

Solvency II: analisi del rischio tasso d'interesse e Volatility Adjustment

Relatore:

Chiar.mo Prof.
Gennaro Olivieri

Candidata:

Mariacristina Bottaro
Matr. 218901

INDICE

Introduzione	4
CAPITOLO I “Solvency II”	
1.1. Da Solvency 0 a Solvency II	5
1.1.1 <i>Procedura Lamfalussy</i>	7
1.2 I pilastri della direttiva Solvency II	8
1.3 Definizione e calcolo della Riserve Tecniche	10
1.3.1 <i>Calcolo della Best Estimate</i>	11
1.3.2 <i>Calcolo del Risk Margin</i>	13
1.4 Solvency Capital Requirement e Minimum Capital Requirement	15
1.5 Standard Formula vs Modelli interni	16
CAPITOLO II “La struttura modulare per il calcolo dei requisiti patrimoniali”	
2.1 Suddivisione dei rischi	18
2.2 Rischio di inadempimento della controparte	20
2.2.1 <i>Calcolo del rischio di inadempimento della controparte secondo Standard formula</i>	20
2.3 Il rischio di mercato	23
2.4 Sotto-modulo del rischio di mercato: rischio spread	24
2.5 Sotto-modulo del rischio di mercato: rischio di tasso	27
CAPITOLO III “Analisi del rischio di tasso”	
3.1 Valutare un’obbligazione: rischio di tasso	29
3.2 La Duration come indicatore della sensibilità del prezzo al variare dei tassi d’interesse	29
3.3 Struttura per scadenza dei tassi d’interesse in un mercato default-free	30
3.3.1 <i>Struttura per scadenza dei tassi a pronti</i>	31
3.3.2 <i>Struttura per scadenza dei tassi a termine</i>	32
3.4 Modelli unifattoriali per il calcolo della struttura a termine dei tassi d’interesse	33
3.4.1 <i>Modello Cox, Ingersoll & Ross (CIR)</i>	37
3.4.2 <i>Modello di Vasicek</i>	39
3.4.3 <i>Modello di Black & Scholes</i>	40
3.5 Calcolo della struttura per scadenza dei tassi d’interesse risk-free secondo le Technical Specifications	41
3.5.1 <i>Metodo Smith-Wilson per l’extrapolazione e l’interpolazione</i>	42
3.6 Implicazioni del metodo Smith-Wilson	43
3.7 Aggiustamento per il rischio di credito	44

CAPITOLO IV

“Volatility Adjustment”

4.1 Definizione e calcolo del Volatility Adjustment	45
4.1.1 <i>Currency Volatility Adjustment</i>	46
4.1.2 <i>Aumenti specifici per paese del Volatility Adjustment</i>	48
4.2 Considerazioni sul Volatility Adjustment e curva dei tassi corretta	49
4.3 Ultimate Forward Rate	51

CAPITOLO V

“Applicazione pratica”

5.1 Calcolo del SCR Interest di un portafoglio obbligazionario lato attivi secondo standard formula e modello CIR	52
5.2 Analisi secondo Standard Formula	52
5.3 Analisi secondo il CIR	54
5.3.1 <i>Calibratura del modello</i>	54
5.3.2 <i>Simulazioni con R</i>	56

Conclusioni	63
--------------------	-----------

Bibliografia	65
---------------------	-----------

Sitografia	67
-------------------	-----------

Introduzione

A seguito dei vari eventi negativi accaduti nel campo finanziario a livello globale negli ultimi anni, si è accentuata la necessità di stabilire delle regole più precise e ferree a livello comunitario. Oltre al settore bancario, che già da tempo vedeva l'applicarsi di regole comunitarie, l'altro settore che necessitava di tali regole è quello assicurativo. In Italia, così come negli altri paesi dell'EU, il settore assicurativo occupa gran parte dei risparmi e pertanto è molto importante tutelarlo. Solvency II è una disciplina recente che ha trovato attuazione nel 2015 per far fronte a queste esigenze e sin da allora è in continuo aggiornamento. L'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) è l'organismo europeo che coordina e vigila il settore assicurativo e chiede costantemente alle società assicurative nazionali di apportare migliorie al sistema. L'idea di questo elaborato nasce dal mio interesse verso la materia finanziaria e dal fatto che questo tema, consigliato dal professore è molto attuale e in continua evoluzione. Analizzerò uno dei maggiori rischi a cui sono sottoposte le imprese assicurative e i relativi bilanci ossia il rischio del tasso d'interesse menzionando però anche gli altri rischi come il rischio di credito e il rischio spread. Tali rischi come descriveremo più avanti sono rischi finanziari e le compagnie devono essere in grado di stimare correttamente l'esposizione delle loro voci di bilancio a quest'ultimi altrimenti si potrebbero trovare in una situazione di insolvenza, causando un grave problema all'interno del sistema finanziario.

Nel primo capitolo, inizierò introducendo la disciplina Solvency II e come si è arrivati ad essa, dopodiché, nel secondo capitolo descriverò brevemente i rischi ai quali sono esposte le compagnie di assicurazione con un focus sui rischi finanziari. Proseguirò quindi con il rischio di tasso d'interesse portando l'esempio di due modelli per il calcolo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse, che potrebbero essere usati come modelli interni (il CIR e il modello di Vasicek con un accenno al modello di Black & Scholes) in contrapposizione con il modello utilizzato dall'EIOPA (Smith-Wilson). Infine, nel capitolo quarto descriverò il Volatility Adjustment progettato per ridurre l'impatto della volatilità a breve termine durante situazioni di stress dei mercati finanziari e volto a prevenire il comportamento pro-ciclico delle imprese di assicurazione, ossia quando il valore di mercato degli asset precipita e vi è la tendenza a vendere i propri titoli più rischiosi e ad acquistare quelli meno rischiosi, causando un ulteriore deprezzamento del valore di mercato degli asset. Nel quinto capitolo, infine, presenterò un esempio pratico di calcolo del rischio di tasso d'interesse applicandolo a un portafoglio assicurativo nel lato attivi, calcolato utilizzando il modello CIR ipotizzato come modello interno, a paragone con la standard formula. Nello svolgere tale applicazione, utilizzerò il software R ed Excel.

CAPITOLO I

SOLVENCY II

1.1 Da Solvency 0 a Solvency II

Il settore assicurativo occupa uno spazio molto importante all'interno dell'economia. Ciò ha reso necessario creare una disciplina volta a garantire il mantenimento di un rischio default del settore quanto più basso possibile. Quest'attenzione è stata la base per l'elaborazione dei modelli Solvency 0, Solvency I e Solvency II a livello europeo.

L'adozione del modello di *Solvency 0* consisteva nel recepimento unificato di due direttive precedenti: la Direttiva Danni elaborata nel 1973 e la Direttiva Vita elaborata nel 1979. Tali direttive richiedevano alle compagnie assicurative di stabilire un patrimonio libero (Elementi costitutivi del Margine di Solvibilità – ECMS) almeno pari ad un Margine Minimo di Solvibilità (MMS) il quale era calcolato tenuto conto del volume dei Premi/Sinistri per i rami Danni, e delle Riserve Matematiche/Capitali sotto-rischio per i rami Vita.

Oltre a ciò vi era l'individuazione di una quota di garanzia (QG) ulteriore, che si sommava a MMS, al fine di dotare le imprese di mezzi adeguati fin dalla loro costituzione, e di assicurare che nel corso dell'attività, il margine di solvibilità non scendesse mai al di sotto di un livello minimo stabilito dalla legge, anche in relazione al tipo di business esercitato.

Questi requisiti si rivelarono insufficienti poiché infatti da uno studio storico del settore emerse che negli anni compresi tra il 1980 ed il 1990 il mercato assicurativo USA presentava livelli di insolvenza tra i più elevati, compresi tra un minimo dello 0,2% dei casi ed un massimo di 2,2% (con media assestata intorno all'1%), mentre in Europa vi era il mercato inglese con delle insolvenze minori (pur con un picco massimo collocato intorno al 2% nel 1992), il mercato francese e tedesco dove il rischio di insolvenza risulta praticamente prossimo allo 0%.

Un panorama così diversificato soprattutto in Europa (Francia, Germania e Inghilterra) nonostante si adottasse lo stesso sistema comunitario regolamentare Solvency 0, non poteva che sottintendere la presenza di un malfunzionamento intrinseco dello stesso.

Per tale motivo si proseguì con la realizzazione di un altro modello per ovviare ai problemi del precedente. In realtà, il modello successivo Solvency I era molto simile al modello Solvency 0. Esso è stato recepito in Italia con il d.lgs n. 307/2003. Le principali novità importate erano di carattere meramente quantitativo e comportavano da un lato un aumento, peraltro piuttosto irrilevante, del MMS e della QG, nonché l'elencazione degli elementi costitutivi dell'indice ECMS.

In particolare, per quanto riguarda il primo punto delineato dalla Direttiva *Solvency I*, l'art 44 del codice delle assicurazioni, (oggi abrogato dall'art 1 del dlgs. n. 74/2015) disponeva la necessità “*costante di un margine di solvibilità sufficiente per la complessiva attività esercitata nel territorio della Repubblica ed all'estero*”. In tal senso

viene definito solo il c.d. Margine di Solvibilità Disponibile (ora MSD), mentre manca del tutto un riferimento al Margine di Solvibilità Richiesto (MSR) che verrà disciplinato per mezzo di atti di regolamentazione secondaria da parte dell'ISVAP.

Il MSD veniva calcolato in maniera differenziata a seconda del riferimento ai macro-rami Vita e Danni, come già sancito dal modello *Solvency 0*. Il computo del Margine sul comparto danni però mise in evidenza alcuni svantaggi:

1. mancata differenziazione in sotto-rami (calcolo sul totale della gestione danni), in particolare le aliquote da applicare sui premi e sui sinistri non risultano correlati alla tipologia dei rami ed alla loro effettiva rischiosità;
2. il rischio finanziario non era considerato;
3. non veniva considerata la tipologia del trattato riassicurativo.

Per quanto attiene al ramo Vita vi erano pure degli svantaggi ossia:

1. Calcolo dei capitali sotto-rischio solo se positivi. In pratica non era considerato il differenziale demografico;
2. anche in questo caso il rischio finanziario degli investimenti non era in alcun modo contemplato.

Nel modello *Solvency I*, quindi il MSD era calcolato solo rispetto a singole unità d'impresa, senza alcun riferimento al tasso consolidato. In definitiva si può affermare che la formula di computo facesse riferimento esclusivo all'*underwriting risk*, senza considerare effetti di correlazione (*tail dependences*) di ulteriori ipotesi/rami (*asset risk, credit risk, liquidity risk, operational risk etc.*) tutti aspetti poi posti invece come base per il modello *Solvency II*. Quest'ultimo risponde, infatti, alla necessità di spiegare e risolvere quelli che sono i principali punti di debolezza del sistema *Solvency I*. Il quadro storico entro cui si colloca *Solvency II* è successivo alla crisi del 2008, per tale motivo esso vuole essere una risposta concreta agli effetti della crisi finanziaria.

Tale crisi era stata causata in primo luogo, da una crescente tendenza alla liberalizzazione tariffaria, che aveva portato ad un maggiore accesso al mercato, senza che a ciò corrispondesse una incisiva politica di vigilanza, tendendo spesso a privilegiare il versante dell'investimento rispetto a quello dell'investitore, e soprattutto in un generale calo dei proventi derivanti dagli investimenti, con conseguente contenimento delle forme di autofinanziamento (limitate a livello legislativo) e contenimento dei margini di profitto.

In secondo luogo, una delle ragioni a favore di una revisione del sistema è legata alle politiche di marketing esterno, ed in particolare alla crescente pressione degli azionisti al contenimento del capitale impiegato per incrementarne la relativa redditività, con conseguente risoluzione della diversificazione.

In terzo luogo, è possibile individuare ragioni di governance stimolati dal fenomeno della concentrazione in gruppo o dalla tendenza alle fusioni tra compagnie.

In generale è possibile affermare che il ripensamento dell'assetto prudenziale del sistema *Solvency II* altro non rappresenta che un ampliamento della copertura legislativa, introdotta dal sistema *Basel II* in materia di regolamentazione del rischio in ambito bancario, anche al sistema assicurativo. In una simile ottica il nuovo modello si pone come uno strumento di regolamentazione sia di aspetti, per così dire, quantitativi della gestione dei rischi, sia di aspetti di *governance*.

L'adozione del nuovo regime *Solvency II* ha lo scopo dichiarato di:

1. eliminare la differenza di disciplina esistente in materia di accesso al mercato;
2. incrementare la tutela degli assicurati;
3. adottare un modello *risk-based*;
4. dettare regole di vigilanza che tengano conto dell'organizzazione in forma di gruppo.

La scelta del legislatore europeo per attuare quanto finora detto è stata quella di adottare un sistema che risultasse sì complesso, ma soprattutto un sistema che si potesse strutturare come regolamentazione plurilivello.

1.1.1 Procedura Lamfalussy

La direttiva *Solvency II* ha seguito una procedura concorde alla richiesta di maggiore armonizzazione nei settori bancari, assicurativi e finanziari. Tale procedura detta, procedura Lamfalussy dal suo ideatore, è strutturata su quattro livelli (quattro poiché è stata aggiunta la direttiva Omnibus II che ha modificato la norma di cornice), ciascuno dei quali rappresenta una diversa tappa del processo di regolamentazione.

Al primo livello (codecisione), sono adottati i principi fondamentali che stabiliscono i valori essenziali di un nuovo atto legislativo; a questo livello si colloca l'attività legislativa in senso stretto, ovvero l'adozione da parte del Parlamento europeo e del Consiglio di regolamenti o direttive. Gli atti legislativi adottati dovrebbero limitarsi a definire i principi generali e gli elementi essenziali della materia da disciplinare, delegando al livello successivo l'adozione delle relative misure di attuazione.

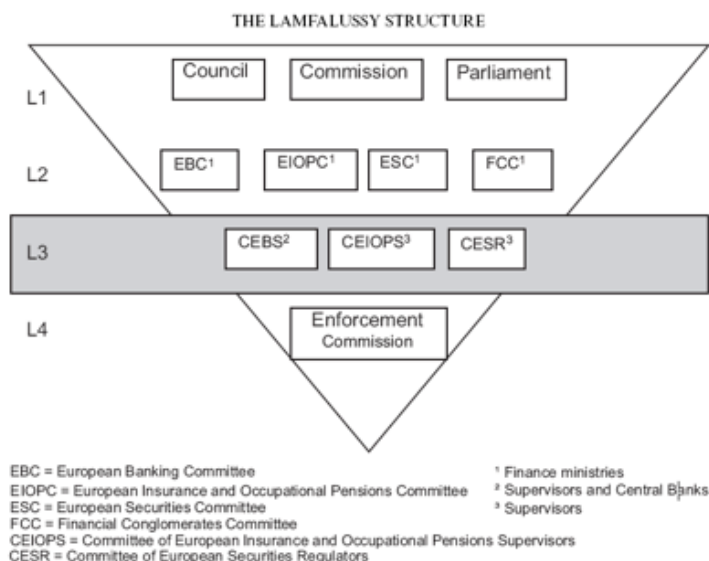
Al secondo livello (comitologia), invece troviamo le disposizioni di attuazione, effettuate dalla Commissione degli atti del primo livello. La commissione però opera con l'aiuto di due comitati ossia:

1. ESC (comitato europeo dei valori mobiliari); composta da rappresentanti degli Stati membri e presieduta da un rappresentante della commissione.
2. CESR (comitato delle autorità europee di regolamentazione dei valori mobiliari) composto dai presidenti delle autorità di vigilanza sui mercati mobiliari nazionali. Il CESR interviene sia al secondo livello, con funzioni consultive sul merito delle misure di attuazione da adottare, sia al terzo livello quale organo di coordinamento e di indirizzo, al fine di assicurare una corretta applicazione del diritto comunitario.

Il terzo livello (Cooperazione) consiste in una cooperazione rafforzata e in un coordinamento tra le autorità nazionali di vigilanza per assicurare una trasposizione coerente ed equivalente delle nuove regole.

A questo livello il CESR ha il compito di:

- definire linee direttrici standard, comuni per l'adozione di norme regolamentari a livello nazionale;
- adottare raccomandazioni interpretative comuni;
- comparare e riesaminare le prassi regolamentari nazionali, al fine di assicurare l'applicazione effettiva delle norme comunitarie e individuare i migliori prezzi. Il quarto e ultimo livello riguarda il controllo della Commissione europea sull'attività di attuazione da parte degli stati membri delle norme e degli orientamenti adottati ai tre livelli precedenti.



1.2 I pilastri della direttiva Solvency II

La direttiva Solvency II poggia su tre pilastri considerati gli obiettivi principali di tale direttiva riprendendo la struttura degli accordi di Basilea per il settore bancario.

Il primo pilastro concerne il calcolo dei requisiti quantitativi delle imprese comprendente:

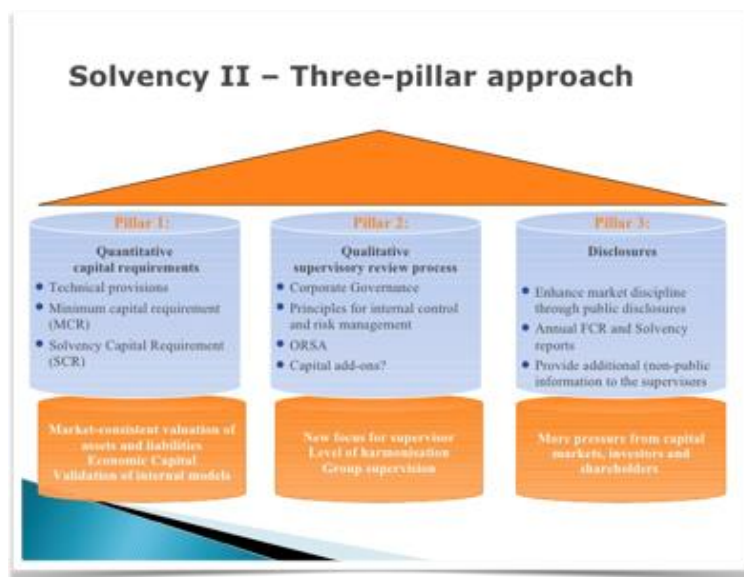
- disposizioni relative a criteri di valutazione di attivo e passivo;
- determinazione dei fondi propri e i criteri per la loro ammissibilità ai fini della copertura dei requisiti patrimoniali nonché il calcolo del SCR (Solvency Capital Requirement) di cui discuteremo più avanti;
- il calcolo del MCR (Minimum Capital Requirement);
- gli investimenti a copertura delle riserve tecniche e del SCR;
- il calcolo dei requisiti patrimoniali per i gruppi d'impresa.

Il secondo invece riguarda i requisiti di tipo qualitativo e l'attività di vigilanza ed è costituito da un lato da norme che concernono la governance, il risk management e il controllo interno dell'impresa e dall'altro, dalla disciplina delle attività, degli strumenti e dei poteri della vigilanza. Sotto il primo profilo è molto importante la prescrizione secondo cui l'impresa, nell'ambito del proprio sistema di risk management, effettui regolarmente una propria valutazione dei rischi e della posizione di solvibilità ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) e aggiusti conseguentemente i requisiti patrimoniali.

Il terzo pilastro infine, regola l'informativa e la disciplina di mercato. Oltre a una serie di disposizioni relative ai contenuti e alle modalità dell'informativa alla vigilanza, esso prevede obblighi informativi nei confronti del mercato, che toccheranno aspetti quali la governance e il risk management, la posizione di solvibilità e l'eventuale mancato rispetto dei requisiti patrimoniali.

Secondo e terzo pilastro non saranno però oggetto di analisi del seguente elaborato, che si soffermerà invece sulle metodiche di calcolo dei requisiti patrimoniali.

L'organismo che vigila sull'applicazione della direttiva Solvency II è l'EIOPA ossia l'European Insurance and Occupational Pensions Authority istituita nel 2011. Essa sorveglia nonché innova attraverso consultazioni, raccomandazioni il calcolo dei requisiti delle singole imprese assicuratrici/fondi pensioni pubblicando periodicamente dati o metodologie alle quali gli stati infra-Euro devono attuare e fornisce documentazioni necessarie agli stati per il calcolo delle Technical Provisions (Riserve tecniche).



1.3 Definizione e calcolo delle Riserve Tecniche

Come detto poc' anzi, all'interno del primo pilastro vi è l'analisi e il calcolo delle riserve tecniche (TP) nonché la successiva determinazione dei requisiti patrimoniali SCR e MCR, maggiore innovazione apportata da Solvency II. Come sappiamo, i rischi ai quali si espongono le imprese assicuratrici nascono proprio dal contratto assicurativo. Tale contratto prevede che l'assicuratore si impegni a rivalere l'assicurato di un danno, qualora si verificasse, mediante il pagamento di un capitale o di una rendita, previa riscossione di un premio. Dal punto di vista della promessa che assicuratore e assicurato si scambiano, possiamo definire il contratto assicurativo come un contratto di tipo sinallagmatico. Data questa assunzione, emerge che il tema della solvibilità nel campo assicurativo assume una rilevanza particolare, infatti, nel caso in cui l'intermediario assicurativo risulta insolvente, l'assicurato non solo perde la garanzia di risarcimento del danno nel caso in cui si manifesti l'evento per il quale si era assicurato, ma perde anche i premi pagati in precedenza per ottenere la prestazione assicurativa. Possiamo definire quindi un concetto di solvibilità dell'impresa assicuratrice come "la capacità di far fronte, con una determinata probabilità ed entro un determinato orizzonte temporale, agli impegni aleatori realisticamente descritti da una struttura probabilistica". Ne deriva che, tanto maggiore è questa probabilità, tanto minori sono le possibilità di fallimento e tanto maggiore sarà la propensione degli individui a stipulare contratti assicurativi. A garanzia di tale solvibilità vi sono le riserve tecniche e i requisiti patrimoniali. Tali riserve sono degli accantonamenti per far fronte ai debiti ed agli impegni verso gli assicurati e sono costituite dal complesso dei premi raccolti dalla compagnia quindi non solo quelli effettivamente guadagnati. Esse non costituiscono un incremento patrimoniale ma un "ricavo anticipato" che servirà a coprire gli indennizzi per i sinistri che si verificheranno in futuro, o per quelli già verificati ma non ancora liquidati. Non hanno un limite massimo bensì crescono all'aumentare dei rischi degli assicurati.

Le disposizioni generali in materia di riserve tecniche sono poste dall'art. 76 della direttiva Solvency II (138/2009/CE) che insieme al Codice delle Assicurazioni Private compone la cornice legislativa del settore assicurativo italiano. Il suddetto articolo afferma che le riserve tecniche sono determinate come la somma della Best Estimate (BE) e il Risk Margin (RM), quest'ultimo calcolato con il criterio del *cost of capital*, ossia in base al costo del capitale necessario per far fronte agli impegni nei confronti degli assicurati sino a scadenza. L'EIOPA, attraverso le technical specifications, indica i metodi quantitativi per il calcolo della Best Estimate e Risk Margin.

Il comma 3 dell'articolo 76 aggiunge che le riserve vengono calcolate "utilizzando coerentemente le informazioni disponibili sui mercati finanziari nonché i dati disponibili sui rischi di sottoscrizione". Il comma 4 precisa che le riserve sono calcolate in modo prudente, affidabile e obiettivo seguendo le disposizioni degli articoli 77 a 82.

L'articolo 77 della direttiva, pertanto afferma che il valore delle riserve tecniche è pari alla somma della Best Estimate più il Risk Margin. Il secondo comma precisa: *“la migliore stima (BE) corrisponde alla media dei flussi di cassa futuri ponderata con la probabilità, tenendo conto del valore temporale del denaro (valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri) sulla base della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio. Il calcolo della migliore stima è basato su informazioni aggiornate e credibili e su ipotesi realistiche ed è realizzato utilizzando metodi attuariali e statistiche adeguati, applicabili e pertinenti”*. Le imprese di assicurazione e riassicurazione valutano separatamente la migliore stima e il margine di rischio. Quest'ultimo è tale da garantire che il valore delle TP sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione e riassicurazione (Art. 77 comma 3).

1.3.1 Calcolo Best Estimate

La Best Estimate (BE) o migliore stima definita dall'art. 77 comma 2 (direttiva 138/2009/CE) «corrisponde alla media dei flussi di cassa futuri ponderata con la probabilità, tenendo conto del valore temporale del denaro sulla base della pertinente struttura per scadenze dei tassi di interesse privi di rischio». Questo criterio introduce un importante cambiamento rispetto al precedente criterio di valutazione utilizzato nelle assicurazioni danni: il costo attualizzato che sostituisce il costo ultimo. L'attualizzazione è effettuata utilizzando una curva prefissata uguale per tutto il mercato, calcolata sulla base della curva dei tassi di interesse swap depurata dal rischio di credito (attraverso un credit risk adjustment) e aggiustata rispetto alle condizioni del mercato stesso attraverso il Volatility Adjustment che analizzeremo in seguito. Utilizzare dei tassi privi di rischio per calcolare la Best Estimate trova giustificazione nel fatto che l'aggiustamento per i rischi viene considerato attraverso il Risk Margin. Tale scelta è stata molto criticata da parte dell'industria assicurativa e ha portato alla decisione di introdurre il Volatility Adjustment nella struttura dei tassi, la cui finalità è quella di attenuare l'effetto prociclico delle valutazioni a fair value in condizioni di mercati finanziari “stressati”. Inoltre, il calcolo della Best Estimate è «basato su informazioni aggiornate e credibili e su ipotesi realistiche ed è realizzato utilizzando metodi attuariali e statistici adeguati, applicabili e pertinenti» (art. 77.2). In formule si ha che:

$$BE(F) = \sum_{t=1}^T \frac{E(F_t)}{(1 + i_t)^t}$$

Dove F_t rappresenta il flusso aleatorio di cassa al tempo t (che va dall'istante 1 all'istante T) originato dalle polizze oggetto di valutazione e i_t il relativo tasso di attualizzazione privo di rischio.

“La proiezione dei flussi di cassa [...] tiene conto di tutte le entrate e uscite di cassa necessarie per regolare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione per tutta la loro durata di vita” (art. 77.2) e vanno considerate «tutte le spese che saranno sostenute per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione» (art. 78.1). Bisogna inoltre considerare l’inflazione, compresa quella riferibile alle spese e ai sinistri.

La direttiva esprime come nella BE debbano essere considerati tutti i flussi aleatori derivanti da tutti gli scenari possibili. Ciò fa sì che si debba tenere conto dell’incertezza dei futuri cash flow dovuta sia al comportamento degli assicurati (si pensi alle garanzie finanziarie e alle opzioni contrattuali) sia al comportamento del management dell’impresa.

Solvency II sottolinea infatti come una corretta determinazione della BE debba tenere conto dei seguenti fattori:

- variazioni nel timing, nella frequenza e nella severity dei sinistri;
- variazioni nella tempistica di liquidazione dei sinistri e delle spese;
- variazioni nell’ammontare delle spese;
- cambiamenti nel valore di un indice/mercato usato per determinare gli ammontari dei sinistri;
- cambiamenti nei fattori entity-specific e portfolio-specific;
- incertezza nei comportamenti degli assicurati;
- path dependency (i cash-flows dipendono non solo dalle condizioni economiche alla data del cash-flows, ma anche dalle condizioni economiche alle date precedenti);
- interdipendenza tra due o più cause di incertezza.

Calcolare l’interdipendenza può risultare piuttosto complesso per tale motivo sotto il profilo analitico è prioritario che venga condotta un’attenta valutazione delle condizioni di equilibrio tra il dispendio di mezzi necessario a mantenere il grado di approssimazione delle simulazioni entro limiti trascurabili e il guadagno di informazione effettivamente ottenibile dall’incremento della complessità del modello. È importante aggiungere che la direttiva prevede anche la possibilità che, in talune circostanze e rispetto ad alcune tipologie di contratti, la Best Estimate possa essere negativa, portando quindi a registrare a bilancio un’attività. Ciò è in linea con quanto previsto da Solvency II e dovrebbe accadere quando il valore dei flussi attesi in entrata è superiore al valore attuale atteso dei flussi di cassa in uscita per spese e sinistri.

1.3.2 Calcolo del Risk Margin

Il Risk Margin è definito dall'articolo 77 comma 3 della direttiva Solvency II come quel requisito "tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione." Più un generale è interpretabile come il margine che remunera il costo dell'incertezza insita nella valutazione delle passività. Esso è calcolato ai sensi dell'art. 77 comma 5 «determinando il costo della costituzione di un importo di fondi propri ammissibili pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione per tutta la loro durata di vita».

Le norme di secondo livello stabiliscono che nella stima del Risk Margin devono essere considerati i seguenti rischi, principalmente di natura assicurativa, motivati dalla natura stessa del Risk Margin come aggiustamento per il rischio associato ai flussi di cassa:

- rischio assicurativo di sottoscrizione (underwriting risk) relativo al business esistente;
- rischio di insolvenza della controparte (default risk) con riferimento alle operazioni di riassicurazione o ai contratti ceduti a special purpose vehicles (SPV);
- rischi operativi;
- unavoidable market risk non materiale per le passività non-life.

Il metodo per il calcolo è denominato "metodo del costo del capitale" (cost of capital approach o CoC approach) e si basa sull'idea che i fondi propri detenuti per fronteggiare i rischi legati ai contratti stipulati hanno un costo in termini di remunerazione richiesta dagli azionisti. Il CoC equivale infatti al costo dell'equity, per tale motivo viene calcolato attraverso il CAPM (Capital Asset Pricing Model) che include:

- un premio per il rischio equity, che rappresenta la maggiorazione rispetto al tasso default-free richiesta sul tasso di interesse dagli investitori in virtù dell'investimento in equity;
- il fattore beta che rappresenta le performance degli stock nel settore assicurativo in relazione a quello di mercati più ampi.

Il risultato è aggiustato tenendo conto di altri fattori economici. L'EIOPA dopo un'approfondita analisi ha ritenuto opportuno, utilizzare i tassi storici come input per il calcolo del CoC rate. Tale tasso è pari al 6%.

Per riassumere quindi, ai sensi dell'art. 37 dell'Atto delegato 2015/35 il margine di rischio viene così calcolato:

$$RM = CoC \frac{\sum SCR(t)}{(1+i_r(t+1))^{t+1}}$$

dove:

- (a) CoC è il tasso del costo del capitale 6%;
- (b) la somma comprende tutti i numeri interi incluso lo zero;
- (c) SCR(t) è il requisito patrimoniale di solvibilità di cui all'articolo 38, paragrafo 2, dopo t anni;
- (d) $i_r(t+1)$ è il tasso di interesse privo di rischio di base per la scadenza di t+1 anni.

Il tasso di interesse privo di rischio di base $r(t+1)$ è scelto in base alla valuta utilizzata per il bilancio dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione. Qualora le imprese di assicurazione e di riassicurazione calcolino il proprio requisito patrimoniale di solvibilità utilizzando un modello interno approvato e stabiliscano che il modello è adeguato per calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità, per ogni momento della durata di vita delle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione, devono utilizzarlo per calcolare gli importi SCR(t). Le imprese di assicurazione e di riassicurazione imputano il margine di rischio per l'intero portafoglio di obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione alle aree di attività di cui all'articolo 80 della direttiva 2009/138/CE. L'imputazione riflette in modo adeguato i contributi delle aree di attività al requisito patrimoniale di solvibilità di cui all'articolo 38, paragrafo 2, nel corso della durata di vita dell'intero portafoglio di obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione.

L'art. 38 aggiunge infatti che: *“Il calcolo del margine di rischio è basato su tutte le seguenti ipotesi:*

- (a) *l'intero portafoglio di obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione che calcola il margine di rischio (l'impresa originaria) è assunto da un'altra impresa di assicurazione o di riassicurazione (l'impresa di riferimento);* (b) *nonostante la lettera a), qualora l'impresa originaria svolga simultaneamente attività di assicurazione vita e non vita ai sensi dell'articolo 73, paragrafo 5, della direttiva 2009/138/CE, il portafoglio di obbligazioni di assicurazione relativo alle attività di assicurazione vita e alle obbligazioni di riassicurazione vita e il portafoglio di obbligazioni di assicurazione relativo alle attività di assicurazione non vita e alle obbligazioni di riassicurazione non vita sono assunti separatamente da due diverse imprese di riferimento;* (c) *il trasferimento di obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione comprende qualsiasi contratto di riassicurazione e accordi con società veicolo riguardanti tali obbligazioni;* (d) *prima che il trasferimento abbia luogo, l'impresa di riferimento non ha alcuna obbligazione di assicurazione o di riassicurazione né fondi propri;* (e) *dopo il trasferimento, l'impresa di riferimento non assume nuove obbligazioni di assicurazione o di riassicurazione;* (f) *dopo il trasferimento, l'impresa di riferimento raccoglie un importo di fondi propri*

ammissibili pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione per tutta la loro durata di vita; (g) dopo il trasferimento, l'impresa di riferimento dispone di attività pari alla somma del proprio requisito patrimoniale di solvibilità e delle riserve tecniche al netto degli importi recuperabili da contratti di riassicurazione e da società veicolo; (h) le attività sono scelte in modo tale da ridurre al minimo il requisito patrimoniale di solvibilità per il rischio di mercato cui l'impresa di riferimento è esposta; (i) il requisito patrimoniale di solvibilità dell'impresa di riferimento tiene conto di tutti i seguenti rischi: i) il rischio di sottoscrizione riguardo all'attività trasferita, ii) qualora sia sostanziale, il rischio di mercato di cui alla lettera h), diverso dal rischio di tasso di interesse, iii) il rischio di credito riguardo ai contratti di riassicurazione, agli accordi con società veicolo, agli intermediari, ai contraenti e a ogni altra esposizione sostanziale strettamente correlata alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione, iv) il rischio operativo (j) la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche, di cui all'articolo 108 della direttiva 2009/138/CE, nell'impresa di riferimento corrisponde per ogni rischio alla capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche nell'impresa originaria; (k) non vi è capacità di assorbimento di perdite delle imposte differite di cui all'articolo 108 della direttiva 2009/138/CE per l'impresa di riferimento; (l) l'impresa di riferimento, fermo restando quanto indicato alle lettere e) e f), adotterà future misure di gestione coerenti con le future misure di gestione previste, di cui all'articolo 23, dell'impresa originaria. 2. Nel corso della durata di vita delle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione, si presume che il requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione di cui all'articolo 77, paragrafo 5, primo comma, della direttiva 2009/138/CE sia pari al requisito patrimoniale di solvibilità dell'impresa di riferimento sulla base delle ipotesi di cui al paragrafo 1. 3. Ai fini del paragrafo 1, lettera i), un rischio è ritenuto sostanziale qualora il suo impatto sul calcolo del margine di rischio potrebbe influenzare le decisioni o il giudizio degli utenti di tali informazioni, ivi comprese le autorità di vigilanza.”

1.4 Solvency Capital Requirement (SCR) e il Minimum Capital Requirement (MCR)

Il Solvency Capital Requirement (SCR) è il principale requisito patrimoniale previsto unicamente dal nuovo regime: esso corrisponde al Value at Risk (VaR) dei fondi propri dell'impresa con riferimento a un livello di confidenza del 99,5 per cento e a un orizzonte temporale di un anno. Esso è quell'ammontare che le compagnie devono coprire con gli Own Funds (fondi propri) e dev'essere calcolato annualmente. L'SCR dovrà coprire un eventuale perdita inattesa e deve risultare calibrato in modo da considerare tutti i rischi quantificabili a cui l'impresa è esposta. La direttiva 2009/138/CE fornisce una descrizione delle componenti del SCR ossia i rischi che concorrono a determinare l'ammontare, senza precisare però le modalità di calcolo che invece sono indicate

nelle Technical Specifications ossia atti di secondo livello. A quest'ultima documentazione è richiesto il compito di fornire disposizioni di dettaglio, in modo da assicurare un approccio armonizzato all'utilizzo dei modelli interni e da fornire alle imprese gli incentivi per una migliore valutazione dei rischi.

Il Minimum Capital Requirement (MCR) è un'ulteriore misura derivata dal SCR che è di più facile computazione e rappresenta la soglia patrimoniale minima al di sotto del quale il livello di rischio diviene inaccettabile per gli assicurati come sancito dall'art. 129 della direttiva 138/2009/CE. La direttiva prevede che sia calcolato secondo il Value-at-Risk dei fondi propri dell'impresa con riferimento a un livello di confidenza dell'85%. Viene calcolato come funzione lineare di un insieme delle seguenti variabili:

- riserve tecniche;
- premi contabilizzati;
- capitale a rischio;
- imposte differite;
- costi amministrativi.

In ogni caso esso non può essere inferiore al 25% né eccedere il 45% del requisito patrimoniale di solvibilità dell'impresa. Per calcolare l'SCR e l'MCR però, si deve prima procedere al calcolo delle riserve tecniche poiché i requisiti sono calcolati in base alle passività dell'impresa.

1.5 Standard Formula vs Modelli interni

Per il calcolo del SCR e del MCR vi sono due possibili metodi. Lo scopo di creare una disciplina comune a livello comunitario ha infatti fatto nascere anche l'esigenza di trovare un modello uniforme di calcolo per i vari rischi che potesse essere applicato da ogni singola impresa assicuratrice. L'EIOPA ha infatti messo a punto un modello detto Standard Formula che pone le metodologie base per il calcolo dell'SCR. Tale metodo è rivolto a quelle imprese che non essendo molto grandi non hanno necessità di procurarsi un modello interno di calcolo, essendo molto dispendioso. Ovviamente, però la Standard Formula non risulta plasmata sul peculiare profilo di rischio di ogni singola impresa assicuratrice, per tale motivo il risultato può essere diverso da quello che invece si otterrebbe con l'utilizzo di un modello interno (spesso sovrastimato). Alcuni dei requisiti ricavati con Standard Formula tra cui l'SCR interest di cui ci occuperemo in seguito, si basano su scenario analysis dove vengono quindi comparati scenari in rialzo e in ribasso con il caso base delle varie variabili del mercato. In questo caso gli scenari (Up-Down) vengono procurati dall'EIOPA attraverso gli ESG (generatori di scenari economici). L'EIOPA inoltre, per far sì che comunque ogni assicurazione possa tener conto del suo particolare profilo di rischio, dà la possibilità di verificare il risultato del requisito ottenuto attraverso la procedura ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) regolata dal secondo pilastro della direttiva. Se le imprese decidono

invece di adottare un modello interno, esso può essere totale o parziale, ma ovviamente una volta adottato il metodo di valutazione (standard formula o modello interno) dev'essere mantenuto salvo non si effettuino operazioni straordinarie. Inoltre, il modello interno dev'essere autorizzato precedentemente all'applicazione dall'IVASS ossia l'autorità vigilante in materia assicurativa nazionale. Faremo un confronto numerico sui risultati ottenuti con modello interno e standard formula nel quinto capitolo.

CAPITOLO II

STRUTTURA MODULARE PER IL CALCOLO DEI REQUISITI PATRIMONIALI

2.1 Suddivisione dei rischi

Per il calcolo dell'SCR secondo Standard Formula, bisogna tenere in considerazione i rischi ai quali sono esposte le società assicuratrici. Secondo la direttiva, i rischi si possono dividere in sei macro-aree con i rispettivi sotto-moduli di rischi.

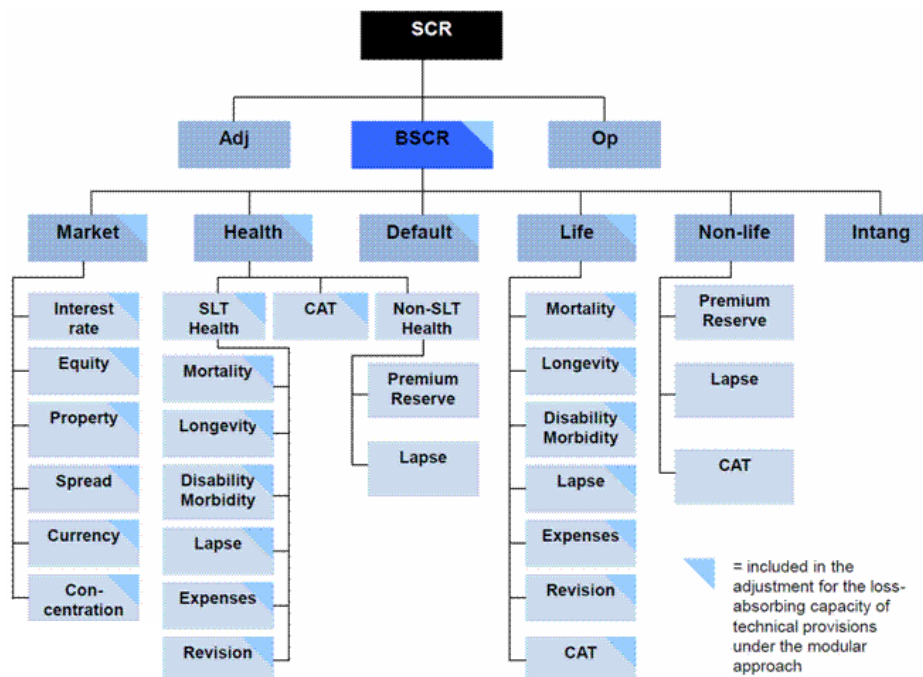


Figura 2.1- Struttura rischi per calcolo SCR

Le sei macro-aree sono: il rischio Market, il rischio Health, il rischio Default, il rischio Life, il rischio Non-Life e il rischio Intangible asset più i rischi operativi. Di queste categorie, il rischio Default (rischio di inadempimento di controparte) e market (rischio mercato) sono rischi non assicurativi poiché indipendenti dall'oggetto dell'impresa assicuratrice, mentre i restanti sono rischi tecnici peculiari dell'oggetto delle singole imprese assicuratrici. Il risultato finale è dato dalla somma algebrica del Basic SCR (BSCR) dato dal calcolo dei sei rischi, e del modulo Operational risk (rischi operativi) considerando gli Adjustments (Adj) che riflettono la capacità di assorbimento di perdite sia delle riserve tecniche Life (Adj_{TP}) che delle imposte differite (Adj_{DT}). In formula il SCR è pari a:

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{OP} \quad (1.1)$$

Il Basic SCR (BSCR) è ottenuto aggregando i sei moduli che corrispondono ai macrorischi ipotizzati dal primo pilastro di Solvency II.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j + SCR_{intangibles}} \quad (1.2)$$

Dove i e j indicano i sei moduli che compongono il BSCR e $Corr_{ij}$ il coefficiente di correlazione lineare tra l'i-esimo e il j-esimo modulo. La matrice di correlazione degli Atti Delegati, fissata dall'EIOPA, è riportata nella tabella 1.3.

Modulo i/j	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1,00				
Default	0,25	1,00			
Life	0,25	0,25	1,00		
Health	0,25	0,25	0,25	1,00	
Non-Life	0,25	0,50	0,00	0,00	1,00

Tabella 1.3: matrice di correlazione tra moduli degli Atti Delegati

In merito alla logica che sottende la formula per il calcolo del BSCR, si sottolinea che i requisiti di capitale rappresentano dei VaR e aggregare tali misure di rischio richiede l'utilizzo di metodologie complesse. L'EIOPA ha risolto la questione effettuando una semplificazione e considerando gli SCR come se fossero degli scarti quadratici medi. L'uso di una matrice di correlazione come quella indicata dall'EIOPA si basa sull'assunzione che le dipendenze tra rischi possano essere spiegate interamente usando un coefficiente di correlazione lineare. Le macro-aree coincidenti con i rischi fondamentali da calcolare trovano una definizione all'interno della direttiva 138/2009/CE. In questa trattazione approfondiremo i rischi finanziari rischio di inadempimento della controparte e rischio di mercato, in particolare per quanto riguarda il rischio di mercato ci soffermeremo su rischio spread e rischio di tasso. Inoltre, tali rischi sono comuni anche alla direttiva Basilea in materia bancaria.

2.2 Rischio di inadempimento della controparte

Il rischio di inadempimento della controparte definito dall'art. 13 della direttiva (2009/138/CE) precedentemente citata, deve rispecchiare le possibili perdite dovute all'inadempimento imprevisto o al deterioramento del merito di credito delle controparti e dei debitori delle imprese di assicurazione nel corso dei dodici mesi successivi alla data cui è riferita la valutazione. Tale rischio si può dividere in: rischio di insolvenza (counterparty risk) e il rischio di migrazione (migration risk). Il primo rischio è definito come il rischio che la controparte di un contratto non mantenga l'impegno preso e quindi risulti insolvente, il secondo rischio è rivolto invece all'impresa assicuratrice sia soggetta a un downgrading ossia che potrebbe scostarsi dalle valutazioni effettuate dalle società di rating e scendere di rating nell'orizzonte temporale di un anno (anche detto come rischio deterioramento merito di credito). Il modello del rischio di inadempimento di controparte dovrebbe coprire i contratti finalizzati al trasferimento dei rischi, quali:

- accordi di riassicurazione;
- cartolarizzazioni e derivati;
- crediti verso intermediari;
- eventuali altre esposizioni creditizie non coperte dal rischio di spread.

2.2.1 Calcolo del rischio di inadempimento della controparte secondo Standard Formula

L'EIOPA, per quantificare il rischio di inadempimento della controparte parte da una distinzione tra due tipi di esposizioni, indicate come esposizioni di tipo 1 e tipo 2 ciò comporta un trattamento diverso a seconda delle loro caratteristiche. Riprese dal regolamento delegato 35/2015 all'articolo 189, le esposizioni di tipo 1 sono esposizioni relative a:

- a) contratti di attenuazione del rischio, compresi accordi di riassicurazione, società veicolo, cartolarizzazioni assicurative e derivati;*
- b) depositi bancari;*
- c) depositi presso imprese cedenti, se il numero delle esposizioni single-name non è superiore a 15;*
- d) impegni ricevuti da un'impresa di assicurazione o di riassicurazione che sono stati richiamati ma non versati, se il numero delle esposizioni single-name non è superiore a 15, compreso il capitale sociale sotto forma di azioni ordinarie e azioni privilegiate richiamato ma non versato, gli impegni giuridicamente vincolanti richiamati ma non versati di sottoscrivere e pagare passività subordinate, fondi iniziali richiamati ma non versati, contributi dei membri o l'equivalente elemento dei fondi propri di base per le mutue e le*

imprese a forma mutualistica, garanzie richiamate ma non versate, lettere di credito richiamate ma non versate, crediti richiamati ma non versati vantati da mutue e società a forma mutualistica nei confronti dei propri membri tramite il richiamo di contributi supplementari;

- e) impegni giuridicamente vincolanti forniti o concordati dall'impresa che possono determinare obbligazioni di versamento a carico di una controparte dipendenti dal merito di credito o dall'inadempimento, comprese garanzie, lettere di credito, lettere di patrocinio fornite dall'impresa.*

Le esposizioni di tipo 2 invece sono tutte le esposizioni creditizie non comprese nel sottomodulo del rischio di spread che non sono esposizioni di tipo 1, compreso quanto segue:

- a. i crediti nei confronti di intermediari;*
- b. i debitori contraenti;*
- c. i prestiti ipotecari conformi ai requisiti dell'articolo 191, paragrafi da 2 a 13 del regolamento delegato 35/2015;*
- d. i depositi presso imprese cedenti, se il numero delle esposizioni single-name è superiore a 15;*
- e. gli impegni ricevuti da un'impresa di assicurazione o di riassicurazione che sono stati richiamati ma non versati, se il numero delle esposizioni single-name è superiore a 15.*

Le imprese di assicurazione e di riassicurazione possono, a loro discrezione, considerare tutte le esposizioni alle lettere d ed e esposizioni di tipo 1 a prescindere dal numero delle esposizioni single-name.

Quando è stata fornita una lettera di credito, una garanzia o una tecnica equivalente di attenuazione del rischio per garantire integralmente un'esposizione, e se tale tecnica di attenuazione del rischio è conforme ai requisiti degli articoli da 209 a 215 del regolamento delegato 35/2015, il soggetto che ha fornito la lettera di credito, la garanzia o la tecnica equivalente di attenuazione del rischio può essere considerato la controparte dell'esposizione garantita ai fini del calcolo del numero delle esposizioni single-name.

I seguenti rischi di credito non sono compresi nel modulo del rischio di inadempimento della controparte:

- a. il rischio di credito trasferito da un derivato sul credito;*
- b. il rischio di credito al momento dell'emissione del debito da parte di società veicolo, siano esse conformi alla definizione di cui all'articolo 13, punto 26, della direttiva 2009/138/CE o meno;*

- c. il rischio di sottoscrizione di assicurazioni o di riassicurazioni di credito e di cauzione di cui alle aree di attività 9, 21 e 28 dell'allegato I del presente regolamento;
- d. il rischio di credito su prestiti ipotecari non conformi ai requisiti dell'articolo 191 del regolamento delegato 35/2015, paragrafi da 2 a 9.

Le garanzie di investimento sui contratti assicurativi fornite ai contraenti da un terzo e di cui sarebbe responsabile l'impresa di assicurazione o di riassicurazione in caso di inadempimento del terzo sono trattate come derivati nel modulo del rischio di inadempimento della controparte.

Ai sensi dell'articolo 189 del regolamento delegato 35/2015 il modello al termine rilascia questo requisito:

SCR_{def} = requisito di capitale per il rischio di inadempimento della controparte.

Il fabbisogno di capitale per i due tipi di esposizione va calcolato separatamente e aggregato con un contenuto effetto di diversificazione:

$$SCR_{def} = \sqrt{SCR_{(def,1)}^2 + 1,5 \cdot SCR_{(def,2)} \cdot SCR_{(def,2)}^2}$$

dove:

(a) $SCR_{(def,1)}$ è il requisito patrimoniale per il rischio di inadempimento della controparte sulle esposizioni di tipo 1;

(b) $SCR_{(def,2)}$ è il requisito patrimoniale per il rischio di inadempimento della controparte sulle esposizioni di tipo 2.

➤ ***Rischio di inadempimento della controparte modello interno***

Nonostante ciò il rischio di ***inadempimento della controparte*** si può anche calcolare secondo modelli interni. Uno dei quali molto utilizzato è il Credit Metrics proposto da JP Morgan. Il VaR di controparte secondo questo modello viene desunto dalla probabilità di transizione della controparte medesima tra le classi di rating; l'assunto di fondo di tale metodo è che la posizione debitoria possa essere attribuita a una classe di rating e che nel passaggio da una classe x a una classe y la posizione subisca una variazione di valore pari alla differenza di valore tra obbligazioni corporate rispettivamente di classe x e di classe y. In tale assunto è implicita la premessa tale per cui un'obbligazione corporate sconti nel proprio prezzo l'aspettativa di mercato relativa alla solvibilità del suo emittente. Il modello Credit Metrics si articola poi in tre fasi, per la dimostrazione vedi [23].

2.3 Il rischio di mercato

Il rischio di mercato così come definito dalla direttiva precedentemente citata è quel rischio “derivante dal livello o dalla volatilità dei prezzi degli strumenti finanziari che hanno un impatto sul valore delle attività e delle passività dell’impresa. Esso riflette adeguatamente il disallineamento strutturale tra attività e passività, in particolare rispetto alla loro durata”. (Art. 105 direttiva Solvency II). In base a quanto recitato dall’articolo 164 del regolamento delegato 35/2015 IVASS, il modulo del rischio di mercato consta di tutti i seguenti sottomoduli:

- a. *il sottomodulo del rischio di tasso di interesse di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera a), della direttiva 2009/138/CE;*
- b. *il sottomodulo del rischio azionario di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera b), della direttiva 2009/138/CE;*
- c. *il sottomodulo del rischio immobiliare di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera c), della direttiva 2009/138/CE;*
- d. *il sottomodulo del rischio di spread di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera d), della direttiva 2009/138/CE;*
- e. *il sottomodulo del rischio valutario di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera e), della direttiva 2009/138/CE;*
- f. *il sottomodulo delle concentrazioni del rischio di mercato di cui all’articolo 105, paragrafo 5, secondo comma, lettera f), della direttiva 2009/138/CE. 2.*

Il requisito patrimoniale per il rischio di mercato di cui all’articolo 105, paragrafo 5, della direttiva 2009/138/CE è uguale a:

$$SCR_{market} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{(i,j)} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

dove:

- la somma copre tutte le possibili combinazioni (i,j) dei sottomoduli del modulo del rischio di mercato;
- $Corr_{(i,j)}$ è il parametro di correlazione del rischio di mercato per i sottomoduli i e j;
- SCR_i e SCR_j sono i requisiti patrimoniali rispettivamente per i sottomoduli i e j.

Il parametro di correlazione $\text{Corr}(i,j)$ è uguale alla voce riportata nella riga i e nella colonna j della seguente matrice di correlazione:

$i \backslash j$	Tasso di interesse	Azioni	Immobili	Spread	Concentrazione	Valuta
Tasso di interesse	1	A	A	A	0	0,25
Azioni	A	1	0,75	0,75	0	0,25
Immobili	A	0,75	1	0,5	0	0,25
Spread	A	0,75	0,5	1	0	0,25
Concentrazione	0	0	0	0	1	0
Valuta	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

Il parametro A è uguale a 0 quando il requisito patrimoniale per il rischio di tasso di interesse di cui all'articolo 165 è il requisito patrimoniale di cui alla lettera a) di detto articolo. In tutti gli altri casi il parametro A è uguale a 0,5.

Figura 2.1 Matrice di correlazione, fonte IVASS

Creata la matrice di correlazione tra i vari sottorischi di mercato si procede alla determinazione dell' $\text{SCR}_{\text{market}}$. Il risultato come già detto corrisponde al VaR (Value at Risk) che sarebbe la massima perdita realizzabile entro un fissato orizzonte temporale per un dato intervallo di confidenza ovvero si ricava come percentile corrispondente al limite di confidenza scelto.

Qui di seguito introduciamo in particolare un sotto-modulo del rischio di mercato, il rischio di tasso, citando anche il rischio spread. Il rischio di tasso sarà infatti il focus della trattazione e lo analizzeremo più approfonditamente nel terzo capitolo. Tali rischi come detto possono essere calcolati secondo Standard Formula, oppure mediante i modelli interni scelti dalle varie imprese assicuratrici.

2.4 Sotto-modulo del rischio di mercato: rischio spread

Il rischio spread è la parte di rischio che riflette le variazioni del valore netto degli attivi a causa di un movimento nel rendimento di un'attività rispetto alla struttura a termine del tasso privo di rischio. Il sottomodulo del rischio di spread dovrebbe affrontare variazioni sia del livello sia della volatilità degli spread.

Il sottomodulo del rischio di spread va applicato sicuramente a:

- investment grade corporate bond;
- corporate bond ad alto rendimento;

- debiti subordinati;
- debiti ibridi.

Il sottomodulo è inoltre applicabile a:

- asset-backed securities;
- tranches di prodotti strutturati;
- derivati creditizi;
- CDS, TRS, CLN.

Il sottomodulo per il rischio spread tratta anche il rischio creditizio dei seguenti investimenti:

- partecipazioni;
- titoli emessi da e verso imprese collegate e le imprese con cui l'impresa di assicurazione ha un legame di partecipazione;
- titoli cartolarizzati (debt securitized) e altri titoli a reddito fisso;
- quote in investment pool;
- prestiti garantiti da ipoteche;
- depositi con istituti di credito.

Il fabbisogno di capitale per il rischio spread inclusa la capacità di assorbimento delle riserve tecniche è il risultato della somma di tre risultati:

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cd}$$

Mkt_{sp}^{bonds} = fabbisogno di capitale per il rischio spread bond

Mkt_{sp}^{struct} = fabbisogno di capitale per il rischio spread di prodotti di credito strutturato

Mkt_{sp}^{cd} = fabbisogno di capitale per il rischio di spread di derivati creditizi.

➤ **Rischio spread sui bonds**

Il fabbisogno di capitale per il rischio di spread sui bonds è determinato come risultato di uno scenario predefinito

$$Mkt_{sp}^{bonds} = \max(\Delta NAV | \text{spread shock su bonds})$$

Lo spread shock su bonds è l'effetto immediato sul valore netto di attivi e passivi atteso in seguito a una diminuzione istantanea dei valori dei bond a causa di un aumento degli spread.

$$Mkt_{sp}^{bonds} = \sum_i MV_i \cdot duration_i \cdot F^{up}(rating_i)$$

$F^{up}(rating_i)$ = funzione della classe di rating dell'esposizione al rischio creditizio calibrata per rilasciare degli shock consistenti con un VaR al 99,5% in seguito a un aumento degli spread creditizi.

➤ **Rischio spread su prodotti strutturati**

Il fabbisogno di capitale per il rischio di spread su prodotti derivati è determinato come il risultato di due scenari predefiniti:

$$Mkt_{sp}^{struct} \text{ underlying} = \max(\Delta NAV | \text{spread su attivi sottostanti di prodotti strutturati}, 0)$$

$$Mkt_{sp}^{struct} \text{ direct} = \max(\Delta NAV | \text{spread su prodotti strutturati}, 0)$$

Lo spread shock sull'asset sottostante del prodotto strutturato è l'effetto immediato sul NAV atteso in caso di diminuzione istantanea nei valori dei prodotti dopo un aumento degli spread del bond dell'attivo sottostante

$$Mkt_{sp}^{struct} \text{ underlying} = \sum_i MV_i \frac{G(ratingdist_i, tenure_i) - attach_i}{detach_i - attach_i}$$

$G(ratingdist_i, tenure_i)$ = funzione della classe di rating e del tenore dell'esposizione al rischio creditizio dentro a un aggregato di attività cartolarizzate calibrato per rilasciare degli shock consistenti con un VaR al 99,5%

$F^{up}(rating_i)$ = funzione della classe di rating dell'esposizione al rischio creditizio dentro a un aggregato di attività cartolarizzate calibrato per rilasciare degli shock consistente con un VaR al 99,5%.

Lo shock diretto è l'effetto immediato sul NAV atteso in caso di diminuzione istantanea nei valori dei prodotti dopo un aumento degli spread.

$$Mkt_{sp}^{struct} \text{ direct} = \sum_i MV_i \cdot duration_i \cdot F^{up}(rating_i)$$

$F^{up}(rating_i)$ = funzione della classe di rating dell'esposizione al rischio creditizio dentro a un aggregato di attività cartolarizzate calibrato per rilasciare degli shock consistenti con un VaR al 99,5%.

➤ **Rischio spread sui derivati**

Il fabbisogno di capitale per il rischio spread su derivati è determinato come il risultato di due scenari predefiniti:

$$Mkt_{sp}^{cd} \text{ upward} = \max(\Delta NAV | \text{upard shock sui derivati}, 0)$$

$$Mkt_{sp}^{cd} \text{ downward} = \max(\Delta NAV | \text{downward shock sui derivati}, 0)$$

L'impatto delle variazioni dello spread creditizio (sulla struttura dei termini del tasso di interesse privo di rischio) sulle esposizioni è preso in considerazione nel sottomodulo del rischio di spread basato sulla valutazione del metodo standard Solvency II. L'SCR per il rischio spread è calcolato sulla base di tre gruppi di esposizioni non correlate incluso l'SCR per i bonds Mkt_{sp}^{bonds} , l'SCR per i prodotti crediti strutturati Mkt_{sp}^{struct} e l'SCR per i crediti derivati Mkt_{sp}^{cd} , ossia:

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cd}$$

2.5 Sotto-modulo del rischio di mercato: rischio di tasso d'interesse

Il rischio di tasso fa parte anch'esso del rischio di mercato ed è forse il rischio più importante e più consistente poiché esiste per tutte le attività e le passività per le quali il NPV è sensibile ai cambiamenti nella struttura a termine dei tassi di interesse. Inoltre, è estremamente difficile prevederlo poiché nella struttura dei tassi di mercato agiscono molteplici fattori esogeni che possono procurare spostamenti anche inaspettati delle curve. Le attività sensibili ai movimenti dei tassi sono:

- investimenti a reddito fisso;
- strumenti di finanziamento;
- politica dei prestiti;
- derivati su tassi d'interesse ed eventuali attività di assicurazione.

Il valore attualizzato dei flussi futuri di cassa delle passività è sensibile a una variazione del tasso al quale vengono scontati i flussi di cassa.

Per calcolare il rischio di tasso d'interesse vengono ipotizzati due possibili scenari stressati l'uno dove i tassi crescono e l'altro dove i tassi scendono. Questi scenari sono gli ESG (Economic Scenario Generator) e vengono creati dall'EIOPA e messi a disposizione delle imprese assicuratrici. Tali scenari sono fondamentali poiché servono a capire quali sono le ripercussioni sul valore attuale di attività e passività dell'impresa a seguito di uno shift dei tassi e di conseguenza quali sono i requisiti che l'assicurazione dovrà tenere per evitare ingenti perdite nel caso si verificassero tali scenari stressati.

Il fabbisogno di capitale è determinato come risultato di due scenari predefiniti:

$$Mkt_{up} = \Delta NPV|_{up}$$

$$Mkt_{down} = \Delta NPV|_{down}$$

Dove i membri a destra dell'uguale rappresentano le variazioni nei valori attuali netti, degli attivi e dei passivi a causa delle rivalutazioni di tutte le variabili sensibili ai cambiamenti verso l'alto o verso il basso, della struttura a termine dei tassi d'interesse. Le strutture a termine alterate (stressate cioè verso l'alto o verso il

basso) sono derivate moltiplicando i tassi correnti per $(1+s_{up})$ e $(1+s_{down})$, per le singole maturità. Secondo le percentuali dettate dal regolamento delegato 35/2015 ricaviamo:

Scadenza (in anni)	Incremento	Scadenza (in anni)	Calo
1	70 %	1	75 %
2	70 %	2	65 %
3	64 %	3	56 %
4	59 %	4	50 %
5	55 %	5	46 %
6	52 %	6	42 %
7	49 %	7	39 %
8	47 %	8	36 %
9	44 %	9	33 %
10	42 %	10	31 %
11	39 %	11	30 %
12	37 %	12	29 %
13	35 %	13	28 %
14	34 %	14	28 %
15	33 %	15	27 %
16	31 %	16	28 %
17	30 %	17	28 %
18	29 %	18	28 %
19	27 %	19	29 %
20	26 %	20	29 %
90	20 %	90	20 %

Figura 2.2 cambiamenti per struttura dei tassi in aumento o in calo, fonte IVASS.

Ai sensi dell'articolo 165 del regolamento delegato 35/2015, verrà poi preso, come requisito patrimoniale riferito al rischio di tasso, il maggiore tra i seguenti valori:

- (a) la somma, in tutte le valute, dei requisiti patrimoniali per il rischio di un incremento della struttura per scadenza dei tassi di interesse secondo le tabelle sopra riportate;
- (b) la somma, in tutte le valute, dei requisiti patrimoniali per il rischio di un calo della struttura per scadenza dei tassi di interesse secondo la tabella sopra riportata.

CAPITOLO III

ANALISI DEL RISCHIO DI TASSO

3.1 Valutare un'obbligazione: rischio di tasso

Il focus di questa trattazione va per l'appunto sul rischio di tasso d'interesse. Tutti gli intermediari finanziari così come qualsiasi soggetto agente all'interno dei mercati finanziari, sono sottoposti al rischio di tasso d'interesse. Questo rischio causa un aumento o una diminuzione dell'attivo e del passivo a seconda se i tassi di mercato diminuiscono o aumentano, potendo portare l'assicurazione in default. Per valutare l'impatto che ha il rischio di tasso sui bilanci ma più in generale su un'attività finanziaria, portiamo l'esempio più semplice di titolo all'interno di un portafoglio assicurativo, ossia la valutazione di un'obbligazione. Un'obbligazione è un titolo emesso da un'entità sovrana o da un'azienda che intenda finanziarsi attraverso il debito. L'emittente si impegna infatti a remunerare il prestatore con un interesse sul capitale prestato che può essere fisso o variabile, corrisposto in un'unica soluzione a scadenza o mediante cedole periodiche. Considerando addirittura uno ZCB il rischio di tasso è il principale se non l'unico rischio a cui tale titolo è soggetto e ha un elevato impatto su di esso. Per valutare il rischio di tasso su un'obbligazione si parte quindi dalla struttura a termine dei tassi d'interesse considerandola variabile fondamentale, e poi da essa si derivano i prezzi del titolo. Diciamo che il rischio tasso d'interesse si divide in rischio prezzo e rischio reinvestimento. Il rischio prezzo costituisce una variazione del valore attuale del titolo ed è negativo quando i tassi salgono, il rischio reinvestimento è invece legato al reinvestimento delle cedole dei titoli sul mercato ed è negativo quando i tassi scendono. Se questi due effetti si compensano il titolo o il portafoglio è bilanciato. È importante saper calcolare quanto questo rischio impatta così da "proteggersi". A questo fine sarà opportuno dotarsi di:

- a. una funzione che misuri la sensitività del valore di un'obbligazione alla variazione del tasso d'interesse;
- b. un modello in grado di prospettare l'andamento dei tassi d'interesse dell'obbligazione in questione.

Per quanto riguarda il primo punto si può fare riferimento alla duration o al VaR. per il secondo punto analizzeremo tre modelli, uno proposto dall'EIOPA gli altri due più diffusi nei mercati finanziari (CIR e Vasicek).

3.2 Duration come indicatore della sensibilità del prezzo al variare dei tassi d'interesse

La Duration viene presentata come la durata media di un investimento, dove la media si intende calcolata rispetto al valore attuale dei flussi di cassa spettanti all'investitore a fronte dell'investimento effettuato.

$$D = \frac{-\sum (T-t)C \cdot e^{r(T-t)}}{\sum C \cdot e^{-r(T-t)}}$$

che equivale alla sommatoria di tutti i tempi ponderata per tutti i flussi sul valore attuale del titolo.

(T-t) = intervallo temporale tra il momento della valutazione e l'incasso del flusso

C = valore del flusso di cassa

r = tasso d'interesse all'istante t relativo a investimenti con scadenza in T.

La duration è un indicatore della variazione di rendimento di un titolo al variare del tasso d'interesse. Ciò si può ottenere calcolando la modified duration ossia $-\frac{D}{(1+i)}$ e moltiplicandola per la variazione dei tassi d'interesse. Supponendo quindi di conoscere la variazione attesa Δr del tasso d'interesse, la variazione conseguente di un titolo obbligazionario di duration D sarà semplicemente:

$$\Delta V = \Delta r \cdot MD$$

La duration, però è un'approssimazione di prim'ordine soggetta a un sensibile margine d'errore data la natura convessa della relazione variazione prezzo – variazione rendimento. Essa è, infatti, precisa solo per minime variazioni dei tassi, se le variazioni sono più elevate si deve ricorrere ad un altro indicatore. È noto che ad un incremento dei tassi la variazione del prezzo di un'obbligazione è minore rispetto che a un suo aumento dovuto a una diminuzione dei tassi. Per avere quindi una misura più accurata di questa sensibilità si fa riferimento a un indicatore di secondo ordine: la convexity.

$$Convexity = D_2 = -\frac{\sum_{i=1}^n (T-t)^2 C_i e^{-r_{T-t}(T-t)}}{\sum_{i=1}^n C_i e^{-r_{(T-t)}(T-t)}}$$

Essa mette in luce per l'appunto la convessità di un titolo. Un titolo con convessità maggiore sarà meno sensibile a un rischio di tasso d'interesse. Se i tassi salgono, la diminuzione del prezzo sarà minore, se i tassi scendono il guadagno in termini di prezzo sarà maggiore. Per tale motivo quando si acquista un titolo con convessità elevata si pagherà un prezzo maggiore.

3.3 Struttura per scadenza dei tassi d'interesse in un mercato default-free

Prima di analizzare il metodo di calcolo della struttura a termine dei tassi d'interesse secondo l'EIOPA, dobbiamo definire cosa si intende per “*struttura per scadenza dei tassi d'interesse*”.

La struttura dei tassi d'interesse secondo la scadenza è una funzione che lega il tasso d'interesse ottenibile da un certo strumento finanziario alla scadenza dello strumento stesso o a una determinata epoca precedente in

caso di vendita anticipata. Nella prima parte della trattazione ci occuperemo di modelli in situazioni di mercato perfetto. Il mercato perfetto è regolato dal principio di arbitraggio, valgono le proprietà di coerenza (la legge del prezzo unico, il teorema dei prezzi impliciti) e per tale motivo la situazione di mercato alla data corrente t , può essere completamente rappresentata dai valori osservati dei tassi di ZCB di tutte le scadenze, la cosiddetta struttura per scadenza a pronti dei tassi d'interesse.

3.3.1 La struttura per scadenza a pronti¹.

Supponiamo che nell'istante di osservazione t il mercato è strutturato su m periodi, con scadenze $t_k=t+k$ per $k=1,2,\dots,m$. Ipotizziamo quindi, che le operazioni di scambio possono avvenire solamente tra date appartenenti all'insieme:

$$s = \{t, t + 1, t + 2, \dots, t + m\}$$

che contiene le date di apertura del mercato. In questo schema semplificato tutti i titoli obbligazionari trattati al tempo t possono produrre pagamenti solamente alle date dello scadenziario:

$$t = \{t + 1, t + 2, \dots, t + m\}$$

Supponiamo che in questo tipo di mercato siano osservati in t gli m prezzi a pronti:

$$V(t, x_k), k = 1, 2, \dots, m$$

di ZCB di tutte le scadenze. Per la proprietà di indipendenza dall'importo, la relazione:

$$v(t, t_k) = \frac{V(t, x_k)}{x_k}$$

permette di ricavare i prezzi a pronti di tutti gli ZCB unitari. L'insieme:

$$\{v(t, t_k), \text{ per } k = 1, 2, \dots, m\}$$

rappresenta la cosiddetta struttura per scadenza dei prezzi a pronti e descrive completamente il mercato al tempo t . Cioè qualsiasi ZCB che appartiene allo scadenziario s avrà il valore corrispettivo interno all'insieme $v(t, t_k)$. Qualsiasi altro contratto stipulato in t , che necessariamente dovrà garantire un flusso di importi nella forma:

$$V(t, z) = \sum z_k * v(t, t_k)$$

La struttura per scadenza dei tassi a pronti si dice anche term structure.

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti in vigore al tempo t si ricava dai prezzi a pronti, secondo le relazioni:

$$i(t, t_k) = \left[\frac{x_k}{V(t; x_k)} \right]^{\frac{1}{k}} - 1 = \left[\frac{1}{v(t, t_k)} \right]^{\frac{1}{k}} - 1.$$

¹ Fonte: Manuale di Finanza vol. 1 in bibliografia [31]

Per continuare la nostra analisi però non possiamo fermarci alla struttura per scadenza dei tassi a pronti bensì dobbiamo porre in evidenza anche la struttura per scadenza dei tassi impliciti.

3.3.2 La struttura per scadenza dei tassi d'interesse a termine².

Potrebbe accadere però che per determinate scadenze che possiamo definire intermedie, i tassi a pronti non possono essere definiti. Per tale motivo si rende necessario interpolarli, mediante una relazione, dalla curva dei tassi a pronti. Ai fini della nostra dimostrazione partiamo dai prezzi unitari quindi possiamo dire che, comunque fissati i prezzi a pronti di due ZCB di diversa scadenza è sempre possibile ricavare, attraverso le ipotesi precedentemente fatte (coerenza), il prezzo a termine relativo all'orizzonte di scambio che ha per estremi le due scadenze assegnate. I prezzi a termine sono dei prezzi che vengono fissati al tempo t ma che fanno riferimento a contratti che sono esigibili al tempo T con scadenza in s . Possiamo infatti riassumere sotto la notazione $v(t,T,s)$ cioè il prezzo di uno ZCB unitario stabilito in t , che sarà esigibile in T con scadenza in s . Se si effettua il calcolo del prezzo a termine, relativamente a ogni coppia di date contigue dello scadenzario s , si ottiene la struttura per scadenza dei prezzi impliciti al tempo t , che è quindi espressa dalle:

$$v(t, t + k - 1, t + k) = v(t, t + k) / v(t, t + k - 1)$$

la struttura dei tassi si ottiene con la solita relazione:

$$i(t, t + k - 1, t + k) = \frac{1}{v(t, t + k - 1, t + k)} - 1 = \frac{v(t, t + k - 1)}{v(t, t + k)} - 1$$

se la esprimiamo in termini di m (fattore di capitalizzazione) otteniamo:

$$1 + i(t, t + k - 1, t + k) = [1 + i(t, t + k)] * \left[\frac{1 + i(t, t + k)}{1 + i(t, t + k - 1)} \right]^{k-1}$$

possiamo vedere come la struttura dei tassi a pronti è dominata dalla struttura a termine dei tassi impliciti qualora la struttura dei tassi a pronti è decrescente $N > D$ e viceversa se $D > N$.

Le term structure possono essere crescenti, decrescenti o humped a seconda dell'andamento dei tassi.

² Fonte, Manuale di Finanza vol.1 in bibliografia [31]

3.4 Modelli unifattoriali per il calcolo della struttura a termine dei tassi d'interesse³

Per quanto riguarda la stima di questa struttura per scadenza dei tassi d'interesse spot (a pronti), che servirà per l'attualizzazione delle attività e delle passività dei bilanci delle assicurazioni, un metodo molto diffuso per il calcolo è l'applicazione dei modelli unifattoriali. Tali modelli potrebbero essere adottati nel caso in cui la compagnia scelga di adottare un modello interno al posto della standard formula. In tali modelli, il tasso di interesse è descritto da un processo stocastico che dipende da un solo fattore di incertezza. Un modello a un solo fattore implica che tutti i tassi si muovano nella stessa direzione a ogni istante t ma non che tutti si muovano in uguale misura.

I due modelli unifattoriali maggiormente diffusi sono il modello di Vasicek e il modello Cox, Ingersoll e Ross; il loro successo è dovuto principalmente al fatto che:

- sono modelli di Equilibrio Economico Generale che consentono di costruire il prezzo equo (del titolo obbligazionario) da confrontare col relativo prezzo di mercato, e di individuare così l'eventuale scostamento (residuo del modello). Quindi, questa categoria di modelli ha come propria caratteristica peculiare quella di poter effettuare delle calibrazioni sui parametri in modo tale da poter rendere il modello coerente alla struttura a termine corrente;
- la determinazione del tasso scaturisce da una soluzione in forma chiusa.

In questa trattazione descriveremo il modello CIR che descrive circa l'80% dei movimenti della struttura dei tassi, il modello di Vasicek e accenneremo le ipotesi del modello di Black & Scholes che serve a valutare i contratti d'opzione menzionando il modello Smith-Wilson adoperato invece da EIOPA per stimare la curva dei tassi. Per descrivere i modelli useremo come fonte bibliografica "*Manuale di finanza*" cfr. [31].

➤ *Le ipotesi di base dei modelli unifattoriali*

I modelli sopracitati (CIR, Vasicek) si basano su delle ipotesi. Innanzitutto, che il modello di mercato adottato per il pricing è caratterizzato da quattro ipotesi principali:

- il mercato è aperto con continuità;
- il mercato è perfetto, cioè:
 - sono assenti costi di transazione e gravami fiscali,
 - i titoli sono infinitamente divisibili,
 - sono consentite le vendite allo scoperto,
- gli agenti sono massimizzati di profitto e price-taker;
- sono esclusi arbitraggi non rischiosi;

³ Fonte: Manuale di Finanza vol.3 in bibliografia [32]

- l'intensità istantanea di interesse dei titoli con vita a scadenza infinitesima, lo spot rate $r(t)$ è un processo di diffusione, descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dr(t) = f(r_t, t)dt + g(r_t, t)dZ(t).$$

Dove il coefficiente di drift $f(r, t)$ e il coefficiente di diffusione $g(r, t)$ sono funzioni opportunamente specificate.

➤ *La dinamica dei contratti IRS*

In questo modello di mercato, l'unica incertezza che influisce sul prezzo $Y(t)$ di qualsiasi titolo IRS è descritta dal processo del tasso istantaneo $r(t)$, che, per la proprietà di markovianità⁴, costituisce la variabile di stato del sistema. In sostanza, il prezzo $Y(t)$ del derivato sarà funzione di r e di t :

$$Y(t) = Y(r_t, t).$$

Costituirà un processo stocastico descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$(2.2) \quad dY(t) = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dZ(t),$$

dove per il lemma di Ito⁵, i coefficienti a e b sono funzioni descritte dalle espressioni:

$$(2.3) \quad a(r_t, t) = \frac{\partial Y}{\partial t} + f(r_t, t) \cdot \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{2} g^2(r_t, t) \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2},$$

$$(2.4) \quad b(r_t, t) = g(r_t, t) \cdot \frac{\partial Y}{\partial r}.$$

Quest'equazione differenziale stocastica del titolo IRS si può riscrivere come:

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = a'(r_t, t)dt + b'(r_t, t)dZ(t)$$

avendo definito i coefficienti "percentualizzati":

$$a'(r_t, t) := \frac{a(r_t, t)}{Y(t)},$$

$$b'(r_t, t) := \frac{b(r_t, t)}{Y(t)}$$

possiamo quindi definire il valore atteso come:

⁴ La proprietà di Markov per un processo stocastico consiste nella dipendenza esclusiva dallo stato presente della variabile casuale dei futuri stati, e per esempio non dagli stati passati (la *storia* o *percorso* del processo) ma soltanto dall'ultima osservazione. Un processo con la proprietà di Markov è chiamato processo markoviano.

⁵ Il lemma di Ito è usato nel calcolo stocastico al fine di computare il differenziale di una funzione in un particolare tipo di processo stocastico è un'estensione dello sviluppo in serie di Taylor che si usa per funzioni deterministiche, ossia senza termine casuale, ed è applicabile per una funzione stocastica, ossia con un termine in dW . Tale termine non è un differenziale esatto e rappresenta la componente casuale di una variabile aleatoria.

$$E_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right] = a'(r_t, t) dt$$

quindi:

$$a'(r_t; t) = \frac{E_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right]}{dt}$$

per la varianza si ottiene:

$$\text{Var}_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right] = b^2(r_t, t) \text{Var}_t[dZ(t)] = b^2(r_t, t) dt$$

cioè:

$$b^2(r_t, t) = \frac{\text{Var}_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right]}{dt}$$

Quindi a' e b' rappresentano il valore atteso e la deviazione standard rispettivamente, del tasso istantaneo di rendimento ottenuto investendo nel derivato.

Anche in questo caso si può definire un prezzo del rischio (ossia lo Sharpe Ratio), ponendo:

$$\pi_Y := \frac{a' - r}{b'}$$

➤ *L'argomentazione di hedging*

Per i contratti IRS si può ricavare una relazione tra i prezzi imposta dal principio di arbitraggio. Il fine è arrivare a un'equazione di valutazione che sarà necessaria per il modello CIR poiché è la base dello stesso. Per ottenerla è necessario l'introduzione di ipotesi accessorie sulla struttura dei premi al rischio. Faremo riferimento a titoli che non pagano dividendi tra la data di valutazione e quella di scadenza. Per la dimostrazione completa si rimanda al libro "Manuale di finanza vol. 3 pag. 290" [32]. Al termine della dimostrazione si ottiene che per rispetto del principio di non arbitraggio vigente nel mercato otteniamo che la quantità caratteristica del mercato è pari a:

$$q(r_t, t) = \frac{a'(r_t, t) - r(t)}{b'(r_t, t)}$$

come vediamo dipende da $r(t)$ che sarebbe il tasso spot (risk-free) sul mercato e dalla scadenza t . Con riferimento a un generico titolo IRS, il numeratore $L' := a' - r$ della funzione q esprime la differenza di rendimento atteso tra l'investimento nel contratto IRS e l'investimento al "tasso di mercato". Se il denominatore – che rappresenterebbe la standard deviation come precedentemente detto- è adottato come misura di rischiosità, la funzione q rappresenta la differenza di rendimento atteso per unità di rischio; è cioè interpretabile come il *prezzo di mercato del rischio* o ancora meglio come il risk premium che si ottiene per

unità di rischio investendo in un determinato titolo IRS. Essendo indipendente dal particolare contratto considerato, q è funzione solamente dello spot rate $r(t)$ e di t .

La quantità $a'(r_t, t)$ esprime il rendimento istantaneo atteso di una strategia di investimento passiva, consistente nell'acquistare il titolo e tenerlo fino a scadenza; la quantità $r(t)$ invece, esprime il rendimento di una strategia "attiva", nella quale l'importo $Y(t)$ viene investito sul mercato da t a $t+dt$. Diversamente dai modelli con tasso di interesse deterministico (e quindi non rischioso), il rendimento $r(t)$ è solo *istantaneamente* non-rischioso e, su periodi finiti, nessuna delle due strategie è esente da rischio. Non esiste quindi in questo caso una relazione di dominanza tra il rendimento atteso $a'(r_t, t)$ e il rendimento istantaneamente non-rischioso $r(t)$, e la differenza $L' := a'(r_t, t) - r(t)$, può assumere segno qualsiasi.

➤ *L'equazione di valutazione*

Dato che il processo $r(t)$ non rappresenta il prezzo di un'attività quotata, l'espressione del prezzo di mercato del rischio non può essere ricavata direttamente dall'osservazione del mercato. In altri termini, la funzione $q(r, t)$ rappresenta una quantità esogena al modello di valutazione, che va specificata sulla base di ipotesi aggiuntive sulle preferenze degli investitori. Una volta specificata la forma di q l'equazione della quantità caratteristica sul mercato fornisce un risultato operativo:

$$a - qb = rY$$

utilizzando le espressioni esplicite di a e b fornite dalla (2.3) e dalla (2.4) si ottiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} - qg \frac{\partial Y}{\partial r} = rY,$$

Cioè

$$\frac{1}{2} \frac{g^2 \partial Y}{\partial r^2} + (f - qg) \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY.$$

L'ultima equazione è l'*equazione di valutazione* per i titoli IRS che non pagano dividendi, caratteristica del modello. Si tratta, infatti di un'equazione differenziale alle derivate parziali di secondo ordine deterministica, che deve essere soddisfatta dal prezzo $Y(t)$ di qualsiasi contratto IRS in ogni istante t . Ovviamente, l'equazione di valutazione va risolta sotto le condizioni che caratterizzano la struttura contrattuale del titolo da valutare. Considerando il contratto più semplice ossia uno ZCB deterministico unitario con scadenza in T , si ottiene che al variare di $T \geq t$, la struttura per scadenza dei prezzi in vigore in t sul mercato e quindi dei tassi a pronti dipenderà dal valore corrente $r(t)$ dello spot rate. (Per la dimostrazione si rimanda al Manuale di Finanza vol. 3, [31]).

3.4.1 Modello Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

Affinché l'equazione di valutazione diventi uno strumento operativo per la valutazione dei contratti IRS, è necessario specificare la forma delle funzioni f e g che determinano la dinamica dello spot rate, e della funzione q , che caratterizza la forma dei premi per scadenza.

Nel modello CIR si assume per la componente deterministica $r(t)$ una dinamica di tipo mean-reverting, specificata dalla funzione di drift:

$$f(r_t, t) = \alpha(\gamma - r_t), \quad (3.1)$$

questa scelta implica per la componente deterministica dei movimenti di $r(t)$ una traiettoria esponenziale di avvicinamento al livello γ , che è il valore a lungo termine del tasso istantaneo; l'avvicinamento avviene con una velocità tanto più alta quanto più è elevato il valore del parametro α .

La componente stocastica del processo di tasso ha la forma:

$$g(r_t, t) = \rho\sqrt{r_t} \quad (3.2)$$

questa scelta per il coefficiente di diffusione caratterizza un termine di disturbo di entità tanto più grande quanto più è elevato il livello $r(t)$, in accordo con l'evidenza empirica che tendenzialmente associa maggiore volatilità a periodi di elevati tassi di interesse. Inoltre, il fatto che il coefficiente g tende a zero all'annullarsi di $r(t)$ assicura che le traiettorie del tasso istantaneo non possono diventare negative, che attualmente costituisce una limitazione del modello data la politica monetaria della BCE.

Si può dimostrare che l'equazione differenziale stocastica ottenuta per sostituzione è:

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho\sqrt{r_t}dZ(t),$$

dove con α si indica la velocità con la quale la funzione tende a convergere al valore γ , mentre con ρ si intende la variabilità del processo.

Questa formula implica per la variabile $r(t)$ una distribuzione di probabilità condizionata di tipo chi-quadro non centrata. La densità di probabilità di questa distribuzione ha caratteristiche analoghe a quelle della distribuzione lognormale: è definita per valori positivi di r , è nulla per $r=0$ e ha una "coda all'infinito". La media di $r(t+\tau)$, dato $r(t)$ è espressa da:

$$E_t[r(t + \tau)] = \gamma - (\gamma - r_t)e^{-\alpha\tau};$$

questa forma funzionale coincide con quella della traiettoria esponenziale del modello deterministico mean-reverting.

➤ **Il prezzo di mercato del rischio**

La funzione q , che esprime il prezzo di mercato del rischio (Sharpe-ratio), ha la forma:

$$q(r_t, t) = -\pi \sqrt{\frac{r_t}{\rho}}, \quad (3.3)$$

essendo il parametro π un numero reale di segno arbitrario. Questa forma per il prezzo di mercato del rischio è stata giustificata nell'ambito di un più generale modello di equilibrio economico. Dal punto di vista matematico, è rilevante il fatto che la funzione q abbia la stessa forma della funzione g e che il prodotto qg risulti funzione lineare di r ; con questa scelta per le funzioni f , g e q il drift aggiustato per il rischio risulta:

$$\hat{f} := f - qg = \alpha(\gamma - r_t) + \pi r$$

e conserva quindi l'andamento lineare rispetto a r .

➤ **L'equazione di valutazione e la struttura dei tassi**

Con le specificazioni precedentemente fatte sui parametri (3.1) e (3.2) e (3.3), si ottiene l'equazione generale di valutazione del modello CIR per i titoli che non pagano dividendi, si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_2 r \partial^2 Y}{\partial r^2} + [\alpha(\gamma - r) + r\pi] \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY$$

Imponendo la condizione a scadenza $Y(t+\tau)=1$, specifica dei titoli IRS, tale equazione individua il prezzo $v(t, t+\tau)$ in t degli ZCB unitari con vita a scadenza τ , cioè il fattore di sconto di mercato per la scadenza $t+\tau$.

Si ricava l'espressione in forma chiusa:

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r_t - \beta(\tau)}$$

Dove A e B sono funzioni deterministiche che dipendono solamente dalla vita a scadenza del titolo. Dall'espressione di v è facile ricavare i . Che quindi come funzione di τ , fissato t , fornisce la struttura per scadenza dei tassi d'interesse in vigore sul mercato al tempo t .

L'espressione esplicita del fattore di sconto di mercato ha una rilevante importanza nelle applicazioni pratiche del modello CIR (che vedremo infatti nell'ultimo capitolo). L'espressione per A e B ricavata da Cox, Ingersoll e Ross ha la forma:

$$A(\tau) = \left[\frac{2de^{\frac{(\alpha-\pi+d)\tau}{2}}}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1) + 2d} \right]^v$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{d\tau}-1)}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1) + 2d}$$

Dove:

$$d := \sqrt{(\alpha-\pi)^2 + 2\rho^2}$$

$$v := 2 \frac{\alpha\gamma}{\rho^2}$$

Da sostituire poi all'equazione di v prezzo di uno ZCB unitario citata nel precedente paragrafo.

3.4.2 Modello di Vasicek

Il modello di Vasicek assume che il tasso spot *risk-free* sia un processo stocastico markoviano, soluzione di un'equazione differenziale stocastica.

In questo modello si pone:

$$m(r) = a(b-r)$$

$$s(r) = \sigma$$

Dove con $m(r)$ si indica il *drift* che nel modello CIR abbiamo indicato con f in funzione di r , ma indipendente dal tempo $t \geq 0$. Ed $s(r)$ è la deviazione standard.

Quindi il processo che descrive l'evoluzione del tasso r in un mondo neutrale al rischio è esprimibile attraverso la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr_t = a(b-r)dt + \sigma dW_t$$

Dove a, b e σ (cioè il coefficiente di diffusione, il tasso medio di lungo periodo e la volatilità), sono parametri costanti a valori reali, mentre dW_t è un moto browniano.

Questo è un classico esempio di processo del tipo *mean reverting* come il CIR, in cui il valore di r quindi tende a raggiungere il suo valor medio nel lungo periodo. Nell'equazione il lungo periodo è rappresentato dal parametro b , infatti:

- se $r_t > b$ il drift $a(b-r)$ è negativo, il livello di r tende a scendere;
- se $r_t < b$ il drift è positivo e tende a far aumentare il valore di r .

Il modello di Vasicek descrive piuttosto realisticamente i processi osservati sulla serie storica del tasso di breve periodo, e infatti è largamente utilizzato e inoltre è considerato un modello di facile utilizzo dal momento che ammette soluzioni analitiche.

Un punto di debolezza di tale modello è che produce una struttura a termine ma non assume tutta la struttura a termine corrente (infatti assume solo il tasso di breve periodo); questo comporta la possibilità di realizzare prezzi incoerenti con la realtà e quindi la possibilità di generare situazioni di arbitraggio.

Un altro limite di tale modello è dovuto alla sua costruzione a un solo fattore, infatti non riesce a catturare tutti gli spostamenti complessivi della struttura a termine. Un'ulteriore ipotesi del modello che viene contestata è quella per cui tutti i tassi hanno la stessa volatilità.

3.4.3 Modello di Black & Scholes

Il modello di Black & Scholes è il fondamento e il marchio della teoria delle opzioni, pubblicato all'inizio degli anni 70'. Il modello è basato sul principio di assenza di arbitraggio e sull'argomentazione di hedging; per descrivere l'evoluzione dei prezzi utilizza un processo stocastico definito nel tempo continuo; non considera il rischio di tasso d'interesse. Prezzare le opzioni anziché i sottostanti è un metodo per capire l'andamento del mercato, poiché se il prezzo delle opzioni put è maggiore vorrà dire che i soggetti si aspettano dei tassi a ribasso viceversa con le call. Il processo stocastico che descrive la dinamica del prezzo del sottostante l'opzione è un moto browniano geometrico; l'applicazione del principio di arbitraggio fa pieno uso delle tecniche del calcolo stocastico, già da tempo utilizzate nella teoria dei processi di diffusione. Anche se l'approccio alla Black & Scholes è correntemente utilizzato per il pricing di derivati scritti su sottostanti di tipo piuttosto generale, l'interpretazione più immediata del modello si ha nella valutazione di opzioni su titoli azionari. La versione originaria del modello utilizza una serie di ipotesi "semplificate" per caratterizzare il mercato in cui l'opzione e l'azione sottostante vengono trattati e sulla dinamica stocastica del prezzo $S(t)$ dell'azione. Il modello di Black & Scholes non costituisce un modello di mercato azionario in senso stretto come il CAPM, ma si limita a fornire uno schema per il pricing subordinato. Le ipotesi adottate non sono sufficienti per spiegare i meccanismi di formazione dei prezzi azionari, ma sono le minime indispensabili per ricavare il prezzo di arbitraggio di un'opzione finanziaria, *dato* il prezzo corrente dell'azione sottostante. Al tempo t , si faccia riferimento a un'opzione con scadenza $T \geq t$ e prezzo $Y(t)$, scritta su un titolo azionario con prezzo $S(t)$ che non paga dividendi entro la data T . L'azione e l'opzione siano trattate su un mercato definito nel tempo continuo e caratterizzato dalle ipotesi tipiche dei mercati perfetti.

➤ *Le ipotesi del modello*

Il modello di Black & Scholes è basato su cinque ipotesi principali:

- il mercato è aperto con continuità;
- il mercato è perfetto; cioè:
 - sono assenti costi di transazione e gravami fiscali
 - i titoli sono infinitamente divisibili,
 - sono consentite le vendite allo scoperto,
 - gli agenti sono massimizzatori di profitto e price-taker;
- sono esclusi arbitraggi non-rischiosi;
- sul mercato sono disponibili ZCB default-free con scadenza qualsiasi, e la struttura per scadenza dei tassi d'interesse è deterministica e piatta a un livello di intensità istantanea di interesse r ;
- il processo di prezzo $S(t)$ del sottostante è un moto Browniano geometrico, descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t),$$

con μ e σ costanti.

3.5 Calcolo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse risk-free secondo le Technical Specifications.⁶

Il modello utilizzato dall'EIOPA per il calcolo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse è disciplinato dall'art. 44 del regolamento 2015/35 [2]. Ai sensi del suddetto articolo, i tassi di interesse privi di rischio di base per ogni valuta e scadenza, sono dedotti sulla base dei tassi swap per i tassi di interesse di tale valuta, aggiustati per tenere conto del rischio di credito.

Per ogni valuta, per le scadenze per le quali non sono disponibili tassi swap per i tassi di interesse da mercati finanziari DLT⁷, per dedurre i tassi di interesse privi di rischio di base si utilizzano i tassi dei titoli di Stato emessi in tale valuta, aggiustati per tenere conto del loro rischio di credito, a condizione che tali tassi dei titoli di Stato siano disponibili da mercati finanziari DLT. Per la costruzione della curva dovrebbero essere applicati i seguenti principi:

⁶ Fonte: EIOPA [9]

⁷ Deep,Liquid,Trasparent. Un mercato DLT vuol dire che è idoneo per profondità cioè che si possono effettuare operazioni riguardanti elevate quantità senza modificare il prezzo in maniera significativa, idoneo per liquidità ossia che gli strumenti scambiati sono facilmente convertibili in moneta, senza determinare una variazione significativa del prezzo, e idoneo per trasparenza ossia che in tale mercato è facile per il pubblico disporre di informazioni sugli scambi e sui prezzi correnti.

- gli strumenti finanziari osservati dovranno essere negoziati in mercati, liquidi e trasparenti;
- la curva dei tassi di interesse dovrebbe essere derivata sulla base dei tassi di interesse swap;
- per i mercati dove non esistono tassi swap, devono essere utilizzati i titoli di Stato. La curva dei tassi derivati (EUR Spots) deve essere regolata dal rischio di credito al fine di ottenere il tasso privo di rischio di base (RFR base).

Per quanto riguarda il calcolo tecnico della stessa invece, le informazioni vanno reperite all'interno dei technical specifications pubblicate dall'EIOPA. L'EIOPA, infatti, pubblica mensilmente i dati input per il calcolo della struttura a termine dei tassi privi di rischio.

L'EIOPA mantiene una neutralità assoluta per quanto riguarda i provider dei dati del mercato. La ragione per selezionare i data providers fa fede a dei punti cardine che l'EIOPA segue a seconda la priorità:

- l'obbligo di presentare figure concrete delle informazioni tecniche ai sensi degli articoli 77 e seguenti della direttiva Solvency II;
- la tracciabilità dei conti, poiché parte del commitment al principio di trasparenza deciso dall'EIOPA;
- la possibilità di replicare i calcoli da parte di quelli stakeholders che lo desiderano;
- l'abilità di mettere in atto un processo di validazione appropriato.

L'EIOPA ha deciso di pubblicare la struttura di scadenza dei tassi di interesse privi di rischio a partire dalla scadenza di 1 anno. Gli strumenti con scadenza inferiore a 1 anno non sono sempre swap e necessitano di adeguamenti per il rischio di credito, che può aggiungere complessità non necessarie ai calcoli. Inoltre, i tassi inferiori a 1 anno hanno un impatto trascurabile sui tassi estrapolati con il metodo Smith-Wilson e quindi un impatto trascurabile sull'ammontare delle riserve tecniche a lungo termine.

L'interpolazione, ove necessario, e l'estrapolazione dei tassi di interesse sono sviluppate applicando il metodo Smith-Wilson sin dal 2015. Questo metodo ovviamente non è l'unico possibile per l'estrapolazione dei tassi di interesse. Il metodo Smith-Wilson è stato applicato negli ultimi anni di sviluppo del framework Solvency II, in particolare, nel quinto studio di impatto quantitativo (QIS5) e nella valutazione delle garanzie a lungo termine (LTGA) che ha sostenuto l'accordo politico della direttiva Omnibus II. L'EIOPA seguirà tuttavia con attenzione gli sviluppi del mercato e la loro influenza sull'attuazione del metodo Smith-Wilson.

3.5.1 Metodo Smith-Wilson per l'estrapolazione e l'interpolazione.

Come detto dall'articolo di Jorgensen cfr.[30], il modello Smith-Wilson assume che nel mercato è possibile osservare solo un numero finito di strumenti a reddito fisso. Questi strumenti, devono essere per assunzione liquidi, completamente risk-free e con la sicurezza della manifestazione dei promessi pagamenti futuri. Queste premesse teoriche vengono fatte con lo scopo di poter determinare il valore attuale degli strumenti a reddito

fisso per poi cercare di adottare tale modello teorico ai prezzi reali del mercato. Due proprietà chiave di questo modello sono che:

- dev'essere possibile adattare perfettamente i prezzi di tutti gli strumenti sul mercato nel nostro campione teorico;
- il tasso a lungo termine infinitesimale indicato con f^∞ dev'essere una costante determinata esogenamente, ossia specificata da colui che adotta il modello.

L'EIOPA stabilisce questo tasso indicandolo come Ultimate Forward Rate (UFR) ed esso rappresenta il tasso al quale, dopo l'ultimo punto liquido (Last Liquid Point LLP)⁸, gli strumenti finanziari tenderanno. Dal 2016 l'UFR è pari al 4,2%. Come vedremo il modello Smith-Wilson adotta un'altra costante semi-esogena che è α , che non è determinata come parte della procedura di adattamento al mercato, ma controlla il comportamento della curva della struttura a termine dei tassi.

A titolo di introduzione, viene considerato un tasso di interesse annuale r che definisce un fattore di interesse annuale $R = (1 + r)$. Da ciò si può definire un'intensità di interesse a tempo continuo $\rho = \log R$. Sono ammessi tassi di interesse negativi, ma devono essere soddisfatte le condizioni $r > -1$ o $R > 0$. Solo l'intensità di interesse ρ è illimitata e questo lo rende conveniente per scopi di modellazione.

3.6 Implicazioni del metodo Smith-Wilson

Dato che il modello di Smith-Wilson si basa sugli assunti precedentemente fatti ossia su f^∞ e α , un problema è proprio questo di stimare α . La procedura per stimare α è solo un calcolo meramente aritmetico che viene ripetuto più volte per determinare quale parametro fa convergere le curve dei tassi al UFR, la determinazione di α può essere problematica a causa della singolarità nell'errore della funzione definita dalla procedura. Inoltre, si può anche notare che dipendendo da un'ottimizzazione numerica, la soluzione del modello Smith-Wilson, non differisce tanto dagli altri modelli più classici studiati nella letteratura finanziaria. Questa affermazione, però va contro quella affermata dall'EIOPA che sottolinea invece, il fatto che il modello di Smith-Wilson, è “basato su risolvere un sistema lineare di equazioni analiticamente” e che “questo è un vantaggio in confronto agli altri metodi che sono invece basati sulla minimizzazione delle somme o dei quadrati o della deviazione standard”. Nonostante queste critiche, attualmente data la particolare situazione macroeconomica che i paesi si stanno trovando ad affrontare, l'EIOPA ha continuato ad utilizzare come metodo per il calcolo della curva dei tassi tale metodo Smith-Wilson pubblicando i risultati settimanalmente anziché mensilmente. Il modello Smith-Wilson però sarà forse rivisto nella review di giugno 2020 posticipata a

⁸ Il LLP rappresenta l'ultima scadenza per la quale i mercati delle obbligazioni non sono più da considerare DLT. Tale punto si raggiunge nel momento in cui il volume totale delle obbligazioni con maturity pari o superiore all'ultima maturity (nel caso dell'euro la massima maturity è 20 anni), è inferiore al 6% del volume di tutte le obbligazioni del mercato.

settembre, poiché con la politica dei tassi interbancari negativi, le stime della struttura a termine e il calcolo del rischio di tasso d'interesse sui bilanci assicurativi che ne segue non sono precisi come evidenziato dal presidente EIOPA, Gabriel Bernardino, nella conferenza tenutasi il 26/01/2020 a Bruxelles.

3.7 Aggiustamento per il rischio di credito

In ogni caso successivamente alla stima della curva dei tassi d'interesse base per la cui dimostrazione si rimanda alle Technical Specifications 2019 redatte dall'EIOPA, si passa a tenere in considerazione nella stima della curva dei tassi l'aggiustamento per il rischio di credito. In particolare, si deve considerare:

- per gli interest rate swap ai sensi dell'art. 45 della Delegated Regulation “l'aggiustamento per il rischio di credito è determinato in modo trasparente, prudente attendibile, obiettivo e coerente nel tempo. L'aggiustamento è determinato sulla base della differenza tra i tassi che tengono conto del rischio di credito riflesso nel tasso variabile dei contratti swap su tassi di interesse e i tassi su contratti swap indicizzati overnight aventi la stessa scadenza, qualora entrambi i tassi siano disponibili da mercati finanziari DLT. Il calcolo dell'aggiustamento è basato sul 50 % della media di tale differenza in un arco temporale di un anno. L'aggiustamento non è inferiore a 10 punti base e non è superiore a 35 punti base”.
- per i Titoli di Stato il CRA (Credit Risk Adjustment) è applicato direttamente al tasso di interesse dei Titoli di Stato;
- per le valute ancorate all'euro oltre al CRA bisognerebbe aggiungere una correzione per il rischio valutario.

Tale ulteriore correzione corrisponde al costo di copertura che si sostiene a fronte del rischio che il valore nella valuta ancorata ad un investimento in euro si riduca a causa delle variazioni del livello del tasso di cambio tra l'euro e la valuta ancorata. L'EIOPA monitora annualmente il currency risk adjustment, ed il suo valore sarà aggiornato qualora la differenza con il precedente sia significativa.

CAPITOLO IV

VOLATILITY ADJUSTMENT

4.1 Definizione e calcolo del Volatility Adjustment

Un altro elemento da tenere in considerazione nel calcolo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse e per effettuare parte degli aggiustamenti richiesti dalla direttiva, è la volatilità degli stessi. L'EIOPA consente, infatti, alle assicurazioni di correggere la struttura dei tassi concordemente alla volatilità a cui sono soggetti al fine di garantire migliori stime. Questo aggiustamento avviene mediante il Volatility Adjustment che è uno spread costante che si aggiunge ai tassi della curva risk-free, per prevenire comportamenti d'investimento pro-ciclici e mitigare l'effetto di un aumento estremo dello spread tra i titoli in una situazione di stress del mercato. Il comportamento pro-ciclico potrebbe influenzare la strategia di gestione del risparmio e ridurre il ruolo tradizionale degli assicuratori come stabilizzatore della volatilità del mercato. Lo spread costante che si aggiunge alla curva, è regolato dall'articolo 77 quinquies della direttiva il quale afferma che tale aggiustamento si basa sul differenziale tra il tasso di interesse ottenibile dalle attività incluse in un portafoglio di riferimento per la valuta in questione e i tassi della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio per la medesima valuta. Il calcolo del portafoglio è regolato dall'art. 49 del Regolamento Delegato 2015/35/UE a integrazione della direttiva⁹.

⁹ Art. 49 regolamento delegato 2015/35/UE: “i portafogli di riferimento sono determinati in modo trasparente, prudente, attendibile, obiettivo e coerente nel tempo.

I metodi applicati nel determinare i portafogli di riferimento sono identici per tutte le valute e tutti i paesi. Per ogni valuta e ogni paese, le attività del portafoglio di riferimento sono valutate conformemente all'articolo 10, paragrafo 1 del Regolamento Delegato 2015/35/UE2829 e sono scambiate in mercati che, ad eccezione dei periodi di liquidità in condizioni di stress, sono attivi, idonei per spessore, liquidità e trasparenza. Gli strumenti finanziari scambiati in mercati che non rispecchiano queste caratteristiche, possono essere inclusi nel portafoglio solo qualora si preveda che essi possano essere nuovamente conformi ai criteri entro un arco di tempo ragionevole. Per ogni valuta e ogni paese, il portafoglio di riferimento delle attività deve soddisfare tutti i seguenti requisiti:

a) per ogni valuta, le attività sono rappresentative degli investimenti effettuati dalle imprese di assicurazione e di riassicurazione in tale valuta per coprire la migliore stima per le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione denominate in detta valuta; per ogni paese, le attività sono rappresentative degli investimenti effettuati dalle imprese di assicurazione e di riassicurazione in tale paese per coprire la migliore stima per le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione vendute nel mercato assicurativo di detto paese e denominate nella valuta del paese in questione;

b) il portafoglio è basato su indici pertinenti facilmente disponibili al pubblico, se presenti, ed esistono criteri pubblicati riguardo ai tempi e ai modi di variazione degli elementi costitutivi di tali indici;

c) il portafoglio di attività include tutte le seguenti attività:

- *obbligazioni, cartolarizzazioni e prestiti, ivi compresi i prestiti ipotecari;*
- *azioni;*
- *immobili.*

Ai fini delle lettere a) e b), gli investimenti delle imprese di assicurazione e di riassicurazione in organismi di investimento collettivo e altri investimenti «confezionati» come fondi sono trattati come investimenti nelle attività sottostanti”.

Dunque, il Volatility Adjustment, può essere calcolato mediante la seguente formula:

$$VA = 65\% (CuS + \max \text{ if } CoS > 100\text{bps} (CoS - 2 \times CuS; 0))$$

Esso è costituito da due elementi, il risk-corrected Currency Spread (CuS), più un condizionale risk-corrected Country Spread (CoS), calibrati al 65%. Normalmente, il Volatility Adjustment è pari al 65% del CuS. Il CoS viene aggiunto solo nel caso in cui lo spread di un determinato paese è molto elevato. Come verrà spiegato dopo, quando il CoS è superiore a 100 punti base, viene aggiunta la differenza tra il CoS stesso ed il CuS, quest'ultimo moltiplicato per due.

4.1.1 Currency Volatility Adjustment

Al fine di determinare il currency Volatility Adjustment (CuS), ossia l'aggiustamento per valuta vengono utilizzati i seguenti input:

- a) un portafoglio rappresentativo per ogni currency di obbligazioni, cartolarizzazioni, prestiti, azioni e proprietà che copre la migliore stima (BE) delle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione denominate in quella valuta, sulla base dei dati del mercato assicurativo raccolti mediante la segnalazione normativa;
- b) un portafoglio di riferimento valutario di indici dei rendimenti nel mercato basato sul suddetto portafoglio rappresentativo. L'espressione indici di mercato dei rendimenti copre in questa sezione sia le curve dei rendimenti sia gli indici sui rendimenti.

Tali input sono utilizzati per calcolare i seguenti output:

- a. lo spread valutario S tra il tasso di interesse derivato dal portafoglio di indici di riferimento e i tassi della struttura a termine dei tassi di interesse privi di rischio pertinente;
- b. la quota di copertura delle valute, indicata con RC per Risk correction, corrisponde alla "parte dello spread attribuibile a una valutazione realistica delle perdite attese, del rischio di credito imprevisto o di qualsiasi altro rischio, delle attività" nel portafoglio di riferimento (articolo 77 quinquies della direttiva solvibilità II);
- c. lo spread valutario corretto per il rischio, corrisponde alla differenza tra lo spread S e la correzione del rischio RC .

Ai sensi dell'articolo 50 del regolamento delegato, lo spread S prima della correzione del rischio è uguale al seguente:

$$S = w_{gov} \cdot \max (S_{gov}; 0) + w_{corp} \cdot \max (S_{corp}; 0)$$

dove:

- w indica il rapporto tra il valore dei titoli di stato inclusi nel portafoglio di riferimento di attività per quella valuta e il valore di tutte le attività incluse in quel portafoglio di riferimento;
- S_{gov} indica lo spread valutario medio sui titoli di stato inclusi nel portafoglio di riferimento delle attività per quella valuta;
- w_{corp} indica il rapporto tra il valore delle obbligazioni diverse dai titoli di Stato, i prestiti e le cartolarizzazioni inclusi nel portafoglio di riferimento delle attività per quella valuta o quel paese e il valore di tutte le attività incluse in tale portafoglio di riferimento;
- $Scorp$ indica lo spread valutario medio su obbligazioni diverse da titoli di stato, prestiti e cartolarizzazioni incluse nel portafoglio di riferimento delle attività per quella valuta.

Per “titoli di stato” si intendono esposizioni verso governi centrali, banche centrali ed esposizioni verso governi regionali e autorità locali che sono trattate come governi centrali.

La correzione del rischio RC è uguale alla seguente formula:

$$RC = w_{gov} \cdot \max(RC_{gov}, 0) + w_{corp} \cdot \max(RC_{corp}, 0)$$

Dove:

- w_{gov} e w_{corp} sono definite come sopra;
- RC_{gov} denota la correzione al rischio corrispondente alla porzione di spread S_{gov} che è attribuibile a un aggiustamento per le perdite aspettate, rischio di credito inatteso o altri rischi;
- RC_{corp} indica la correzione del rischio corrispondente alla parte dello spread $Scorp$ che è attribuibile a una valutazione realistica delle perdite attese, del rischio di credito imprevisto o di qualsiasi altro rischio.

Lo spread di valuta corretto per il rischio S_{crncy}^{RC} è uguale a:

$$S_{crncy}^{RC} = S - RC$$

La copertura corretta per il rischio può essere coperta se negativa $RC > S$. Il livello minimo di cui all'articolo 50 del regolamento delegato si applica solo a livello di portafoglio allo spread prima della correzione del rischio.

Per ciascuna valuta rilevante, il VA per currency si calcola come segue:

$$VA_{crncy} = 0,65 * S_{crncy}^{RC}$$

Pertanto, anche il VA per singola valuta può essere negativo.

Questo calcolo è stato rivisto dall'EIOPA negli ultimi documenti poiché presentava dei problemi¹⁰. In particolare, il problema riscontrato dall'adozione della formula sopra menzionata è che nel corso degli anni si

¹⁰ Consultation Paper on the opinion on the 2020 review of SII, EIOPA 2019

sono verificati spread negativi, e questa formula così come definita dal quadro legale non dà la possibilità di prenderli in considerazione. La soluzione proposta dall’EIOPA è: o di non effettuare nessun cambiamento, poiché di poco impatto, oppure di modificare l’art. 50 in questo modo: “*Per ogni valuta e ogni paese, lo spread riferito all’articolo 77 quinquies secondo comma, e alla direttiva 2009/138/CE dovrà essere uguale a:*

$$S = w_{gov} \cdot S_{gov} + w_{corp} \cdot S_{corp} ”$$

4.1.2 Aumenti specifici per paese per il Volatility Adjustment

Per ciascun paese rilevante, l’aggiustamento della volatilità valutaria (CoS) è aumentato della differenza tra lo SRC dello spread del paese corretto per il rischio e spread valutario corretto per il rischio, ogni volta che tale differenza è positiva e lo spread di paese corretto per il rischio è superiore a 100 punti base.

Al fine di determinare l’aumento specifico per paese dell’adeguamento della volatilità, vengono utilizzati i seguenti input:

- a. un portafoglio rappresentativo per paese di obbligazioni, cartolarizzazioni, prestiti, azioni e proprietà che copre la migliore stima delle obbligazioni vendute in quel paese, sulla base dei dati del mercato assicurativo raccolti mediante la segnalazione normativa;
 - b. un portafoglio di indici per paese basato sul portafoglio rappresentativo sopra menzionato.
- b) Tali input sono utilizzati per calcolare i seguenti output:
- a. lo spread del paese S tra il tasso di interesse derivato dal portafoglio di indici di riferimento e i tassi della relativa struttura di scadenza del tasso di interesse di base privo di rischio;
 - b. la parte dello spread del paese S, indicato con RC per la correzione del rischio, che corrisponde a “la parte dello spread attribuibile a una valutazione realistica delle perdite attese, del rischio di credito imprevisto o di qualsiasi altro rischio, delle attività” nel portafoglio di riferimento (Articolo 77 quinquies della direttiva solvibilità II);
 - c. lo spread del paese corretto per il rischio, che corrisponde alla differenza tra lo spread S e la correzione del rischio RC.

Lo spread del paese, correzione del rischio e spread del paese corretto per il rischio SRC paese sono calcolati allo stesso modo dello spread valutario, della correzione del rischio e dello spread corretto per il rischio SRC per la valuta di quel paese, ma in base agli input derivanti dal portafoglio rappresentativo del paese e dal portafoglio di riferimento del paese.

Per ogni paese rilevante, può anche applicarsi un aumento specifico della volatilità, come detto inizialmente in modo tale che l’adeguamento della volatilità totale sia pari a:

$$VA = 0.65 \cdot (SRC + \max (SRC - 2 \cdot SRC; 0))$$

dove $SRC > 100$ punti base.

Laddove SRC è inferiore o uguale a 100 punti base, non esiste alcun aggiustamento country specific per l'adeguamento della volatilità.

4.2 Considerazioni sul Volatility Adjustment e curva dei tassi corretta

L'applicazione del VA sulla curva dei tassi d'interesse si esplica come l'aggiunta di un numero fisso, espresso in basis point e arrotondato al numero intero più vicino al punto base, applicato a tutte le scadenze fino all'ultimo punto di liquido (LLP). Trovato il numero si costruisce una matrice dei flussi di cassa relativi ai tassi degli zero coupon bond annualizzati, ottenuti dall'applicazione del modello Smith-Wilson. Per costruire tale matrice verranno utilizzate tutte le maturity fino al Last Liquid Point incluso. Inoltre, per ciascuna scadenza sarà considerato un unico pagamento. Una volta calcolata, a tale matrice verrà aggiunta la VA annualizzata e verrà nuovamente applicato il metodo dell'estrapolazione con gli stessi elementi di input. La rettifica per volatilità non viene aggiunta direttamente ai tassi swap aggiustati per il rischio di credito, ma si aggiunge ai tassi spot zero coupon ottenuti dopo aver utilizzato il metodo Smith-Wilson e solo sulla parte liquida della curva. Quindi, l'aggiunta del Volatility Adjustment si traduce in uno spostamento parallelo verso l'alto della struttura per scadenza dei tassi d'interesse privi di rischio finché non viene raggiunto il LLP, dopo non vi è alcun spostamento parallelo in quanto entrambe le curve (di base e con VA) convergono al medesimo Ultimate Forward Rate di cui diremo sotto.

L'EIOPA ha anche portato avanti una revisione estensiva sull'effettiva efficienza del VA sin da quando quest'ultimo è stato inserito. Gli obiettivi del VA si possono riassumere in tre macroaree che sono:

- prevenire comportamenti pro-ciclici da parte degli investitori;
- mitigare l'impatto di esagerazioni sullo spread sui bond nei fondi propri;
- riconoscere l'illiquidità delle passività ove presente, nella valutazione delle riserve tecniche.

Nonostante questi siano gli obiettivi positivi che si possono raggiungere con il VA, contro di esso vi sono sette debolezze messe in luce nel call for advice pubblicato da EIOPA [18]:

1. l'impatto del VA potrebbe sovra o sotto stimare l'impatto dello spread sul lato degli asset;
2. l'uso del VA non considera l'illiquidità delle passività;
3. l'"effetto collina" che si potrebbe verificare quando si adotta l'aggiustamento per paese;
4. una mis-estimation della correzione per il rischio del VA;
5. un VA quasi sempre positivo, non simmetrico;
6. ipotesi di base per il VA non chiare;

7. il fatto che il VA si applica a tassi privi di rischio non è market consistent.

Per tutte queste carenze, l'EIOPA ha cercato di proporre delle soluzioni, che si renderanno definitive, però solo dopo il ciclo di consultazione che come detto prima avrà termine a fine 2020.

Le varie opzioni, proposte da EIOPA nel Consultation Paper per risolvere questi sette problemi sono:

- VA undertaking specific, ossia specifico a ogni assicurazione (undertaking) calcolando il VA basandosi sul peso di assets undertaking-specific. Per ogni classe, gli spread usati nel calcolo del VA saranno gli stessi per tutti le sottoscrizioni e presi dagli indici di mercato. Questo risolve i problemi 1 e 3 eliminando il VA specifico di ogni paese;
- utilizzare un “middle-bucket approach” insieme al VA già calcolato aggiungendo un undertaking specific VA, ma soggetto a criteri specifici di applicazione che fanno riferimento alla gestione dell’attivo e passivo dell’assicurazione. Questo mitiga il problema 1;
- utilizzare un approccio “asset driven”, ossia che invece di applicare il VA al tasso d’interesse risk-free, esso sarà applicato per rivalutare i bonds tenuti dalle assicurazioni aggiustando il differenziale dei bond con il VA. La differenza in valore tra i bond con e senza il VA è riconosciuta come un fondo proprio. Questo mitiga i problemi 1 e 7;
- un aggiustamento che tiene in considerazione l’ammontare di asset a reddito fisso e i cambiamenti nella duration attraverso gli application ratios;
- un aggiustamento che tiene in considerazione le caratteristiche di illiquidità;
- la correzione al rischio dello spread dev’è separata dallo spread fondamentale, e anzi calcolata come una percentuale fissa dello spread; (potrebbe mitigare il problema 4)
- stabilire una netta distinzione tra la funzione del VA in situazioni di crisi e la funzione del VA come strumento permanente.

4.3 Ultimate forward rate (UFR)¹¹

Si è fatto riferimento precedentemente anche all'UFR che sarebbe un tasso ultimo il quale si deduce per scadenze più lunghe, per le quali gli strumenti finanziari liquidi non sono disponibili e la curva dei rendimenti è determinata per estrapolazione sulla base dei tassi forward (*supra* 3.3.2). Secondo il pacchetto LTG, l'ultimo punto liquido ("Last Liquid Point" – LLP)¹² per l'Euro è la scadenza 20 anni. La curva estrapolata converge, in un periodo di 40 anni per il tasso forward finale ("Ultimate Forward Rate"- UFR), del 4,2%. L'UFR deve essere stabile nel tempo e non deve includere un premio finale che riflette il rischio aggiuntivo di avere un investimento a lungo termine. L'UFR deriva dalle ipotesi sul tasso di interesse a lungo termine e sul tasso di inflazione, e sarà fornito da EIOPA. Quindi l'ultimate forward rate non è altro che un tasso a cui si converge con gli strumenti finanziari più a lungo termine. Esso è molto importante tantochè è stata la causa che ha fatto ritardare l'introduzione della normativa Solvency II. C'è anche da dire però che i titoli con scadenze lunghe sono più rivolti alle assicurazioni vita che sono più incline a effettuare investimenti a lungo termine. Le metodologie del calcolo dell'ultimate forward rate vengono caricate sul sito EIOPA periodicamente.

L'EIOPA calcolerà annualmente gli UFR e, qualora i tassi o le metodologie per calcolarsi siano sufficientemente diversi, l'EIOPA li aggiornerà all'inizio dell'anno successivo. Gli UFR aggiornati sono annunciati ogni anno entro la fine di marzo sul sito web dell'EIOPA. Nove mesi dopo l'annuncio degli UFR aggiornati, l'EIOPA li utilizzerà per calcolare le strutture a termine dei tassi di interesse prive di rischio per le strutture a termine del 1° gennaio dell'anno successivo.

¹¹ Fonte: EIOPA, Report UFR (2020) cfr.[18]

¹² Con LLP si intende il punto in cui i dati di mercato non sono più utilizzati.

CAPITOLO V

APPLICAZIONE PRATICA

5.1 Calcolo del SCR interest di un portafoglio obbligazionario lato attivi secondo Standard Formula e modello CIR

➤ *Portafoglio*

A dimostrazione di quanto fin qui detto, analizzo il rischio tasso d'interesse per un portafoglio obbligazionario nell'attivo di una compagnia di assicurazione, per confrontare i risultati ottenuti mediante l'applicazione della Standard Formula e di quello che potrebbe essere un modello interno – anche se semplificato nella trattazione – in questo caso Cox, Ingersoll, Ross (CIR). Per i calcoli assumo la curva dei tassi risk-free pubblicata dall'EIOPA a marzo 2020¹³ utilizzando i tassi base con Volatility Adjustment e i tassi shift-up con Volatility Adjustment per lo shock.

Il portafoglio è composto da:

Titolo	Scadenza	Cedola (Annuale)	Prezzo di mercato	YTM
ZCB	1/11/2026	0	94,49	0,83%
ZCB	1/10/2028	0	78,66	0,95%
BTP* scad. 2022	1/9/2022	5,5	110,987	2,51%
BTP* scad. 2023	1/10/2023	2,45	105,116	0,68%
BTP* scad. 2025	1/3/2025	3,45	119,004	2,52%

*Si suppone una cedola annuale per semplicità di calcolo.

5.2 Analisi secondo standard formula

Per calcolare il rischio di tasso d'interesse di questi titoli, conformemente al metodo Standard Formula, attualizzo le cedole e il valore facciale moltiplicando per i tassi delle suddette curve, EIOPA base e Shift-up con VA, corrispondenti a ogni scadenza. I prezzi che ricaviamo differiscono dal prezzo di mercato poiché vengono calcolati tramite la curva EIOPA che è composta da tassi swap risk-free e per definizione (risk-free) non tiene conto dello spread, ossia il rischio Paese, che secondo Solvency II verrà calcolato separatamente e poi aggregato agli altri rischi mediante la matrice di correlazione cfr. [Cap. II].

¹³ https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en?source=search

Calcolando i prezzi, base e shift up, si trova quindi, la differenza tra i prezzi che consiste nel SCR interest lato attivi, ossia la perdita dovuta al solo rischio di tasso d'interesse sui singoli titoli. Di seguito i risultati:

Titolo 2	ZCB scad. 8 anni
Prezzo base	96,82
Prezzo shock up	89,44
SCR Interest	7,38

Titolo 1	ZCB scad 6 anni
Prezzo base	98,14
Prezzo shock up	92,47
SCR interest	5,67

Titolo 3	BTP	cedola annuale	5,5			
t in anni	Stacco cedola	CF	Prezzo base attualizzato	Prezzo shock up attualizzato	SCR interest	
0,37	01/09/2020	5,5	5,50	5,48	2,88	
1,37	01/09/2021	5,5	5,49	5,41		
2,37	01/09/2022	105,5	105,16	102,38		
			TOT.	TOT.		
			116,15	113,27		

Titolo 4	BTP	cedola annuale	2,45			
t in anni	Stacco cedola	CF	Prezzo base attualizzato	Prezzo shock up attualizzato	SCR interest	
0,45	01/10/2020	2,45	2,45	2,44	3,54	
1,45	01/10/2021	2,45	2,45	2,41		
2,45	01/10/2022	2,45	2,44	2,38		
3,45	01/10/2023	102,45	101,83	98,40		
			TOT.	TOT.		
			109,17	105,63		

Titolo 3	BTP	cedola annuale	3,45			
t in anni	stacco cedola	CF	Prezzo base attualizzato	Prezzo shock up attualizzato	SCR Interest	
0,87	01/03/2021	3,45	3,45	3,42	5,15	
1,87	01/03/2022	3,45	3,44	3,38		
2,87	01/03/2023	3,45	3,44	3,34		
3,87	01/03/2024	3,45	3,43	3,30		
4,87	01/03/2025	103,45	102,37	97,54		
			TOT.	TOT.		
			116,13	110,97		

5.3 Analisi usando il CIR

Per quanto riguarda il modello interno prescelto (CIR) invece, inizio calibrando lo stesso cercando un “fit” con la curva dei tassi di mercato swap con Volatility Adjustment offerta da EIOPA.

Per fare ciò mi avvalgo dell’equazione differenziale del tasso spot in forma chiusa del modello CIR:

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho\sqrt{r_t}dZ(t)$$

5.3.1 Calibratura del modello CIR

Per calibrare il modello, ossia ricavare i parametri $\alpha, \gamma, r_0, \pi, \rho$ (rispettivamente velocità di avvicinamento al valore gamma, valore finale del tasso, tasso istantaneo di interesse in 0, premio per il rischio, volatilità del tasso) adotto il metodo della minimizzazione della differenza dei quadrati $\min \sum (v_{risk-free\ EIOPA} - v_{CIR})^2$. Parto attribuendo dei valori iniziali a tali parametri (riportati in tabella) imposto l’equazione di minimizzazione ossia la differenza al quadrato tra i fattori di sconto trovati con il modello CIR per ogni scadenza e quelli ricavati dalla curva dei tassi EIOPA (scarto quadratico medio), sapendo che il prezzo di uno ZCB unitario secondo il CIR è uguale a:

$$v(t, T) := A(\tau)e^{-r_t B(\tau)}$$

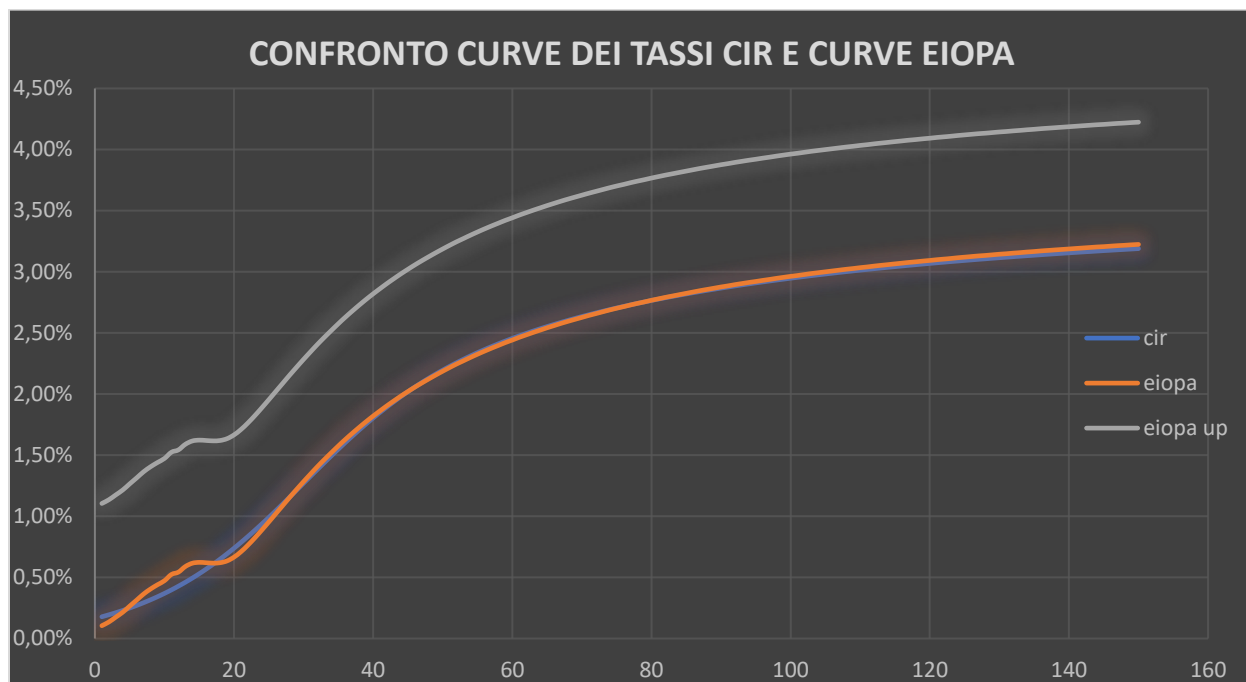
A questo punto, mi trovo davanti un problema di ottimo e per risolverlo minimizzando la differenza dei quadrati, utilizzo il solver di Excel con un metodo di risoluzione GRG non lineare. Nella risoluzione del problema non sono stati imposti vincoli alle variabili. Ricavo i parametri necessari:

Parametri CIR	Valori iniziali	Valori finali
α	0,1	0,00019992
γ	0,5	0,626568472
r_0	0,015	0,1627
π	0	0,102926909
ρ	0,01	0,027148705

I valori ottenuti sono quelli che, dopo alcune prove modificando i parametri iniziali, minimizzano il valore dello scarto quadratico sopra citato portandolo uguale a: 0,002545354. Ho svolto altre prove con set di parametri iniziali diversi ma i risultati del valore della differenza ottenuti erano pari a 0,004 o 0,005 quindi maggiori per tale motivo esclusi.

Trovati i parametri, ricavo sia la distribuzione effettiva di v (fattori di sconto unitari per ogni scadenza) - che minimizza la differenza dei quadrati - sia la distribuzione dei tassi spot base a ogni scadenza fissando r_0 che è tasso iniziale, dato che appunto il modello CIR dipende solo dal tasso istantaneo. In questo caso ho assunto che r_0 fosse un parametro del modello e l’ho ricavato attraverso il processo di calibrazione. Riassumo in un

grafico gli andamenti della curva dei tassi del modello CIR a confronto con la curva dei tassi fornita dall'EIOPA.



Nel grafico riporto la curva dei tassi CIR, la curva dei tassi risk-free EIOPA base e la curva dei tassi EIOPA shift-up. Osservo che la curva dei tassi CIR base, segue abbastanza bene la curva dei tassi EIOPA base per scadenze superiori ai 30 anni, nelle scadenze iniziali invece il modello non riesce a spiegare il flesso mostrato dalla curva EIOPA poiché il modello CIR è un modello univariato dipende cioè da una sola fonte di incertezza, mentre il modello Smith-Wilson con il quale sono ricavate le strutture dei tassi EIOPA, è un modello polinomiale che utilizza più variabili.

5.3.2 Simulazioni con R

Ciò stante, per confrontare i prezzi stressati calcolati con la formula standard e quelli ricavati tramite il CIR è necessario trovare la distribuzione stocastica dei prezzi dei titoli a un anno e conseguentemente calcolare il VaR al 99,5% percentile, su un orizzonte temporale di un anno, dei titoli del portafoglio. Per fare ciò mi avvalgo di un software R¹⁴ e attraverso il metodo Monte-Carlo, ossia un processo simulativo che utilizza valori pseudo-casuali per determinare numericamente le possibili traiettorie di una variabile aleatoria, simulo 50.000 possibili andamenti del tasso istantaneo ($r(t)$) così da trovare la distribuzione intrinseca del modello CIR: una chi-quadro non centrata. Utilizzo il pacchetto `yuima` per simulare il processo stocastico del modello CIR.¹⁵

¹⁴ <https://www.r-project.org/>

¹⁵ <https://cran.r-project.org/web/packages/yuima/yuima.pdf>

Il codice formulato è:

```

B<-50000 #numero simulazioni
r<-0.001627413 #r0
a<-0.0001999 #alpha
g<-0.626568 #gamma
p<-0.02714870 #ro
pi<-0.102926909 #pi greco
sq <- function(x){y = 0;if(x>0){y = sqrt(x);}return(y);}#modello cir
model<- setModel(drift="0.0001999*(0.626568-x)",
diffusion="0.02714870*sq(x)",solve.variable=c("x"))
T<-1 #arco temporale di riferimento
n<-365
sampling <- setSampling(Terminal=T,n=n)
yuima<-setYuima(model=model, sampling=sampling)#utilizzo pacchetti yuima
cir<- mat.or.vec(nr=B,nc=n+1)
for (i in 1:B){
temp<-simulate(yuima,xinit=r)
cir[i,]<-temp@data@zoo.data$'Series 1'
}
plot(cir[1,],type="l",ylim=c(0,0.01))#plot delle simulazioni del cir
for (i in 1:B){
lines(cir[i,],col=i)
}
hist(cir[,366],breaks=100,main="distribuzione tasso istantaneo a un anno")
#ultima colonna della matrice CIR tasso istantaneo di interesse a un anno#
quantile(cir[,366],0.995) #rappresenta il VaR al 99,5% cioè il massimo
valore che può assumere il tasso spot al 99,5%

```

Faccio notare che la simulazione del tasso istantaneo è stata fatta senza tener conto dell’aggiustamento per il rischio ovvero considerando pari a 0 la variabile π . Questo mette in luce la differenza tra valori real world e valori risk adjusted¹⁶. Nella calibrazione del modello, i parametri stimati vengono osservati con l’aggiustamento per il rischio per tale motivo “risk adjusted”, poiché è intrinseco nei dati di mercato. In tale configurazione il modello può essere utilizzato per la definizione dei prezzi dei titoli. Nella simulazione prospettica del tasso invece si deve riportare il modello in termini real world ossia ponendo l’aggiustamento per il premio a rischio pari a 0 ossia rimuovendolo da quello osservato risk adjusted. Puntualizzo che per il modello CIR la funzione drift aggiustata per il rischio è pari a:

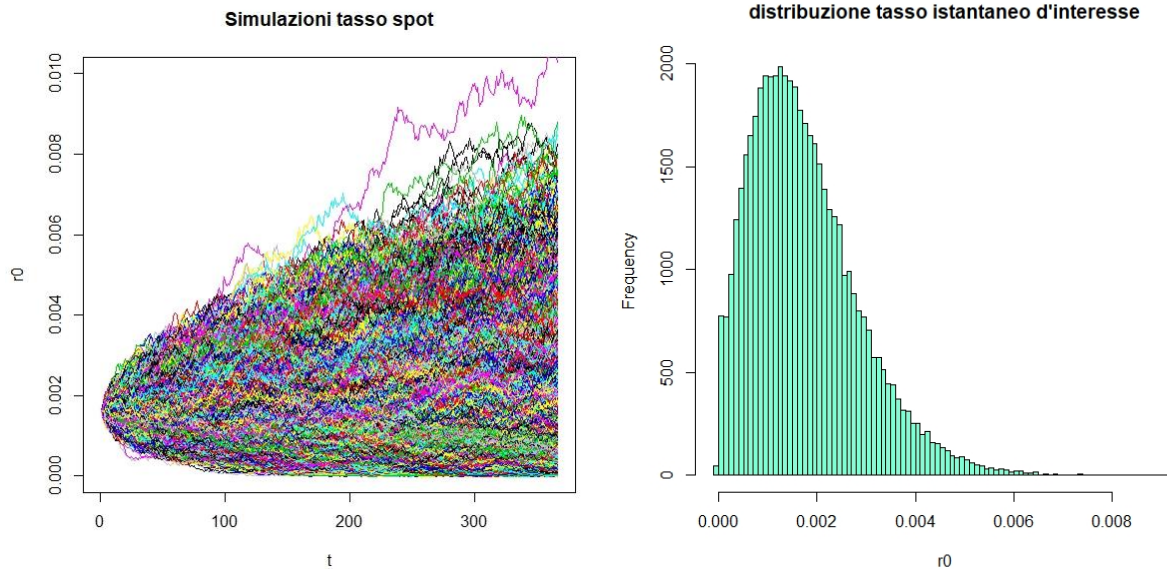
$$\hat{f} = \alpha(\gamma - r_t) + \pi r_t$$

Dove α e γ in questo caso sono uguali a:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \pi \text{ e } \hat{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha - \pi} \gamma$$

¹⁶ “Real-world and risk-neutral probabilities in the regulation on the transparency of structured products”, di L. Giordano, G. Siciliano, CONSOB.

Nella simulazione prospettica del tasso istantaneo, cioè il codice riportato sopra, tale misura è espressa in real world ossia supponendo π pari a 0. Sostituendo ottengo quindi che $\hat{\alpha} = \alpha$ e $\hat{\gamma} = \gamma$, motivo per il quale nel codice i valori riportati sono quelli corrispondenti ai parametri di ottimo α e γ senza tener conto di π . Graficamente:



A sinistra, la simulazione Monte-Carlo del tasso istantaneo CIR sull'orizzonte temporale di un anno (365 giorni), a destra, l'istogramma della distribuzione tasso spot alla fine dell'anno. Come possiamo vedere tramite l'istogramma, la distribuzione degli r_0 a un anno ha le caratteristiche della distribuzione chi-quadro non centrata come precedentemente detto.

Il parametro π verrà invece utilizzato successivamente nel ricalcolare il prezzo dei titoli, perché in questo caso è invece necessario tener conto dell'aggiustamento per il rischio.

Procedendo, per avere una conferma che la simulazione fatta è corretta, calcolo prima la media e la varianza del modello CIR in base alla formula chiusa, poiché il modello ha già di per sé una distribuzione nota in formule:

$$E[r(s)] = \gamma - [\gamma - r(t)]e^{-\alpha(s-t)}$$

$$Var[r(s)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-\alpha(s-t)}] [2r_t - e^{-\alpha(s-t)} + \gamma (1 - e^{-\alpha(s-t)})]$$

I risultati ottenuti dalla formula chiusa coincidono con quelli calcolati con R a meno di un margine di errore dovuto al numero di simulazioni effettuate ciò conferma l'impostazione simulativa utilizzata.

Statistiche	Formola chiusa	Simulazioni	Delta % ¹⁷
Media	0,001752339	0,00175918	0,39%
Varianza	1,24528e-06	1,259958e-06	1,18%

Seguendo il codice, ricaviamo la distribuzione dei prezzi degli ZCB impostando una funzione dipendente da r -simulato e τ . Come vediamo dal codice in basso, dipende anche da π ossia π .

```

cirzcb<- function(a,p,r,pi,g,tl) {
dl<-sqrt((a-pi)^(2)+2*p^(2))
vl<-2*((a*g)/(p^2))
Al<-(2*d1)
A2<-Al*exp((a-pi+d1)*((tl-0)/2))
A3<- A2/((a-pi+d1)*(exp(d1*(tl-0))-1)+2*d1)
A4<-A3^(vl)
B1<-(exp(d1*(tl-0))-1)
B2<-2*B1
B3<-(a-pi+d1)
B4<-(B3*(exp(d1*(tl-0))-1)+2*d1)
B5<-B2/B4
v2<-A4*exp(-r*B5)
return(v2)
}

```

Questa funzione riprende $A(t)$ e $B(t)$, definite nel capitolo III dell'elaborato. Quando richiamerò la funzione all'interno della console R definisco i parametri, come detto prima r -simulato e $t1 = \tau$. Dopodichè ricavo la distribuzione degli ZCB a 6 anni e 8 anni nel nostro portafoglio e poi dei BTP come di seguito riportato:

```

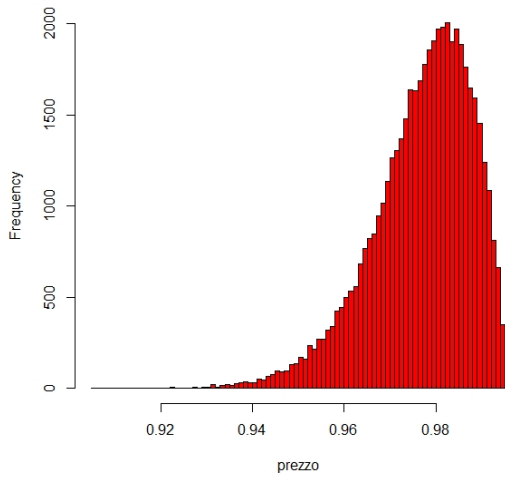
v01<-cirzcb(a,p,r,pi,g,1)
zcb1<-v01*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,5)
zcb2<-v01*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,7)
btp1<-
v01*(2.45+2.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,1))+2.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,2)
+102.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,3)
btp2<-
v01*(3.45+3.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,1))+3.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,2)
+3.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,3)+103.45*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,4)
btp3<-
v01*(5.5+5.5*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,1))+105.5*cirzcb(a,p,cir[1366],pi,g,2)

```

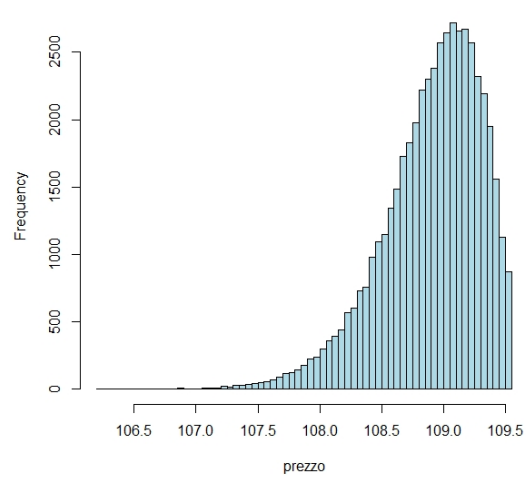
Quello che otteniamo saranno le distribuzioni del prezzo dei titoli a un anno del nostro portafoglio:

¹⁷ $(0,00175918-0,001752339)/(0,001752339)=0,39\%$ stessa cosa per la varianza.

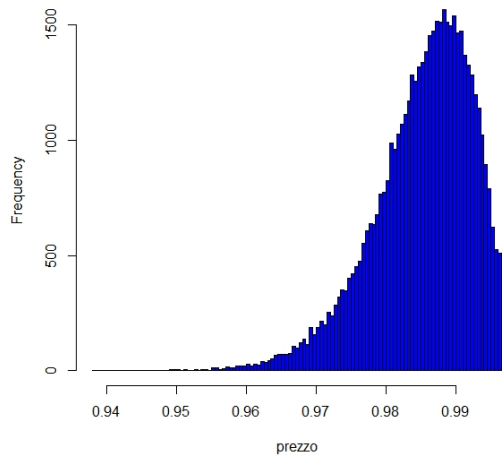
Distribuzione a un anno del prezzo ZCB a 8 anni



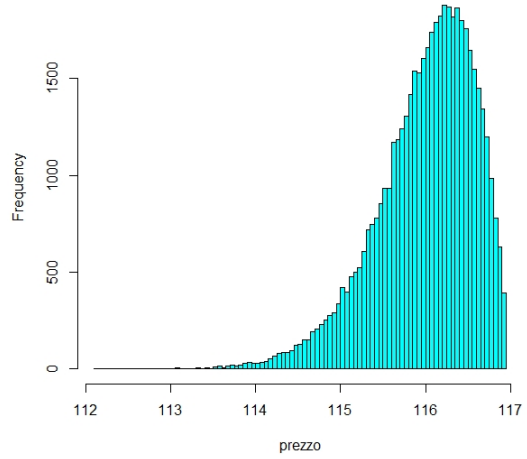
Distribuzione a un anno del prezzo BTP cedola 2,45



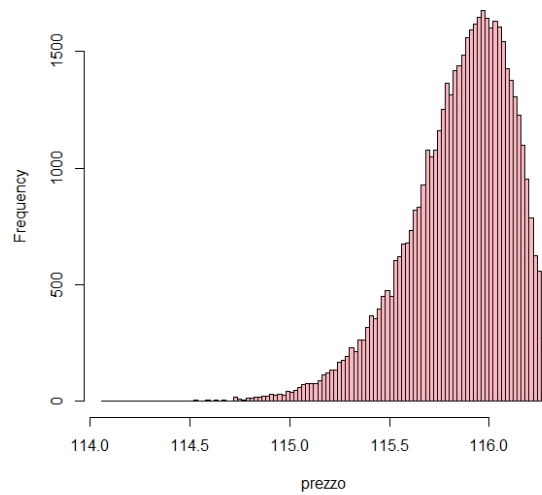
Distribuzione a un anno del prezzo ZCB a 6 anni



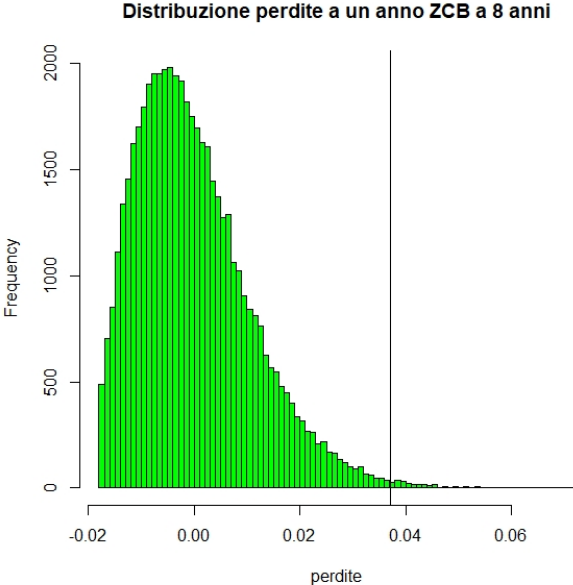
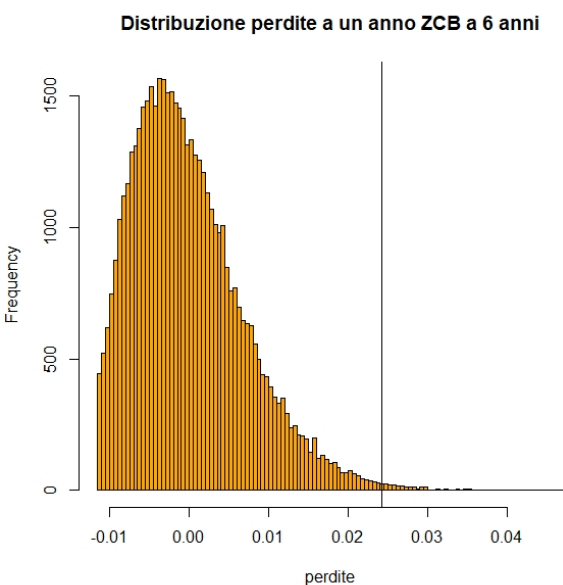
Distribuzione a un anno del prezzo BTP cedola 3,45



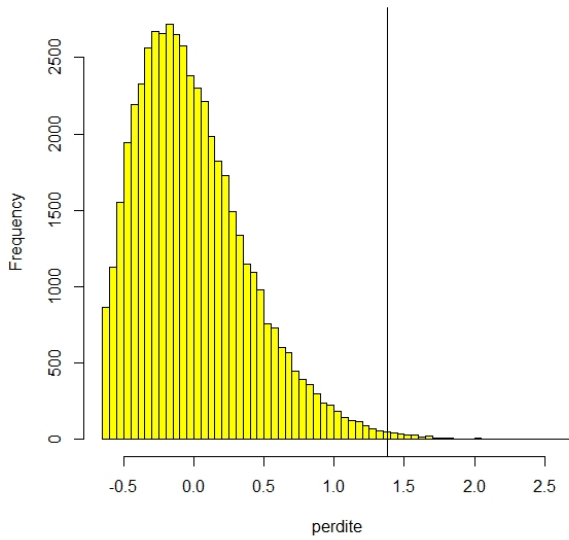
Distribuzione a un anno del prezzo BTP cedola 5,5



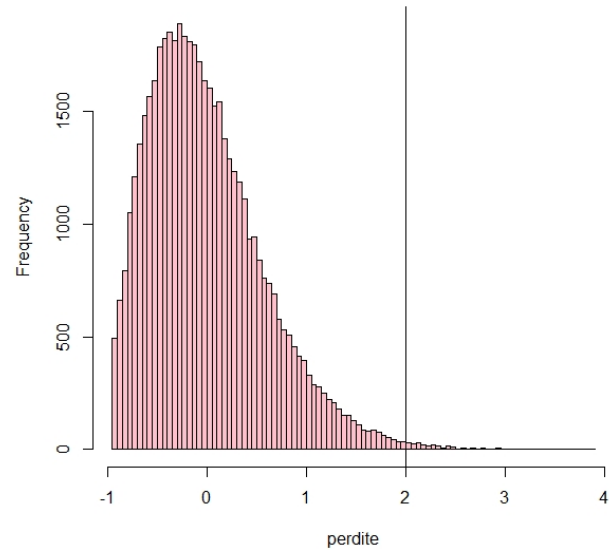
Ricavate le distribuzioni dei prezzi dei titoli del portafoglio per calcolare il VaR che corrisponde al quantile della coda destra della distribuzione delle perdite, cioè la massima perdita al 99,5% (così come stabilito da Solvency II), mi serve determinare la distribuzione delle perdite dei titoli. Tanto più alto è il VaR, tanto più è la perdita che si potrebbe registrare sul portafoglio. Riporto la distribuzione delle perdite dei singoli titoli. La linea verticale indica il VaR sul grafico. (Per gli ZCB il risultato è da moltiplicare per 100 poiché è calibrato su un fattore di sconto unitario).



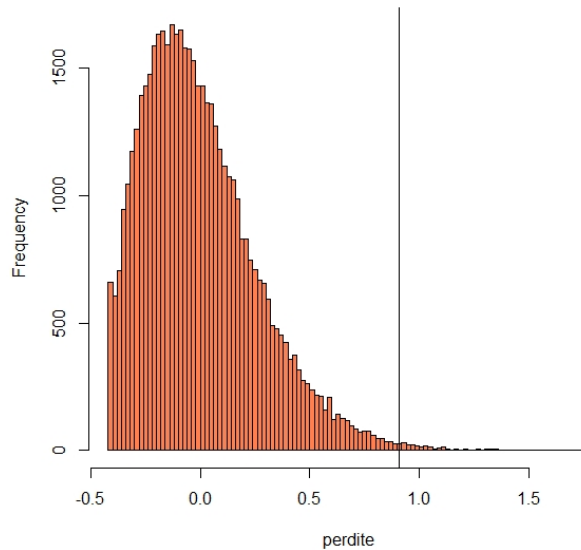
Distribuzione perdite a un anno del BTP cedola 2,45



Distribuzione perdite a un anno BTP cedola 5,5



Distribuzione perdite a un anno BTP cedola 3,45



Il codice per ottenere i grafici e i risultati in basso è:

```
zcb1m<-v01*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,5)#Prezzo medio dello zcb a 6
anni
zcb2m<-v01*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,7) #prezzo medio dello zcb a 8
anni
btp1m<-
v01*(2.45+2.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,1))+2.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,
366]),pi,g,2)+102.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,3)#prezzo medio del
btp ced. 2,45
btp2m<-
v01*(3.45+3.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,1))+3.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,
366]),pi,g,2)+3.45*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,3)+103.45*cirzcb(a_p,mean
(cir[,366]),pi,g,4) #prezzo medio del btp ced. 3,45
btp3m<-
v01*(5.5+5.5*cirzcb(a_p,mean(cir[,366]),pi,g,1))+105.5*cirzcb(a_p,mean(cir[,3
66]),pi,g,2)#prezzo medio btp ced.5,5
```

La differenza tra il valore medio e il valore allo 0,5% della distribuzione dei prezzi a un anno dei titoli corrisponde al VaR al 99,5% della distribuzione delle perdite. In formule:

$$VaR_{99,5\%,perdite} = v(0,1)[v_{(1,T)medio} - v_{(1,T)al\ 0,5\%}]$$

Di seguito i risultati ottenuti tramite standard formula e modello interno:

Titoli	SCR interest (solo attivi)	VaR CIR
ZCB 6 anni	5,67	2,41
ZCB 8 anni	7,38	3,71
BTP 5,5 scad. 2 anni	2,88	1,38
BTP 2,45 scad. 3 anni	3,54	2,00
BTP 3,45 scad. 5 anni	5,15	0,91
Totale	24,62	10,42

I risultati presentano delle differenze abbastanza consistenti dovute alle assunzioni fatte in precedenza ossia che il modello CIR che ho utilizzato è stato calibrato tenendo conto della volatilità derivata dalla sola struttura per scadenza EIOPAE non tenendo conto delle volatilità osservate sul mercato dei tassi. Inoltre, come ho detto prima il modello CIR presenta dei limiti in maggior parte dovuti al fatto che è un modello univariato.

Conclusioni

L'analisi che si è condotta all'interno dell'elaborato, conferma che Solvency II è un apparato efficiente per controllare in modo armonizzato il settore assicurativo europeo. Sicuramente insieme a Basilea è un impianto necessario per creare una maggiore unione all'interno dell'EU. La possibilità che esso dà di poter calcolare i requisiti patrimoniali mediante modelli interni permette alle assicurazioni di plasmare i requisiti ancor meglio secondo i peculiari profili di rischio. Non meno gli accorgimenti come il VA, permettono di adeguare la stima delle poste in bilancio concordemente con il quadro macroeconomico (Paese), in cui l'assicurazione opera e cercare di evitare loro sovrastime o sottostime e abbassamenti di capitale. Questo però porta anche a delle problematiche poiché come abbiamo detto il VA potrebbe portare a sopra o sotto stimare la struttura dei tassi o creare il cosiddetto "effetto collina" o non scattare quando necessario per ridurre effettivamente la volatilità dei tassi dovuta al rischio paese. Questo punto è di aperto dibattito all'interno dell'EIOPA.

L'analisi pratica che ho sviluppato ha riguardato il confronto tra l'SCR interest calcolato con l'uso della formula standard e l'SCR interest ricavato con il modello CIR per un portafoglio di titoli obbligazionari. Nella costruzione del framework di valutazione del rischio di tasso ho calibrato il CIR sulla curva dei tassi EIOPA, riportando la curva trovata su un grafico ho poi sviluppato le proiezioni del tasso istantaneo con l'ausilio del metodo Montecarlo attraverso il software R.

Nell'esercizio di stima del rischio di tasso d'interesse ho tenuto conto dell'aggiustamento per il premio a rischio ponendo il parametro π del CIR pari a zero nella proiezione ad un anno (Real World) mentre nel caso del pricing si è lasciata la configurazione Risk-Adjusted.

Ho proseguito calcolando il VaR attraverso la distribuzione delle perdite calcolata sempre su R.

I risultati ottenuti, come era lecito attendersi, mostrano delle differenze dovute all'utilizzo di un approccio alternativo rispetto allo shift dei tassi utilizzato dall'EIOPA e anche al fatto che si è utilizzato un modello univariato, calibrato cercando un fit con la curva dei tassi EIOPA assumendo che la volatilità dei tassi fosse insita nella stessa, invece di essere ricavata separatamente con opportuni strumenti di mercato o con analisi in serie storica. Concordemente ai risultati, in caso di rialzo dei tassi, la variazione del portafoglio a causa del rischio tasso d'interesse è: secondo standard formula 24,62 mentre per il modello CIR è 10,42.

Ciò vuol dire che i requisiti patrimoniali richiesti a fronte del SCR Interest, saranno maggiori per la Standard Formula e minori invece per il modello CIR. In generale si può osservare che, le assicurazioni che adottano un modello interno saranno in grado di stimare con maggiore precisione i loro rischi effettivi e stanziare il capitale adeguato, mentre con la standard formula si potrebbero avere sovrastime/sottostime del capitale per diversi profili di rischio. Implementare un modello interno, però ha anche i suoi costi iniziali molto elevati motivo per il quale non tutte le imprese assicuratrici, soprattutto quelle di piccole e medie dimensioni, non se ne avvalgono.

Senza dubbio ci sono ancora dei punti da risolvere all'interno della disciplina Solvency II come il metodo per l'estrapolazione dei tassi Smith-Wilson e la questione del VA. Per tale motivo, è infatti prevista una review per il 2021, ma stando alle analisi fino ad oggi condotte, anche sottoposte allo stress dovuto al COVID-19, si può dire che Solvency II è un impianto che funziona e che sta dando i suoi frutti rendendo il settore assicurativo ben capitalizzato e in grado di far fronte alla sfida, come detto nelle considerazioni sul sito EIOPA.

BIBLIOGRAFIA

1. ANIA (2018), *Solvency II Review 2018*
2. Casarano, G., Castellani G., Passalacqua L., Perla F., Zanetti P. (2015) “*Relevant applications of Monte Carlo simulation in Solvency II*”
3. COMMISSIONE EUROPEA, *Commission delegated regulation EU 2019/981*
4. COMMISSIONE EUROPEA (2019) *Commission Delegated Act 981/2019*
5. DIRETTIVA 2009/138/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO (2009), *in materia di accesso ed esercizio delle attività di assicurazione e riassicurazione (solvibilità II)*
6. DIRETTIVA 2014/51/UE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO (2014), *che modifica le direttive 2003/71/CE e 2009/138/CE e i regolamenti (CE) n. 1060/2009, (UE) n. 1094/2010 e (UE) n. 1095/2010 per quanto riguarda i poteri dell'Autorità europea di vigilanza (Autorità europea delle assicurazioni e delle pensioni aziendali e professionali) e dell'Autorità europea di vigilanza (Autorità europea degli strumenti finanziari e dei mercati)*
7. DIRITTO BANCARIO (2015), *Revisione della metodologia per il calcolo dell'ultimate forward rate*
8. REGOLAMENTO DELEGATO 2015/35/CE integrante direttiva
9. EIOPA (2019), *Technical Specification*
10. EIOPA (2018), *Consultation Paper on Solvency II review 2018*
11. EIOPA (2018), *Second set of Advice on SII*,
12. EIOPA (2017), *Technical Documentation*,
13. EIOPA (2019) *Technical Documentation*
14. EIOPA, *Guidelines on ORSA*
15. EIOPA *Technical Information on risk free interest rate term-structure*
16. EIOPA (2019), *Updates representative portfolios to calculate volatility*,

17. EIOPA (2017), *Press releases UFR*
18. EIOPA (2020), *Report 2020 UFR*
19. EIOPA (2020, Jan.), *Technical Documentation*
20. EIOPA (2019), *Long Term Guarantees Assessment*
21. EIOPA (2019), *Consultation paper on the opinion on the 2020 review of Solvency II*
22. Ellen Matthews, Meghan Patrick, “*Solvency II Delegated Regulations 2018 Interim Review*”
23. Fichera F. e Scalise M. “ *"Solvency II": impatti del nuovo regime sui profili pubblicistici della vigilanza assicurativa – "Solvency II": impacts of the new regime on the public profiles of insurance supervision*”
24. Hajek, S. (2011), *Solvency II*
25. IVASS (2012), *Guida a Solvency II*
26. IVASS, (2017) *Regolamento esecuzione (UE) 2017/309 su riserve tecniche e fondi propri di base*
27. IVASS, (2009) *Direttiva Solvency II 2009*
28. IVASS (2017), *Direttiva Solvency II aggiornata*
29. IVASS (2015), *Regolamento delegato UE 2015-35 della Commissione*
30. LøchteJørgensen P. (2016) “*An analysis of the Solvency II regulatory framework’s Smith-Wilson model for the term structure of risk-free interest rates*”
31. Moriconi De Felice, vol. 1 “*Manuale di finanza*”
32. Moriconi, De Felice vol. 2 e vol. 3 “*Manuale di finanza*”
33. Savelli N., Clemente Gian P., Zappa D., (2015) “*The impact of Reinsurance Strategies on Capital Requirements for Premium Risk in Insurance*”
34. Siri, M. (2017), *Insurance Regulation in the European Union*

35. Velliscig L. (2017), *“L'accesso e l'esercizio dell'attività assicurativa tra normativa europea e normativa italiana: il modello di "Solvency II"”*
36. *“Real-world and risk-neutral probabilities in the regulation on the transparency of structured products”*, di L. Giordano, G. Siciliano
37. *“Market based tools for managing the life insurance company”* di Massimo De Felice e Franco Moriconi

Sitografia

<https://www.eiopa.europa.eu/>

<https://www.ivass.it/>

<https://www.ania.it/>