante l'intero arco temporale analizzato e soprattutto risponde in maniera meno marcata alle grandi crisi economiche dell'ultimo secolo.

Successivamente ho analizzato i *drawdown* percentuali ed assoluti della strategia, evincendo come il portafoglio a volatilità gestita registri storicamente un tasso di perdita inferiore (-5,8%) rispetto a quello *buy and hold* (-8,7%) e confermando la supposizione secondo la quale i peggiori momenti dei *volatility managed portfolios* coincidano con i periodi di bassa agitazione finanziaria del mercato.

Risultati analoghi sono stati evidenziati per i quattro portafogli multi-fattoriali che ho costruito come combinazione lineare di quelli singoli: anche in questo caso ho mostrato *alpha* compresi tra 1,51% e 3,7%, *Sharpe ratio* decisamente elevati tra 0,50 e 1,17 ed *appraisal ratio* positivi e statisticamente significativi (tra 0,25 e 0,86).

Ho proseguito l'analisi indagando se questi ottimi risultati persistessero a specifici test strutturali: in particolare ho evinto come i portafogli a volatilità gestita assumano meno rischi durante i periodi di recessione (così come stimati dal NBER) e che siano fondamentalmente diversi dagli approcci che sfruttano le anomalie *cross-sezionali* quali il *risk parity* ed il *Betting Against Beta* (BAB). I *volatility managed portfolios* sono risultati inoltre essere robusti sia all'inclusione dei costi di transazione che all'imposizione di stretti vincoli di leva finanziaria.

Infine ha riproposto lo studio teorico di *Moreira* e *Muir* circa le cause che spiegano i motivi per cui la strategia funziona e le implicazioni nelle scelte di portafoglio degli investitori. Sebbene non si sia ancora giunti ad una spiegazione univoca, varie sono le interpretazioni plausibili portate avanti dagli autori: tra queste le più rilevanti sono sicuramente la lentezza degli investitori a reagire a *shocks* di

mercato, così come la diversa composizione della natura della varianza della volatilità, che porta i *volatility managed portfolios* ad essere una scelta di investimento più o meno conveniente.

A prescindere dagli *output* e dalle conclusioni economiche che ho riproposto in questo elaborato, il tempo da me dedicato allo stesso ha sicuramente contribuito ad accrescere e consolidare le mie abilità “informatiche”, obiettivo cardine di questa tesi magistrale.

Ritengo che l'argomento da me trattato possa essere ulteriormente sviluppato da altri ricercatori, tenendo conto della forza innovativa e della validità empirica dello stesso: mi piacerebbe pensare che i risultati da me ottenuti possano costituire un punto di partenza per i futuri progressi nella materia.

Bibliografia

- Andersen, T. G, Bollerslev, T, Diebold F, Labys P. *The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility*. The Journal of the American Statistical Association Vol. 96, pp 42-55 (2001)
- Andersen, T. G, Bollerslev, T. *Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts*. International economic review, 885–905 (1997-1998)
- Ang A., Hodrik R., Xing Y., Zhang X. *The Cross-section of Volatility and Expected Returns*. The Journal of Finance, Vol.61, No. 1 (2006)
- Asness, C.S., Frazzini, A., and Pedersen, L. H. *Leverage aversion and risk parity*. Financial Analysts Journal, Vol. 68, pp. 47–59 (2012)
- Bansal, R. Yaron, A. *Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles*. The Journal of Finance, Vol. 59, pp. 1481–1509 (2004)
- Barroso, P. Santa-Clara, P. *Momentum has its moments*. Journal of Financial Economics, Vol. 116, pp. 111–120 (2015).
- Black, F. *Capital market equilibrium with restricted borrowing*. The Journal of Business (1972)
- Black F. Scholes M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy. Vol 8, pp. 637-654 (1973)
- Bodie, Kane, Marcus. *Investments, Tenth Edition* (2014)
- Bollerslev T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics Vol. 31, pp. 307-327 (1986)
- Buffett, W. E. *Buy American. I am*. The New York Times, 16 ottobre 2008
- Campbell, J. Y. Cochrane, J. *By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior*. Journal of Political Economy. Vol. 107, pp. 205–251 (1999)
- Campbell, J. Y, Thompson, S. B. *Predicting excess stock returns out of sample*. Review of Financial Studies (2008)
- Campbell, J. Y, Shiller, R. J. *Stock Prices, Earnings and Expected Dividends*. The Journal of Finance, Vol. 43, pp 661-6176 (1988)

- Campbell, J. Y., Vuolteenaho, T. *Bad beta, good beta*. *American Economic Review*, pp. 1249–1275 (2004).
- Carhart M. *On Persistence in Mutual Fund Performance*. *Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 57-82 (1997)
- Chacko, G. Viceira, L. M. *Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets*. *Review of Financial Studies* (2005)
- Cochrane, J. H. *Is now the time to buy stocks?* *The Wall Street Journal*, 12 novembre 2008.
- Constantinides, G. M., Jackwerth, J. C., Savov, A. *The puzzle of index option returns*. *Review of Asset Pricing Studies*, Vol. 3, pp. 229–257 (2013)
- Duffie, D. Epstein, L. G. *Stochastic differential utility*. *Econometrica* (1992)
- Engle R. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica* Vol. 50 (1982)
- Epstein, L. G. Zin, S. E. *Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework*. *Econometrica* (1989)
- Fama E. French K. *A Five-Factor Asset Pricing Model*. *Journal of Financial Economics* Vol. 116, pp. 1-22 (2015)
- Fama E. French K. *Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds*. *Journal of Financial Economics* Vol. 33, pp. 3-56 (1993)
- Fama E. French K. *The Cross-Section of Expected Stock Returns*. *The Journal of Finance*. Vol. 47 (1992)
- Fleming, J., Kirby, C., and Ostdiek B. *The economic value of volatility timing*. *The Journal of Finance*, Vol. 56, pp. 329–352 (2001)
- Fleming, J., Kirby, C., and Ostdiek, B. *The economic value of volatility timing using realized volatility*. *Journal of Financial Economics*, Vol. 67, pp. 473–509 (2003)
- Frazzini, A, Pedersen, L. H. *Betting against beta*. *Journal of Financial Economics* (2014)
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. Runkle, D. E. *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*. *The Journal of Finance*. Vol. 48, pp. 1779–1801 (1993)

- He, Z. Krishnamurthy, A. *Intermediary asset pricing*. The American Economic Review (2012)
- Heston, S. “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option”, JSTOR (1993)
- Hou, Xue, Lu Zhang. *A Comparison of New Factor Model*, NBER Working Paper No.20682 (2014)
- Jagannathan, R. Wang, Z. *The conditional CAPM and the cross-section of expected returns*. Journal of Finance, Vol. 51, pp. 3–53 (1996)
- Jensen, M. C., Black, F., Scholes, M. S. *The capital asset pricing model: Some empirical tests*. (1972)
- Lettau, M. Ludvigson, S. *Measuring and modelling variation in the risk– return tradeoff, prepared for the handbook of financial econometrics*. Pubblicato da Ait– Sahalia and Lars–Peter Hansen. (2003)
- Lundblad, C. *The risk return tradeoff in the long run: 1836–2003*. Journal of Financial Economics, Vol. 85, pp. 123–150 (2007)
- Lustig, H., Roussanov, N., and Verdelhan, A. *Common risk factors in currency markets*. Review of Financial Studies (2011)
- Markovitz, H. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol.7, No. 1, pp. 77-91 (1952)
- Merton, R. C. *An intertemporal asset pricing model*. Econometrica. Vol. 41, pp. 867–887 (1973)
- Moreira, A., Muir, T. *Volatility Managed Portfolios*. The Journal of Finance. Vol. 72, pp. 1611-1644 (2017), Versione Ufficiale.
- Moreira, A., Muir, T. *Volatility Managed Portfolios*. NBER Working Paper No. 22208 (aprile 2016)
- Moreira, A., Muir, T. *Volatility Managed Portfolios*. Yale School of Management Press (2015)
- Ross S. *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory, Vol. 13, pp. 341-360 (1976)
- Ruey S., Tsay. *Analysis of Financial Time Series, Third Edition* (2010)
- Sharpe W. *Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, Vol. 19, pp 435-442 (1964)

Vanguard. *“What to do during market volatility? Perhaps nothing”*. 20 ottobre 2015

Wachter, J. A. *Can time-varying risk of rare disasters explain aggregate stock market volatility?* The Journal of Finance (2013)

Sitografia

www.aqr.com/library/data-sets

<https://fred.stlouisfed.org/series/USRECP>

http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

www.nber.org/cycles.html

<https://personal.vanguard.com/us/insights/article/market-volatility-082015>

Riassunto

Il mio elaborato ha replicato passo dopo passo il paper “*Volatility-Managed Portfolios*” (pubblicato nel *The Journal of Finance*) di Alan Moreira e Tyler Muir del 2015, confrontandolo con lo stesso del 2016 e 2017 per evidenziare i cambiamenti di studio e metodologia apportati dagli autori. La base di partenza per l’elaborazione del dataset sono i fattori mensili e giornalieri di Kenneth French ed Eugene Fama, la cui approfondita descrizione è rinvenibile sia nel primo che nel secondo capitolo. Nello specifico sono incluse le serie storiche dei seguenti fattori dal 1 luglio 1926 al 28 febbraio 2017: Mkt (Mercato), SMB (Small Minus Big), HML (High Minus Low), Mom (Momentum), RMW (Robust Minus Weak), CMA (Conservative Minus Aggressive) e BAB (Betting Against Beta). A questi fattori, facilmente accessibili dal sito web degli stessi Fama e French, Moreira e Muir aggiungono dati mensili e giornalieri di altre variabili non reperibili se non tramite esplicita richiesta agli autori di tali fonti (Investment to Asset, Return On Equity e FX), per i quali quindi mi sono limitato a riportare gli output originali.

I volatility managed portfolios si basano su un concetto semplice. I rendimenti mensili sono scalati per l’inverso della loro varianza realizzata nel mese precedente: ciò implica che l’esposizione nei confronti del rischio viene ridotta quando la volatilità passata risulta essere elevata ed incrementata nel caso opposto. L’analisi dei portafogli a volatilità gestita sono motivate dal punto di vista di un semplice investitore media-varianza, che aggiusta la sua esposizione nell’asset rischioso a seconda dell’attrattività del seguente rapporto μ_t/σ_t . Considerando che la varianza risulta essere altamente prevedibile per orizzonti temporali brevi (fino ad un anno) e le previsioni della stessa sono poco correlate con i rendimenti futuri per tali lassi di tempo, i volatility managed portfolios approssimano il tradeoff rischio/rendimento e quindi le scelte di investimento di un agente nel mercato all’inverso della volatilità realizzata il mese precedente. L’idea è quindi che se la volatilità non predice i rendimenti, il tradeoff peggiora quando la varianza aumenta: se infatti non vi è correlazione tra le due grandezze, l’aumento della volatilità si esplicita in un mero aumento del rischio, senza alcun ritorno per l’investitore. Il peso ottimale del portafoglio è quindi proporzionale all’attrattività del trade off rischio rendimento ed in formule pari a $w_t^* = \frac{E_t(r_{t+1})}{\sigma_t^2(r_t)}$.

Siccome la costruzione del portafoglio si basa sulla ponderazione del peso nell’asset rischioso (fattore nel caso specifico) per la varianza realizzata nel mese precedente, il primo elemento necessario da determinare è la stessa misura di rischio. La *realized volatility* (RV) per un dato mese t ed un fattore f è la radice della varianza dei passati rendimenti giornalieri nel mese $t-1$. La varianza realizzata è uguale in formule:

$$\sigma_t^2(f) = RV_t^2(f) = \sum_{d=1/22}^1 \left(f_{t+d} - \frac{\sum_{d=1/22}^1 f_{t+d}}{22} \right)^2$$

Questa grandezza è infatti nota alla fine del mese t e conseguentemente viene utilizzata come informazione condizionata per prevedere i rendimenti futuri e creare il portafoglio per il mese $t+1$. L'approccio è semplice e, basandosi unicamente sui rendimenti del fattore (facilmente osservabili e privi della onerosità della stima di parametri quali la matrice delle covarianze, ad esempio, o di un modello previsionale), può essere implementato da un investitore nella realtà. In estrema sintesi la realized volatility viene utilizzata come proxy della varianza condizionata.

La relazione esistente tra la volatilità del mese precedente ed i "momenti" del mese successivo è un elemento centrale da analizzare per capire, in principio, se la strategia dei volatility managed portfolios possa essere implementata. La Figura 2 del secondo capitolo mette in luce diversi aspetti di grande rilevanza empirica: a) non sussiste una relazione ben specifica tra la volatilità passata ed il rendimento; b) esista un forte relazione tra la volatilità ritardata e quella corrente (all'aumentare della prima aumenta anche la seconda); c) il tradeoff rischio-rendimento si riduce durante i periodi di alta volatilità e d) la probabilità di recessione è maggiore in seguito a realizzazioni elevate della volatilità passata. L'evidenza c) tuttavia ha come diretta implicazione il fatto che un agente di mercato che voglia porre in essere una strategia ottimizzante debba assumere più rischio quando il tradeoff è conveniente, ovvero quando la volatilità è bassa, ed alternativamente ridurre l'esposizione nel caso opposto.

Il portafoglio volatility-managed viene quindi costruito scalando l'*excess return* del fattore per l'inverso della sua varianza realizzata. Ogni mese la strategia prevede quindi un ribilanciamento dei pesi, aumentando o diminuendo l'esposizione al rischio del portafoglio relativamente alla variazione della *realized variance* del mese precedente. Il portafoglio gestito, f_t^σ , sarà quindi uguale a:

$$f_t^\sigma = \frac{c}{RV_{t-1}^2} f_t$$

dove f_t è il rendimento in eccesso del portafoglio *buy-and-hold* di un fattore, RV_{t-1}^2 è la varianza realizzata in $t-1$ computata come spiegato precedentemente, ed infine la costante c ha lo scopo di controllare l'esposizione media della strategia. In particolare, c è tale per cui la standard deviation non condizionata dell'intero *managed factor* (f_t^σ) sia uguale a quella del completo *non-managed factor* (f_t). Determinato f_t^σ , non resta che studiare la bontà della strategia attraverso una regressione

lineare delle serie storiche mensili dei rendimenti del *volatility managed portfolio* sul fattore originale (ogni fattore è annualizzato in percentuale moltiplicando il rendimento mensile per dodici):

$$f_t^\sigma = \alpha + \beta f_t + \varepsilon_t$$

Una intercetta positiva, α , ha come prima implicazione il fatto che il timing della volatilità aumenti lo Sharpe Ratio rispetto alla strategia *buy-and-hold* del fattore originale. Gli alpha delle singole regressioni hanno inoltre una interpretazione economica esaustiva quando il fattore individuale descrive accuratamente l'insieme delle opportunità di investimento dell'investitore o, alternativamente, quando i fattori risultano essere tra loro incorrelati e catturano conseguentemente diverse dimensioni del rischio. Quando questo "test" è infatti applicato a variabili sistematiche (come ad esempio il portafoglio di mercato, Mkt) che riassumono quindi le informazioni di prezzo di un'ampia gamma di assets e strategie, un alpha positivo dei volatility managed portfolios permette una espansione della frontiera media-varianza. C'è un consenso della teoria economica che i fattori utilizzati da Fama e French (e le loro estensioni) ed utilizzati in questa analisi, riassumano realisticamente le informazioni di pricing di un vasto pool di asset class e possano essere utilizzati per generalizzare l'andamento del mercato. I risultati delle regressioni singolo sono riportate nella Tabella 3 e 6 del secondo capitolo e mi limito in questo contesto a riportare gli alpha, standard error (SE), R^2 , Root Mean Squared Error (RMSE) ed appraisal ratio (AR) dei fattori:

	<i>Mkt</i> ^σ	<i>SMB</i> ^σ	<i>HML</i> ^σ	<i>Mom</i> ^σ	<i>RMW</i> ^σ	<i>CMA</i> ^σ	<i>BAB</i> ^σ
Alpha	4,92	-0,50	1,79	12,4	2,62	0,34	6,27
S.E.	(1,56)	(0,92)	(1,05)	(1,54)	(0,86)	(0,71)	(1,20)
R²	0,37	0,38	0,32	0,22	0,34	0,46	0,36
RMSE	51,1	30,4	34,5	50,2	21,7	17,8	29,8
AR	0,33	-0,06	0,18	0,86	0,42	0,07	0,72

Questi appena presentati sono i principali risultati empirici sui volatility managed portfolios, che mostrano gli output delle regressioni dei fattori managed (individuabili dall'apice σ) su quelli non-managed. Il parametro di maggiore interesse sul quale focalizzerò l'attenzione è senza ombra di dubbio l'alpha: sono infatti più interessato ad una misura che quantifichi la bontà dell'investimento, ovvero la capacità di generare un rendimento positivo autonomamente, che non il segno della

relazione tra le due tipologie di fattori (beta). In generale, si possono notare costanti positive e statisticamente significative per tutte le variabili (a parte il caso isolato di SMB con un valore pari a -0,5). Quale può essere una prima spiegazione di questo ottimo risultato? In una realtà dove il tradeoff rischio rendimento è costante, l'alpha delle precedenti regressioni si assesterebbe ad un valore nullo: intuitivamente, il volatility timing perde la sua efficacia quando il tradeoff rischio/rendimento non varia nel corso del tempo. Sulla base delle assunzioni avanzate prima, gli alpha sono positivi in quanto il portafoglio gestito sfrutta l'elevato prezzo del rischio durante i periodi di bassa volatilità ed evita lo sveniente trade-off rischio/rendimento durante i periodi altamente rischiosi.

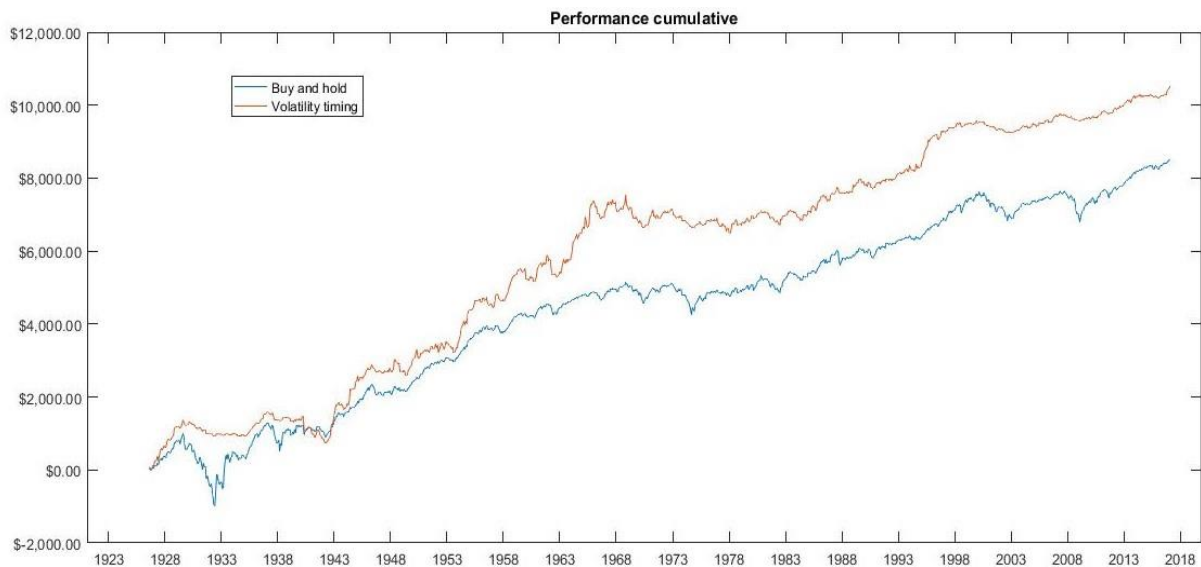
Successivamente ho calcolato l'appraisal ratio (AR) dei volatility managed portfolios: se l'obiettivo ultimo dell'investitore media-varianza è quindi quello di massimizzare lo Sharpe ratio del portafoglio, allora l'AR è la statistica rilevante per valutare le performance dell'investimento. Il trade off rischio/rendimento dell'inclusione di un titolo al portafoglio è rappresentato dal contributo positivo dell'alpha e dal contributo negativo dell'aumento della varianza (attraverso il rischio specifico). Questo tradeoff è completamente catturato dall'appraisal ratio. Anche in questo caso, a prescindere del caso isolato del fattore SMB, tutti i restanti volatility managed portfolios esibiscono valori positivi e significativi di tale indice finanziario.

In aggiunta, Moreira e Muir suggeriscono un modo alternativo per quantificare la rilevanza economica dei risultati dal punto di vista di un semplice investitore media varianza. Ragionano in termini di percentuale di guadagno di utilità durante l'intero campione delle serie storiche, modalità riassumibile dalla seguente formula: $\Delta U_{MV,f}(\%) = \frac{SR_{new,f}^2 - SR_{old,f}^2}{SR_{old,f}^2} = \frac{AR_f}{SR_{old,f}^2}$. Sebbene non avessi una precisa indicazione su come operare, ho stimato il guadagno di utilità per 6 fattori con dei risultati analoghi a quelli degli autori originali:

	<i>Mkt</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>
$\Delta U_{MV,f}$	62,7%	6,3%	20,8%	317,4%	62,9%	3,2%

La conferma di quanto illustrato fino ad ora risulta lampante quando viene contrapposto un ipotetico investimento di 1\$ nel fattore mercato (Mkt) con lo stesso a volatilità gestita (Mkt^o): oltre che determinare il valore finale in dollari delle due strategie, tale studio evidenzia i movimenti nel tempo dell'andamento del portafogli. Per l'analisi, ho costruito i rendimenti nominali dei due fattori con una procedura che aggiunge al valore cumulato fino al tempo t le realizzazioni a $t+1$ e così via: l'ovvia

conclusione di questa metodologia è un fattore che simula un investimento unitario *buy-and-hold* dal 1926 al 2017. Ho successivamente plottato su MatLab i rendimenti cumulati prima determinati per avere evidenza grafica delle differenti strategie:



Dalla precedente figura (Figura 3, capitolo 2), si può notare come il volatility managed portfolios realizzi un guadagno finale di \$10,600 contro gli \$8,500 della strategia buy-and-hold del fattore mercato, esibendo quindi un rendimento maggiore di circa il 23%. Inoltre, a parte un singolo episodio tra il 1941 e l'inizio del 1942, il rendimento cumulato del fattore gestito si posiziona sempre al di sopra di quello originario.

Ho proseguito l'analisi soffermandomi sull'andamento dei portafogli (buy and hold e volatility timing del fattore mercato) durante le grandi crisi di mercato, prime tra tutte la Grande Depressione del 1929 e la recente recessione del 2008. Come anticipato prima, la strategia di volatility timing diminuisce l'esposizione al rischio subito dopo l'inizio del declino del mercato per poi riacquistare quando il primo impatto va svanendo. Nella Figura 4 del secondo capitolo si può notare come questo approccio riduca sensibilmente le perdite dell'investimento durante i peggiori eventi di crisi del campione (ed ovviamente degli ultimi novanta anni circa). Nonostante i volatility managed portfolios si comportino bene in questi periodi, soffrono maggiormente i momenti di calma del mercato: questo è coerente con l'intuizione che i portafogli gestiti assumano un maggiore rischio relativo quando la volatilità è bassa e conseguentemente subiscano delle perdite proprio in questi lassi temporali.

Per avere una misura del *downside risk* ho quindi determinato i *drawdown* (DD) di entrambi i fattori mercato, gestito e non. Ho determinato inoltre la media dei drawdown percentuali per entrambi le serie storiche, che risulta essere un indicatore forse maggiormente utile di quello corrente per capire il livello medio di DD che l'investitore può aspettarsi dall'investimento: per il portafoglio *buy-and-*

hold tale valore si assesta a circa -8.7%, mentre per la versione a volatilità gestita sul -5.8%. Inoltre, il portafoglio che si basa sul volatility timing registra storicamente un tasso di perdita minore rispetto a quello buy-and-hold. Allo stesso modo può essere facilmente calcolato il massimo livello di perdita delle strategie cercando il minimo valore registrato dalle serie: ciò rappresenta un ipotetico *worst-case* scenario di un agente che ha investito in un picco ed ha mantenuto la posizione fino al periodo precedente la ripresa. Anche in questo caso il volatility managed portfolio si distingue positivamente: il massimo drawdown di quest'ultimo avviene nel febbraio del 1978 ed ammonta -1.028\$ circa, contro i -1.978\$ della strategia opposta registrata in giugno del 1932.

Cosa succede quando, invece di derivare il portafoglio a volatilità gestita da un singolo fattore, lo si faccia da un portafoglio efficiente media-varianza? Così come prima sono stati considerati singolarmente i fattori di Fama e French, ora l'analisi è estesa attraverso la costruzione di un portafoglio che combini linearmente più fattori. Per questo motivo, i parametri incogniti non sono altro che i pesi con cui ponderare nel corso del tempo i rendimenti dei fattori scelti, in modo tale che il portafoglio multifattoriale sia efficiente media-varianza per un set di fattori e conseguentemente "prezzi" non solo il fattore individuale, ma anche un ampio set di asset e strategie colte dagli altri. Mi riferirò a questo portafoglio come Mean Variance Efficient (MVE). Il portafoglio MVE viene definito, dato F_{t+1} un vettore di rendimenti e b un peso statico che assicuri il maggior Sharpe Ratio del campione, come:

$$f_t^{MVE} = b'F_t$$

Le combinazioni di fattori analizzati, sia nel paper che da me, sono quattro: FF3 (Mkt, SMB e HML), FF3Mom (Mkt, SMB, HML e Mom), FF5 (Mkt, SMB, HML, CMA e RMW) e FF5Mom (Mkt, SMB, HML, CMA, RMW e Mom). I parametri necessari al fine dell'elaborazione del portafoglio efficiente media-varianza sono invece: il rendimento medio giornaliero dei fattori, il rendimento medio giornaliero del tasso risk free ed infine la matrice delle varianze e covarianze. Questi tre elementi sono infatti sufficienti a determinare i pesi che ottimizzano il valore atteso e la varianza del portafoglio MVE. Attraverso Matlab ho determinato i pesi ottimali che massimizzano lo Sharpe ratio di ognuna combinazione: una volta trovati, ho infatti calcolato f_t^{MVE} ponderando i rendimenti giornalieri per i pesi, e ripetuto il procedimento per tutta la durata del campione. MVE viene successivamente trattato esattamente alla stregua del fattore singolo poco fa esposto per la determinazione del portafoglio a volatilità gestita. Il volatility managed portfolio è costruito come riportato di seguito:

$$f_t^{MVE,\sigma} = \frac{c}{RV_{t-1}^2(f_t^{MVE})} f_t^{MVE}$$

L'analisi della regressione ($f_t^{MVE,\sigma} = \alpha + \beta f_t^{MVE} + \varepsilon_t$) che studia la relazione tra MVE originale e volatility managed è riportato nella Tabella 12 del secondo capitolo: il portafoglio MVE a volatilità gestita esibisce, per tutte le combinazioni analizzate, alpha positivi e statisticamente significativi. In particolare, un alpha positivo ha come prima implicazione che il timing della volatilità aumenta lo Sharpe Ratio della migliore strategia *buy-and-hold* di un soggetto che ha la possibilità di accedere allo scambio di multipli fattori di mercato e ciò conferma l'intuizione secondo cui il timing della volatilità espanda, anche in questo frangente, la frontiera media-varianza. Ad alimentare la bontà degli output sono inoltre i risultati sullo Sharpe ratio ed appraisal ratio: per quanto concerne la prima misura, si può notare come il tradeoff rischio rendimento dei volatility managed portfolio sia sempre maggiore rispetto al fattore MVE di partenza; in aggiunta, gli appraisal ratio sono economicamente significativi ed oscillano tra 0,25 e 0,86.

	FF3	FF3Mom	FF5	FF5Mom
Alpha	3,57	2,96	1,51	3,70
SE	(0,94)	(0,54)	(0,97)	(0,84)
SR(MVE)	0,50	0,92	0,43	0,84
SR(VMP)	0,67	1,14	0,50	1,17
AR	0,45	0,69	0,25	0,86

Ho successivamente esteso l'analisi considerando sotto-campioni dei portafogli prima determinati. Nello specifico ho diviso le osservazioni in tre gruppi temporali, che si estendono rispettivamente dal 1926 al 1955, dal 1956 al 1985 ed infine dal 1986 al 2017. Ovviamente per FF5 e FF5Mom sono assenti le informazioni comprese tra gli anni 1926 e 1955 a causa della mancanza dei dati. La Tabella 13 del secondo capitolo mostra che, nonostante gli alpha siano positivi in tutti i tre sotto-periodi, le regressioni del primo e dell'ultimo gruppo hanno degli alpha più elevati e significativi rispetto a quello centrale. Questo non fa altro che confermare quanto esposto nel paragrafo sui drawback: periodi di bassa volatilità, come quelli rappresentati proprio dal 1956 al 1985, coincidono con le minori performance del portafoglio a volatilità gestita.

Conclusa la descrizione della costruzione del portafoglio a volatilità gestita, sia a fattore singolo che multiplo, ho posto in essere dei test strutturali che indagassero sia potenziali spiegazione del perché la strategia di volatility timing restituisca così elevati rendimenti aggiustati per il rischio, sia se questi ottimi risultati continuassero a sussistere. I test sono rispettivamente al paragrafo 3.1/2/3/4/5 del secondo capitolo e rispettivamente sono il business cycle risk, le differenze con le anomalie cross sezionali, i costi di transazione, i vincoli di leva finanziaria ed i co movimenti della volatilità.

Nel paragrafo sul business cycle ho evidenziato la relazione tra il ciclo economico e le performance dei volatility managed portfolios mediante una regressione lineare (multipla) del tipo $f_t^\sigma = \alpha_0 + \alpha_1 1_{rec,t} + \beta_0 f_t + \beta_1 1_{rec,t} * f_t + \varepsilon_t$ e facendo utilizzo di una variabile dummy sito della Federal Reserve Bank di St. Louis (FRED) che assume valore 1 durante le recessioni e 0 altrimenti. I risultati delle regressioni (Tabella 14 del secondo capitolo) suggeriscono come la strategia di volatility timing assume meno rischio durante le recessioni e visto che i portafogli a volatilità gestita riducono l'esposizione al rischio durante le recessioni (così come stimate dall'NBER), questo rende difficile utilizzare questa tipologia di rischio come unica variabile esplicativa degli ottimi risultati stimati.

Nel paragrafo 2.3.2 ("Differenze con anomalie cross-sectional") ho indagato empiricamente se la strategia alla base dei volatility managed portfolio sia diversa da quelle che esplorano un debole trade-off rischio rendimento nei dati cross-sezionali. Nel primo capitolo ho avuto modo di spiegare approfonditamente sia il portafoglio Betting Against Beta (BAB) che quello risk parity, evidenziando come i due approcci sfruttino a loro vantaggio delle anomalie che si riscontrano nel pricing degli asset sul mercato. Si cerca di rispondere alla domanda se queste stesse anomalie cross-sezionali possano essere una spiegazione delle performance dei volatility managed portfolios.

Per quanto concerne il BAB, ho dapprima aggiunto lo stesso come variabile di controllo alle regressioni singole di sei fattori e poi costruito un fattore a volatilità gestita dello stesso: il primo esperimento ha portato risultati identici a quelli della Tabella 3 del secondo capitolo, che porta a concludere che gli alpha non risentono dell'aggiunta di BAB. Inoltre, i coefficienti del fattore BAB non appaiono significativi, ulteriore aspetto che conferma la stretta indipendenza tra le due strategie. La versione volatility managed del BAB esibisce invece un alpha pari a 6,27, confermando come i due approcci, quello dei volatility managed portfolio e del Betting Against Beta, rimangono pertanto prettamente distinte ed indipendenti.

Accanto ai BAB, la seconda strategia analizzata è il risk parity di Asness, Frazzini e Pedersen: viene in questo caso dapprima costruito un portafoglio risk parity per le stesse combinazioni dei fattori di Fama e French, poi regredito il portafoglio a volatilità gestita MVE sullo stesso statico e su quello risk parity. Essendo gli alpha delle regressioni sono sostanzialmente uguali a quelle dell'analisi a fattore multiplo, controllare per il portafoglio risk non ha un impatto diretto nei risultati dei volatility managed portfolio, suggerendo anche in questo caso che le due strategie colgano differenti fenomeni empirici.

Per quanto concerne i costi di transazione (paragrafo 2.3.3), Moreira e Muir hanno considerato diverse modalità che permettessero di cogliere il volatility timing (oltre a quella precedentemente esposta della realized volatility) e che al contempo riducessero l'attività di trading del portafoglio (mensile): questi approcci riducono conseguentemente il trading implicito nella versione originale dei volatility

managed portfolio e quindi i costi di transazione. Per ognuna di esse, sono stati ipotizzati dei costi di transazione crescenti, che vanno da un singolo punto percentuale (1bps) a quattordici (14bps) a trade. Lanciando anche qui delle regressioni per queste nuove strategie, si può notare dalla Tabella 16 del secondo capitolo come gli alpha annualizzati si riducano solo di alcuni punti percentuali a seconda della tipologia di volatility timing posta in essere, ma che continuino a risultare fortemente positivi. Ma soprattutto, i portafogli a volatilità gestita sopravvivono in tutte le loro forme ai costi di transazione: anche nel caso estremo in cui siano pari a 14bps, i quattro portafogli esibiscono degli alpha positivi che oscillano tra 2,03% e 3,63%.

Il paragrafo successivo si basa sulla robustezza della strategia qualora vengano imposti dei vincoli di leva finanziaria. Ho personalmente elaborato un peso pari all'inverso della volatilità (non varianza) realizzata, nonché determinato altre due ponderazioni aggiuntive. Quest'ultime non sono altro che quella originale ma vincolate all'utilizzo di leva: in particolare, la prima ($\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1)$) non la ammette proprio, restituendo un valore del peso pari ad 1 qualora il rapporto $\frac{c}{RV_t^2}$ ne sia maggiore; diversamente, la seconda ($\min(\frac{c}{RV_t^2}, 1,5)$) permette un'esposizione del 50%, consistente con il margine generalmente richiesto dal mercato. Sulla base di questi nuovi pesi mensili, ho calcolato i fattori moltiplicando gli stessi per Mkt per l'intera serie storica e successivamente ho replicato le regressioni singole sui fattori originali al fine di determinare gli alpha delle strategie alternative. I risultati di questi esperimenti sono nella Tabella 18 del secondo capitolo ed evidenziano come anche in presenza di vincoli finanziari, gli alpha delle regressioni continuino ad essere positivi (tra 1,92 e 3,11) e strettamente significativi.

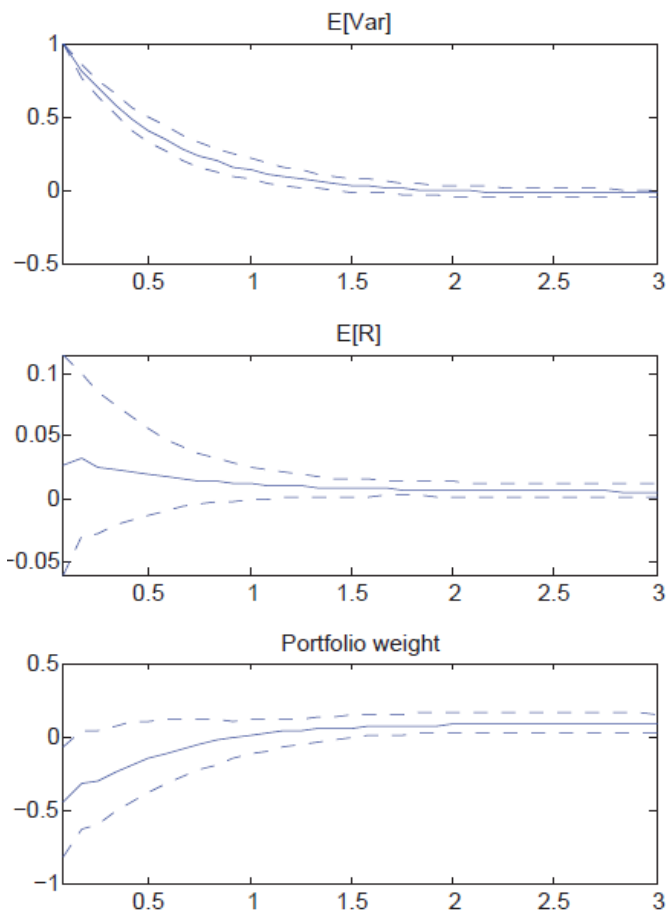
Infine l'ultimo test che ho effettuato sui volatility managed portfolio risponde alla domanda se i risultati precedentemente analizzati possano essere raggiunti mediante l'utilizzo di un fattore comune di volatilità. L'idea di base è che, se i fattori vengono ponderati per un fattore comune di volatilità, gli output non dovrebbero variare drasticamente: a tal fine ho ponderato le variabili per la già calcolata varianza realizzata del fattore Mkt, vista la sua possibile interpretazione come misura di rischio comune. I risultati della Tabella 20 del secondo capitolo mostrano come gli alpha siano leggermente inferiori rispetto a quelli originali della Tabella 3, ma al contempo rimanga praticamente inalterata sia la positività degli stessi, sia la loro significatività. Nella maggior parte dei casi, il timing attraverso una volatilità comune lascia sostanzialmente immutati gli ottimi risultati prima determinati.

Conclusi gli esperimenti sui volatility managed portfolios, nel terzo capitolo ho riportato le analisi teoriche degli autori che cercano di dare una spiegazione alla bontà dei risultati del volatility timing. Ho per prima cosa illustrato la stretta relazione tra gli alpha di un portafoglio a volatilità gestita e la dinamica del prezzo del rischio per un asset individuale. In particolare, data la seguente equazione

dell'alpha incondizionato, $\alpha = (E[\beta_t] - \beta)\mu + cov(\beta_t, \mu_t)$, vediamo come lo stesso venga scomposto in una componente $E[\beta_t] - \beta$ che cattura l'abilità della strategia di fare *volatility timing* ed una, $cov(\beta_t, \mu_t)$, che coglie i co movimenti con i rendimenti attesi. Quando la covarianza tra β_t e μ_t è nulla e non vi è alcuna relazione tra rischio e rendimento, la precedente equazione si riduce a $\alpha = (E[\beta_t] - \beta)\mu$. In altre parole, l'alpha incondizionato deriva completamente dal timing della volatilità, che implica un aumento dell'esposizione al rischio quando la volatilità è bassa ed il tradeoff rischio rendimento è favorevole (e viceversa). I calcoli fatti dagli autori sulla base di questa equazione portano in sostanza a ritenere che la condizione necessaria affinché l'alpha della strategia dei volatility managed portfolios sia positivo è che la relazione tra rischio e rendimento sia sufficientemente debole e non per forza uguale a zero.

Io stesso ho testato l'assenza di relazione tra volatilità realizzata e rendimenti futuri: a tal fine ho lanciato una regressione dei fattori mensili in t sulla volatilità realizzata degli stessi in $t-1$, per capire se l'incremento della volatilità passata predica o meno rendimenti futuri maggiori. La regressione assume la seguente forma $R_t^f = \alpha + RV_{t-1}^f \beta + \varepsilon_t$ ed i risultati sono rappresentati nella Tabella 2 del terzo capitolo, dove si evince che non è possibile determinare alcuna chiara relazione tra la volatilità dei fattori ed i loro rendimenti futuri. Meccanicamente, questa è la ragione per cui la strategia funziona: come detto in precedenza, se la volatilità dei fattori è persistente e non predice un aumento dei rendimenti, allora un incremento della volatilità si traduce solamente nel peggioramento del tradeoff rischio rendimento. Intuitivamente, la mancanza di tale tradeoff nei dati sfocia nella profittabilità del timing della volatilità.

Successivamente ho analizzato la dinamica del trade-off studiata dagli autori mediante un VAR (Vector Auto Regressive) a frequenza mensile per i rendimenti attesi e la varianza del portafoglio mercato condizionati. Utilizzando la funzione impulso di risposta (Impulse Response Function) è stato possibile studiare gli effetti sui rendimenti e sulla varianza di uno shock di volatilità.



I tre grafici illustrano il comportamento delle variabili nel corso del tempo (l'asse delle ascisse sono anni infatti): mentre i primi due si riferiscono ai rendimenti attesi ed alla varianza, l'ultimo restituisce le implicazioni di portafoglio per un investitore che aggiusta la sua esposizione al rischio proporzionalmente al rapporto $E_r[R_{t+1}]/var_t[R_{t+1}]$. Dalla precedente figura (Figura 1 del terzo capitolo) è evidente come la varianza risponda allo shock aumentando vertiginosamente, per poi tornare al livello originario dopo poco più di un anno, in coerenza con la caratteristica *mean-reverting* della variabile. I rendimenti attesi invece crescono inizialmente in maniera inferiore, ma rimangono elevati per un periodo più lungo di tempo. Dato un incremento della varianza ma solo un piccolo e persistente aumento dei rendimenti attesi, il pannello inferiore della Figura mostra che è ottimale per un investitore ridurre, in concomitanza dello shock, la sua esposizione del 50% circa: l'andamento delle prima citate variabile, ovvero il fatto che i rendimenti attesi non siano aumentati abbastanza rispetto l'incremento della varianza, determina uno sfavorevole tradeoff tra rischio e rendimento, ed il peso del portafoglio rimane inferiore ad uno per circa 12 mesi.

La bassa persistenza dello shock di volatilità implica che il tradeoff inizialmente deteriori, ma gradualmente migliori quando la volatilità svanisce nel post-recessione. Dopo le grandi crisi, come la recente recessione iniziata nell'ottobre del 2008, la strategia dei volatility managed portfolios esce

inizialmente dal mercato (vendendo) per evitare il prima citato sfavorevole tradeoff, ma poi cattura, comprando in seguito, la persistenza dell'aumento dei rendimenti attesi quando lo shock svanisce.

Ultimo tema trattato nel paragrafo 3.2.2 è stato il problema di allocazione delle risorse di un investitore di lungo periodo e di quanto lo stesso debba aggiustare la sua posizione a fronte dei cambiamenti di breve termine nella volatilità. In sostanza ho illustrato come per un investitore di lungo periodo sia valido il teorema dei due fondi: tutti gli investitori, a prescindere dall'orizzonte di investimento, mantengono una combinazione lineare di un portafoglio passivo *buy-and-hold* ed un volatility managed portfolio. I pesi dipendono sia dall'orizzonte temporale, sia dalla natura della variazione della volatilità nel tempo, transitoria o permanente (ed ovviamente da parametri quali l'avversione al rischio). Un investitore di breve periodo allocherà tutta la sua ricchezza nel portafoglio a volatilità gestita ($b=1$); quello di lungo periodo invece investirà molto nel volatility managed portfolio se la volatilità dipende dalla parte permanente dei rendimenti, ma in maniera inferiore quando questa deriva dalla parte *mean-reverting* (o transitoria). Ad esempio, nel caso di un orizzonte di investimento di 30 anni (Figura 4 del terzo capitolo), dove la variazione nel tempo della volatilità è completamente dovuta alla porzione transitoria, l'investitore deterrà all'incirca la metà di un volatility managed portfolio rispetto ad uno di breve periodo. In ogni caso, l'investitore gioverà comunque dal timing della volatilità.

Cosa spiega quindi i risultati del mio elaborato? L'economia non è una scienza esatta, ed il successo dei volatility managed portfolios non ha ancora trovato una specifica ragione di essere. Una risposta esatta a questa domanda è quindi al di fuori dello scopo dell'articolo (nonché della mia trattazione), sia esso del 2015, 2016 o 2017, ed è lasciato, dicono gli autori, a sviluppi futuri. Comunque sia, Moreira e Muir cercano di dare adito ad alcune motivazioni. La più facile possibile è che la propensione ad assumere rischio si correla negativamente con la volatilità: in altre parole, l'investitore sceglie di non fare il timing della volatilità in quanto è meno avverso al rischio durante i periodi di alta instabilità finanziaria. Alternativamente, mediante un modello di agenti rappresentativi, una plausibile spiegazione è che la volatilità guidata dalla possibile conoscenza di parametri strutturali sia diversa da quella derivante da forme di rischio note. Ed ancora, ragione dei volatility managed portfolios potrebbe attribuirsi alla lentezza degli investitori a fare trading sul mercato: questo potrebbe spiegare perché un brusco aumento della volatilità non determini un corrispondente incremento dei rendimenti attesi, in linea con i risultati della funzione di impulso della Figura 1 del terzo capitolo precedentemente illustrata.

Una motivazione finale è stata ampiamente trattata nel paragrafo sull'investitore di lungo periodo, ovvero concernente la composizione della natura degli shocks di volatilità. Si è visto come un investitore di lungo periodo possa trovare il portafoglio a volatilità gestita meno conveniente qualora

lo shock della volatilità sia causato dalla parte transitoria (o *mean-reverting* o *discount rate*) della stessa: intuitivamente, un incremento della parte *mean-reverting* potrebbe far diminuire la ricchezza dell'investitore domani, ma non avrebbe alcun effetto di lungo periodo. Tuttavia, gli autori hanno evidenziato quantitativamente che anche un agente di lungo periodo possa beneficiare dai *volatility managed portfolios*: conseguentemente, la variazione della composizione degli shocks riduce, ma non risolve, il puzzle del *volatility timing*.