

# LUISS



Dipartimento di Impresa  
e Management

Cattedra di Matematica

# Teoria dei Giochi: Analisi ed Applicazioni

Prof. Maria Sole Staffa

---

RELATORE

Matteo Guerrini Matr. 23882:

---

CANDIDATO

Anno Accademico 2021/2022



# INDICE

<b>1. INTRODUZIONE</b> .....	4
<b>1.1. Presentazione della Teoria dei Giochi</b> .....	4
<b>1.2. Storia ed evoluzione della Teoria</b> .....	5
<b>2. DEFINIZIONE E TIPOLOGIE DI GIOCHI</b> .....	7
<b>2.1. Definizione di Gioco</b> .....	7
<b>2.2. Equilibrio di Nash</b> .....	10
<b>2.3. Nella pratica: Duopolio di Cournot</b> .....	12
<b>2.4. Classificazioni dei Giochi</b> .....	14
<b>3. GIOCHI NON COOPERATIVI</b> .....	16
<b>3.1. Giochi a Somma Zero</b> .....	16
<b>3.2. Strategie miste ed Equilibrio di Nash</b> .....	18
<b>3.3. Strategia di Minimax</b> .....	21
<b>3.4. Giochi dinamici</b> .....	23
<b>3.5. Nella pratica: Duopolio di Stackelberg</b> .....	24
<b>4. INFORMAZIONE</b> .....	27
<b>4.1. Informazione completa ed imperfetta</b> .....	27
<b>4.2. Giochi statici ad informazione incompleta</b> .....	31
<b>4.3. Giochi dinamici ad informazione incompleta</b> .....	34
<b>APPROFONDIMENTO: TEORIA EVOLUTIVA DEI GIOCHI</b> .....	36
<b>CONCLUSIONE</b> .....	40
<b>BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA</b> .....	41

# 1. INTRODUZIONE

## 1.1. Presentazione della Teoria dei Giochi

La Teoria dei Giochi è una branca della matematica che studia modelli di interazione tra agenti razionali, con obiettivi contrastanti o concordanti ed in presenza di differenti gradi di informazione. Trova applicazione in economia, informatica e sociologia grazie alla sua capacità di descrivere situazioni di interazioni complesse tra agenti e di trovare delle strategie ottimali per ogni agente, cosiddette *di equilibrio*.

Per intuire l'essenza della teoria si fa riferimento al seguente problema, posto inizialmente da Dresher e Flood e perfezionato da Poundstone nel 1993<sup>1</sup>: si identifica uno scenario in cui due prigionieri, accusati di aver commesso un furto, sono rinchiusi in via precauzionale ed interrogati separatamente. Ogni prigioniero ha due opzioni: Confessare (C) o Tacere (T). Se uno dei due confessa, e l'altro non lo fa, colui che ha confessato non viene condannato e colui che non lo ha fatto sconta 10 anni di prigione. Tuttavia, se entrambi tacciono, tutti e due saranno condannati ad 1 anno per un reato minore. Infine, se entrambi confessano, dovranno scontare 5 anni ciascuno.

*Figura 1: Dilemma del Prigioniero*

G.1/G.2	C	T
C	(-5,-5)	(0,-10)
T	(-10,0)	(-1,-1)

Posto che i prigionieri non possano comunicare o mettersi d'accordo, appare evidente come la scelta ottimale di ogni giocatore non dipenda solo da sé stesso. Questo classico esempio di Teoria dei Giochi pone in risalto le problematiche che sorgono quando due o più soggetti possono compiere scelte che influenzano quelle degli altri partecipanti. Difatti, entrambi i prigionieri vorrebbero non confessare di modo da ottenere una pena minima; tuttavia, non sapendo cosa farebbe l'altro rischierebbero di dover scontare i 10 anni.

L'obiettivo di questo elaborato è *in primis* quello di analizzare analiticamente tutte le tipologie di Giochi, fornendone le rispettive soluzioni (ove presente). Durante la trattazione saranno analizzati diversi equilibri, in ordine crescente di complessità. Inizialmente saranno trattati i giochi statici e dinamici ad *informazione completa*, successivamente saranno introdotte delle limitazioni all'informazione dei giocatori nei giochi cosiddetti ad *informazione incompleta*. In secondo luogo, saranno discusse le implicazioni pratiche in ambito socioeconomico, in particolare riguardo le situazioni duopolistiche tra imprese.

---

<sup>1</sup> Poundstone; *Prisoner's Dilemma*, 1993

## 1.2. Storia ed evoluzione della Teoria

I primi documenti che trattano l'argomento del gioco risalgono alla metà del XVII secolo. Precisamente, furono Pascal e Fermat nel 1654 a porre le basi del calcolo combinatorio e a fornire delle soluzioni per il "problema della posta": un gioco in cui viene richiesto di calcolare un modo per dividere la posta in palio fra due giocatori, in base alle loro probabilità di vincita finale. Tuttavia, la nascita formale della Teoria dei Giochi è attribuita alla pubblicazione di *On the Theory of Games of Strategy* di John Von Neumann nel 1928, un articolo che tratta degli equilibri per i giochi a somma zero, nei quali al guadagno di un giocatore corrisponde una simmetrica perdita dell'altro. Negli anni successivi sempre più studiosi si interessano alla disciplina, nel 1944 Von Neumann pubblica insieme a Morgenstern il libro *Theory of Games and Economic Behavior*, che completa l'analisi iniziata nel 1928 e fornisce la seguente definizione assiomatica di *utilità*:

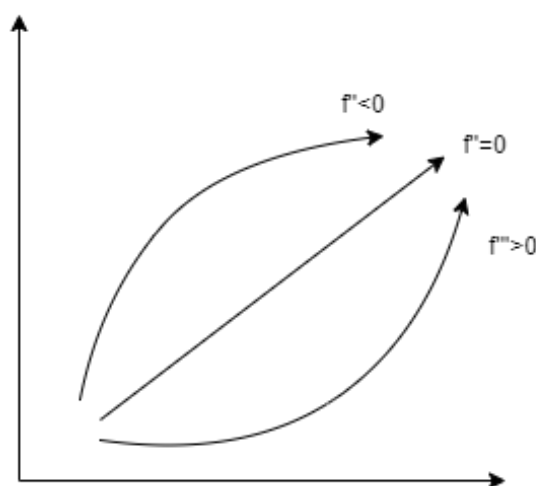
### DEFINIZIONE 1.2.1

Si consideri una lotteria  $X$  con due possibili esiti:  $a$  (con probabilità  $p$ ) e  $b$  (con probabilità  $1-p$ ). La funzione di utilità  $U$  della lotteria sarà:  $U[X(a,b;p)] = U(a)p + U(b)(1-p)$

Inoltre, per ogni possibile ricchezza  $A$ , la sua utilità sarà data dalla somma dei suoi possibili esiti moltiplicati per la loro probabilità  $E(U(A)) = \sum_i U(A_i) p_i$ .

Evidentemente, ogni individuo razionale tenderà a massimizzare l'utilità in base alla propria funzione, detta proprio *funzione di utilità*. È bene notare come l'analisi della derivata seconda di tale funzione sia indicativa della sua propensione al rischio:

Figura 2: Funzioni di Utilità



Ricordiamo che il calcolo della derivata seconda di una funzione, se possibile, fornisce delle indicazioni riguardo la convessità o concavità della funzione. Nei tratti in cui  $f'' > 0$  la funzione si dice convessa, nei tratti in cui  $f'' < 0$  la funzione si dice concava. I punti in cui  $f'' = 0$  si dicono punti di flesso, ovvero quei punti in cui solitamente la funzione modifica la propria concavità o convessità. Se  $f'' = 0$  in tutto il suo

dominio allora la funzione è lineare. Nel nostro caso:  $f'' < 0$  indica una bassa propensione al rischio poiché l'utilità marginale diminuisce progressivamente;  $f'' = 0$  indica una media propensione al rischio poiché l'utilità marginale rimane costante;  $f'' > 0$  indica una alta propensione al rischio poiché l'utilità marginale cresce progressivamente.

Negli anni '50 viene sviluppato il dilemma del prigioniero appena visto e John Nash elabora un nuovo criterio per l'equilibrio dei giochi, noto come Equilibrio di Nash, la cui discussione è rimandata al paragrafo 2.2. Dagli anni '50 ad oggi la Teoria dei Giochi subisce notevoli ampliamenti ed è la base per la Teoria dei Giochi Evolutivi.

## 2. DEFINIZIONE E TIPOLOGIE DI GIOCHI

### 2.1. Definizione di Gioco

Contrariamente a quanto avveniva nella Ricerca Operativa tradizionale, in cui un solo individuo poteva prendere decisioni in autonomia, la Teoria dei Giochi presuppone che le scelte di ogni *giocatore* siano influenzate reciprocamente. Difatti, ogni giocatore persegue un proprio obiettivo, solitamente la massimizzazione del proprio pay-off, il quale può differire o meno da quello degli altri giocatori. Per ipotesi, ogni decisore opera in modo razionale, cercando di minimizzare il rischio e massimizzare il proprio ritorno.

Nel trattare un gioco, si ricorre generalmente alla rappresentazione in forma normale, nella quale si deve specificare il numero  $n$  di giocatori partecipanti, le strategie a disposizione di ogni giocatore ed i pay-off ricevuti da ogni giocatore per ogni possibile combinazione di strategie scelte dai giocatori.

Sia  $S_i$  l'insieme di strategie a disposizione del giocatore  $i$ , i cui gli elementi arbitrari sono chiamati  $s_i$ . Inoltre, sia  $u_i$  la funzione del pay-off del giocatore  $i$ , tale che  $u_i(s_1, \dots, s_n)$  rappresenta il pay-off del giocatore  $i$  se i giocatori scelgono le strategie  $(s_1, \dots, s_n)$ .

#### DEFINIZIONE 2.1.1

*La rappresentazione normale di un gioco con  $n$  giocatori specifica lo spazio delle strategie dei giocatori  $S_1, \dots, S_n$  e le loro funzioni dei pay-off  $u_1, \dots, u_n$ . Il gioco è indicato con  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ .*

Tornando alla *Figura 1.1: Dilemma del prigioniero*, il giocatore 1 (G.1) sceglierà razionalmente C poiché la coppia dei pay-off è maggiore rispetto alla coppia T (-5 > -10 e 0 > -1). Poiché le scelte sono identiche per entrambi i giocatori, anche G.2 sceglierà C. Si può dunque affermare che la coppia di decisioni (C,C) è *strettamente dominante*.

#### DEFINIZIONE 2.1.2

*Nel gioco  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  siano  $s_i^1$  e  $s_i^2$  le strategie ammesse per il giocatore  $i$ , ovvero  $s_i^1$  e  $s_i^2$  appartengono a  $S_i$ . La strategia  $s_i^1$  domina strettamente  $s_i^2$  se, per ogni combinazione di strategie degli altri giocatori, il pay-off che si riceve giocando  $s_i^1$  è strettamente maggiore di quello che si riceve giocando  $s_i^2$ .*

*Analiticamente,  $s_i^1$  domina strettamente  $s_i^2$  se  $u_i(s_1, \dots, s_i^1, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_i^2, \dots, s_n)$  per ogni  $(s_1, \dots, s_n)$  ottenuto dagli  $S$  degli altri giocatori  $(S_1, \dots, S_n)$ .*

Trovare la strategia dominante può non essere semplice nei giochi che presentano matrici di dimensioni maggiori. Pertanto, si ricorre ad un procedimento detto "Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate", che prevede l'individuazione e la conseguente eliminazione delle strategie dominate dalla

matrice. Questo procedimento consente di ridurre le dimensioni della matrice fino a rimanere con una sola coppia di pay-off. Si faccia riferimento al seguente esempio:

*Figura 3: Sinistra, Centro, Destra*

G.1/G2	Sinistra	Centro	Destra
Su	(1,0)	(1,2)	(0,1)
Giù	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Il giocatore 1 ha a disposizione le strategie  $S_1 = (Su, Giù)$  ed il giocatore 2 ha a disposizione le strategie  $S_2 = (Sinistra, Centro, Destra)$ . Per il giocatore 1, scegliere *Su* è preferibile se il giocatore 2 sceglie *Sinistra* o *Centro*; viceversa, per il giocatore 1 è preferibile *Giù* se il giocatore 2 gioca *Destra*. Dunque, per il giocatore 1 non esistono strategie strettamente dominanti o dominate. Per il giocatore 2, tuttavia, *Centro* domina strettamente *Destra* poiché offre payoff maggiori indipendentemente dalla scelta del giocatore 1 ( $2 > 1$ ,  $1 > 0$ ). Il giocatore 1 sa che il giocatore 2 opera in modo razionale e dunque esclude che quest'ultimo possa giocare *Destra*; pertanto, esclude la relativa colonna dal gioco:

*Figura 4: Sinistra, Centro, Destra: prima eliminazione*

G.1/G.2	Sinistra	Centro
Su	(1,0)	(1,2)
Giù	(0,3)	(0,1)

Ora la situazione del giocatore 1 è mutata, poiché in assenza della colonna *Destra* la strategia *Su* domina la strategia *Giù* ( $1 > 0$ ;  $1 > 0$ ). Allo stesso modo, il giocatore 2 sa che il giocatore 1 è razionale e dunque elimina la riga *Giù* dalla tabella:

*Figura 5: Sinistra, Centro, Destra: seconda eliminazione*

G.1/G.2	Sinistra	Centro
Su	(1,0)	(1,2)

Infine, per il giocatore 2 la strategia *Centro* domina strettamente la strategia *Sinistra* e il pay-off finale del gioco è (1,2) corrispondente a (*Su*, *Centro*). L'ultima coppia di pay-off che sopravvive al processo di eliminazione iterata è quindi la coppia che domina tutte le altre. Pertanto, è la soluzione ottimale del gioco.

Per quanto logico e di facile comprensione, questo procedimento presenta diversi problemi. Innanzitutto, può rivelarsi estremamente lungo e poco efficiente in caso di matrici che presentano dimensioni considerevoli. Inoltre, nel caso in cui non vi siano strategie strettamente dominate o dominanti, non porterebbe a nessuna soluzione definita. Un esempio è il seguente *gioco del dubbio*:

Figura 6: *Gioco del dubbio*

G.1/G.2	Sinistra	Destra
Su	(1,0)	(0,1)
Giù	(0,1)	(1,0)

L'eliminazione iterata di strategie strettamente dominanti non fornisce un risultato preciso. Difatti, non esistono due strategie  $s_i^1$  e  $s_i^2$  tali che  $u_i(s_1, \dots, s_i^1, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_i^2, \dots, s_n)$  o viceversa.

Per ovviare a questo problema sarà presentata nel prossimo paragrafo una soluzione più elegante ed efficace, detta Equilibrio di Nash.

Infine, ogni passo dell'eliminazione iterata richiede un'assunzione aggiuntiva su ciò che i giocatori conoscono sulla razionalità dell'avversario. Per applicare il procedimento un numero arbitrario di volte, è necessario assumere che la razionalità dei giocatori sia conosciuta da tutti (*common knowledge*). Ovvero, "tutti i giocatori sono razionali e sanno che anche tutti gli altri lo sono". Questo concetto è stato definito formalmente dal premio Nobel Robert Aumann nel 1976<sup>2</sup> attraverso la Teoria degli Insiemi.

Per comprendere il concetto di conoscenza comune si è soliti ricorrere al seguente problema esplicativo:

"In una stanza sono riuniti molteplici ragazzi di cui un numero  $k$  ( $k \geq 1$ ) ha i capelli biondi, i restanti hanno i capelli castani. Ogni ragazzo non conosce il colore dei propri capelli e non si può parlare dei capelli altrui. Se un ragazzo viene a sapere di avere i capelli biondi deve uscire dalla stanza entro l'ora successiva. Dopo quante ore, saranno usciti tutti i ragazzi con i capelli biondi?"

La risposta è dopo  $k$  ore. Se  $k = 1$ , il ragazzo con i capelli biondi vedrà che tutti gli altri hanno i capelli marroni e capirà di essere egli stesso a dover uscire al termine dell'ora poiché ve ne deve essere almeno uno. Se  $k = 2$ , dopo la prima ora nessuno lascerà la stanza. I due con i capelli biondi, tuttavia, vedendo solo un altro ragazzo con i capelli biondi e avendo visto che nessuno è uscito alla prima ora, capiranno che  $k = 2$  e di essere loro a dover uscire all'ora successiva. Aumentando man mano il valore di  $k$  si può ripetere un ragionamento analogo e giungere alla stessa conclusione. Evidentemente, il fatto che ogni soggetto *sa che gli altri sanno* è determinante nella riuscita del gioco.

<sup>2</sup> Robert Aumann; *Agreeing to Disagree*, 1976

Il concetto di conoscenza comune è impiegato da Aumann per enunciare il suo Teorema nel 1976<sup>3</sup>. Esso enuncia che *giocatori razionali non possono essere d'accordo di non essere d'accordo sulla probabilità che ciascuno di essi assegna a un dato evento, se queste probabilità sono conoscenza comune*. Difatti, se un giocatore sa che un altro giocatore modifica le proprie aspettative su un evento, anch'egli modificherà le proprie di conseguenza.

Questo argomento sarà trattato con maggior precisione nel Capitolo 3.

## 2.2. Equilibrio di Nash

Il procedimento di eliminazione iterata delle strategie prima descritto spesso fallisce per propria natura nel fornire una soluzione unica ad un gioco. Il concetto di equilibrio proposto da Nash nel 1950 fornisce delle predizioni più accurate, assumendo che ogni giocatore sia disposto a scegliere la strategia prescritta dalla teoria, ovvero la strategia migliore in risposta alle strategie prescritte degli altri giocatori. In altre parole, nessun giocatore è interessato a deviare dalla strategia prescritta se nessun altro giocatore lo fa.

### DEFINIZIONE 2.2.1

*Nel gioco in forma normale con  $n$  giocatori  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  rappresentano un equilibrio di Nash se  $s_i^*$  è la miglior risposta per ogni giocatore  $i$  alle strategie degli altri giocatori per ogni strategia  $s_i$  in  $S_i$ :*

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) > u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$$

Allo stesso modo,  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  non rappresenterebbe un equilibrio di Nash se esistesse almeno un giocatore  $i$  per il quale  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  non fosse una risposta ottima alle strategie degli altri giocatori, ovvero se non valesse la proposizione  $u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) > u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$ . In questo caso, infatti, il giocatore  $i$  troverebbe conveniente deviare dalla strategia prescritta.

Come accennato, l'equilibrio di Nash è un concetto di soluzione più *forte* rispetto all'eliminazione iterata delle strategie. Difatti, una strategia che è equilibrio di Nash sopravviverà all'eliminazione iterata, ma non è detto il contrario. Possono esistere strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata ma che non sono equilibri di Nash.

Nel gioco in forma normale  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  con  $n$  giocatori, se le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  sono un equilibrio di Nash allora non saranno eliminate dall'eliminazione iterata delle strategie.

---

<sup>3</sup> Robert Aumann; *Agreeing to Disagree*, 1976

Per procedere alla dimostrazione si ragiona per assurdo, ovvero si cerca di dimostrare una proposizione che invalidi la proposizione originale e si mostra come non sia possibile farlo poiché causerebbe una contraddizione logica, dimostrando indirettamente la validità della proposizione originale.

Si supponga che le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  siano equilibrio di Nash e che siano eliminate prima di altre (si supponga inoltre che  $s_i^*$  sia la prima di queste strategie ad essere eliminata). Allora, deve esistere una strategia  $s_i$  che non sia stata ancora eliminata e che quindi domini strettamente  $s_i^*$ , ovvero:

$$u_i(s_1, \dots, s_i^*, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

Poiché  $s_i^*$  viene eliminata per prima tra le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  si ha che le strategie degli altri giocatori sono ancora in gioco, quindi vale che:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$$

Ma ciò contraddice esattamente la definizione 2.1.1 di Equilibrio di Nash e quindi  $s_i$  non può dominare strettamente  $s_i^*$  se quest'ultima strategia è un Equilibrio di Nash.

Un'altra fattispecie che potrebbe risultare scontata nella relazione tra Equilibrio di Nash ed eliminazione iterata delle strategie è la seguente: se l'eliminazione iterata elide tutte le strategie tranne una, allora essa sarà l'unico equilibrio di Nash.

Come nel caso precedente, la proposizione da dimostrare è: nel gioco in forma normale  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  con  $n$  giocatori, se le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  sono le uniche a non essere rimosse dall'eliminazione iterata allora saranno l'unico Equilibrio di Nash del gioco.

Un'implicazione errata dell'Equilibrio di Nash è che quest'ultimo debba essere unico. Esistono giochi in cui questi equilibri sono molteplici, come il gioco *Battaglia dei sessi* che sarà utilizzato come esempio:

*Figura 7: Battaglia dei sessi*

Carlo/Maria	Partita	Teatro
Partita	(2,1)	(0,0)
Teatro	(0,0)	(1,2)

A questo gioco partecipano due fidanzati, Carlo e Maria. Essi devono decidere come passare la serata scegliendo tra due opzioni: guardare la partita o andare a teatro. Carlo preferisce guardare la partita mentre Maria preferisce andare a teatro; tuttavia, i due preferiscono stare insieme piuttosto che fare due attività separate.

È evidente che (Partita, Teatro) e (Teatro, Partita) siano due strategie strettamente dominate poiché offrono ad ogni giocatore pay-off minori indipendentemente dalla scelta dell'altro. Rimangono le coppie di strategie (Partita, Partita) e (Teatro, Teatro) che sono entrambe Equilibri di Nash del gioco. Le proposizioni sopra dimostrate ignorano la possibilità che esistano dei giochi per i quali non esiste una soluzione unica. In questi giochi, tuttavia, l'Equilibrio di Nash appare poco preciso ed efficiente nel determinare una soluzione ottimale.

Per ovviare a questo limite sarà presentato il concetto di *strategia mista* per cui si troverà una soluzione data da una distribuzione di probabilità circa la giocata migliore da effettuare.

### 2.3. Nella pratica: Duopolio di Cournot

L'equilibrio di Nash trova diverse applicazioni economiche, in particolare nel campo della microeconomia. Antoine Cournot nel 1838<sup>4</sup> anticipa quella che è la moderna Teoria dei Giochi sviluppando un modello di duopolio che prende spunto dal mercato delle acque minerali. Siano *impresa 1* ed *impresa 2* le uniche due imprese in un mercato in cui sono prodotti beni omogenei, e siano  $q_1$  e  $q_2$  le quantità del bene omogeneo prodotte da ogni impresa. La quantità complessiva prodotta nel mercato è pari a  $Q = q_1 + q_2$  ed il prezzo di mercato è  $P(Q) = a - Q$ . I costi fissi sostenuti dalle imprese sono nulli ed i costi marginali per l'impresa 1 (uguali a quelli dell'impresa 2) sono  $C_1(q_1) = c * q_1$ , dove  $c$  è il costo per unità. Si noti che  $Q$  deve essere minore del parametro  $a$ , oppure le imprese produrranno una quantità nulla. Allo stesso modo, assumiamo  $c < a$ .

L'obiettivo di ogni impresa è quello di massimizzare la propria produzione e quindi il proprio profitto, per farlo può scegliere una strategia  $s_i \in S_i$ , ovvero una generica strategia appartenente allo spazio di strategie dell'impresa  $S_i = [0, \infty)$ . Ammettiamo per semplicità di calcolo che le quantità di prodotto siano infinitamente divisibili; tuttavia, il risultato sarebbe il medesimo (anche se più macchinoso) senza questa assunzione. Inoltre, le imprese scelgono la quantità simultaneamente.

Le due imprese scelgono due strategie  $s_1$  ed  $s_2$  che corrispondono a due quantità prodotte  $q_1$  e  $q_2$ . Il pay-off, ovvero il profitto, dell'impresa 1 (identico a quello dell'impresa 2) corrispondente a queste quantità è il seguente:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c]$$

Si noti che  $a - (q_1 + q_2)$  è pari a  $P(Q)$ . Quindi, il profitto è pari a  $q_1 * \text{ricavo marginale}$ . Per trovare un equilibrio di Nash è necessario identificare le quantità  $q_1$  e  $q_2$  dalle quali le due imprese non hanno interesse

---

<sup>4</sup> Antoine Cournot; *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, 1838

a deviare, che chiameremo  $q_1^*$  e  $q_2^*$ . Il problema da risolvere è dunque un problema di ottimo del pay-off, l'impresa 1 deve trovare la quantità  $q_1$  che risolve la seguente espressione:

$$\max \pi_1(q_1, q_2^*) \text{ per } 0 \leq q_1 < \infty$$

Lo stesso vale per l'impresa 2. Si può riscrivere l'espressione di ottimo come:

$$\max q_1[a - (q_1 + q_2^*) - c]$$

Il passo successivo per l'ottimizzazione è quello di calcolare la derivata prima (condizione di primo ordine)  $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}$  e porla = 0 per trovare il punto di massimo. Si ricava quindi che

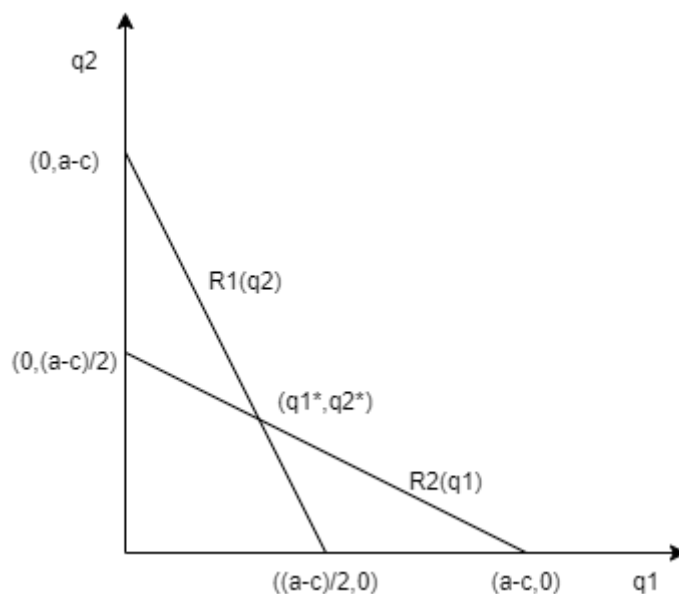
$$q_1 = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c) \text{ e } q_2 = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c)$$

le cui soluzioni corrispondono all'equilibrio di Nash:

$$q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$$

È importante notare come questa soluzione non sarebbe stata valida se  $q_1^*$  o  $q_2^*$  fossero stati maggiori o uguali di  $a - c$ . Alternativamente, si possono trovare le quantità di equilibrio in modo grafico. Sugli assi sono poste le quantità prodotte dalle due aziende ( $q_1, q_2$ ):

Figura 8: Duopolio di Cournot



Le due funzioni in figura ( $R_1(q_2)$  ed  $R_2(q_1)$ ) sono dette *funzioni di reazione*, poiché indicano quale sarebbe la reazione ottimale di un'impresa in funzione della scelta della quantità dell'altra. Nel punto di equilibrio  $(q_1^*, q_2^*)$  entrambe le imprese producono  $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$  che è un equilibrio di Nash, visto che nessuna delle due imprese è intenzionata a modificare la propria strategia. Le imprese vorrebbero in realtà

produrre la quantità di monopolio  $(a - c)/2$  ed ottenere un profitto di monopolio pari a  $(a - c)^2/4$ , ma questa strategia non è ottimale poiché la quantità aggregata sarebbe minore e ogni impresa razionale tenterebbe di abbassare il prezzo per aumentare la quantità. Si può dire quindi che l'equilibrio di Cournot sia il risultato *naturale* a cui due imprese in concorrenza tenderebbero. Un risultato simile si ottiene nel modello del *duopolio di Bertrand* in cui le imprese cercano di fissare il prezzo e non la quantità, come avviene nel duopolio di Cournot.

È interessante notare come questo ragionamento possa essere esteso ad un oligopolio, ovvero una situazione in cui vi siano più di due imprese nel mercato, senza alterarne il concetto di fondo. Al tendere all'infinito del numero di imprese il prezzo (e quindi la quantità) di equilibrio tendono a quelli osservabili in concorrenza perfetta, difatti  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^* = c$ . In altre parole, con un numero sufficientemente grande di imprese nel mercato il prezzo diventa pari al costo marginale, che è esattamente ciò che si osserva in concorrenza perfetta.

## 2.4. Classificazioni dei Giochi

I giochi possono essere classificati in base a diversi attributi, la classificazione che ha ottenuto maggior successo a causa della sua rilevanza è quella proposta da Harsanyi nel 1966; essa distingue tra:

- 1) **Giochi Non Cooperativi**: detti anche Giochi Competitivi non permettono accordi vincolanti fra i giocatori, gli esempi esposti finora sono esempi di questa categoria. Ogni giocatore persegue il massimo pay-off individuale in modo razionale, se esistono delle strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  che massimizzano il pay-off di ogni giocatore indipendentemente dalle strategie perseguite dagli altri giocatori, esse saranno un equilibrio.
- 2) **Giochi Cooperativi**: sono permessi accordi vincolanti fra i giocatori e gli interessi dei giocatori sono comuni. I giocatori sono incentivati a collaborare per aumentare reciprocamente i pay-off individuali. In questa categoria si distinguono i giochi a Utilità Trasferibile (TU) ed i giochi a Utilità Non trasferibile (NTU). In questo elaborato saranno trattati solo i giochi non cooperativi in quanto di maggiore rilevanza da un punto di vista delle applicazioni economiche.

Una seconda classificazione rilevante è tra giochi statici e giochi dinamici. Un gioco è *statico* se le scelte dei giocatori sono effettuate una sola volta e simultaneamente, un esempio è il gioco del lancio di una moneta. I giochi trattati finora sono statici, difatti le scelte dei giocatori non sono state ripetute nel tempo. Come suggerisce il nome, un gioco *dinamico* prevede una successione temporale di scelte, ognuna delle quali è influenzata dalle scelte precedenti e influenza le scelte future. In un gioco dinamico le scelte possono essere effettuate simultaneamente o a turni, in quest'ultimo caso si parla di gioco sequenziale.

Le ultime distinzioni riguardano l'informazione a disposizione dei giocatori, nei giochi trattati finora tutti i giocatori godevano di informazione completa e perfetta. Con il termine *informazione completa* si intende una situazione di gioco in cui ogni giocatore conosce i pay-off degli altri giocatori e le relative scelte, oltre a conoscere lo stato del gioco. Viceversa, se in un gioco esiste almeno un giocatore che non ha accesso a tutte le informazioni sui pay-off e sulle scelte degli altri giocatori, si parla di *informazione incompleta*. I giochi ad informazione incompleta sono anche detti *giochi Bayesiani* poiché si fondano sul Teorema del matematico stesso. Tale teorema enuncia che: dati due eventi A e B, la probabilità condizionata di A rispetto a B (ovvero la probabilità che si verifichi B dato che si verifica A) è uguale alla probabilità condizionata di B rispetto ad A moltiplicata per la probabilità di A fratto la probabilità di B:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

La dimostrazione del Teorema di Bayes si basa sulla definizione di probabilità condizionata, definita come la probabilità dell'evento intersezione tra A e B fratto la probabilità di B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Per la stessa definizione,  $P(A \cap B)$  è pari al prodotto tra la probabilità condizionata di B rispetto ad A e la probabilità di A.

### 3. GIOCHI NON COOPERATIVI

#### 3.1. Giochi a Somma Zero

Un gioco si dice *a somma zero* se, per ogni insieme di pay-off possibili per i giocatori, la somma algebrica di tali pay-off è pari a zero<sup>5</sup>. In altri termini, in caso di gioco con due giocatori, alla vincita di un giocatore corrisponde una perdita uguale e contraria dell'altro. La seguente matrice espone un esempio interessante:

Figura 9: Gioco a somma zero

G.1/G.2	A	B	C
D	(6,-6)	(3,-3)	(4,-4)
E	(5,-5)	(2,-2)	(-2,2)
F	(7,-7)	(-1,1)	(3,-3)

Essendo un gioco a somma zero, ad ogni “vincita” del giocatore 1 corrisponde una “perdita” uguale del giocatore 2 (e viceversa). In questo caso, l'equilibrio di Nash (detto anche *punto di sella*) è dato dalla strategia (D, B). La strategia di equilibrio non è ottimale per nessuno dei due giocatori, poiché potrebbero ottenere dei pay-off maggiori giocando diversamente. Il giocatore 1 potrebbe vincere 7 giocando F ed il giocatore 2 potrebbe vincere 2 giocando C. Tuttavia, se il giocatore 1 giocasse F potrebbe perdere 1 nel caso in cui il giocatore 2 giocasse B. Allo stesso modo, se il giocatore 2 giocasse C potrebbe perdere 5 nel caso in cui il giocatore 1 giocasse E. Questo esempio dimostra come l'Equilibrio di Nash per ogni giocatore sia costituito dalla strategia  $s_i^*$  (in questo caso D per il giocatore 1 e per il giocatore 2) migliore in relazione alle strategie  $s_i$  che possono essere giocate dagli avversari. In questo particolare esempio, la soluzione di equilibrio si può raggiungere anche attraverso l'eliminazione iterata delle strategie.

Esistono giochi a somma zero in cui l'equilibrio di Nash risulta inefficace nel fornire un insieme di strategie di equilibrio. Nel secondo capitolo è stato enunciato che: in un gioco in forma normale con  $n$  giocatori  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , le strategie  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  rappresentano un Equilibrio di Nash se  $u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) > u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$ .

In base a questa definizione, nel seguente gioco a somma zero detto *Matching pennies*, non esiste alcun equilibrio:

<sup>5</sup> Alan Washburn; *Two-Person Zero-Sum Games*, 2014

Figura 10: Matching pennies

G.1/G.2	Testa	Croce
Testa	(-1,1)	(1,-1)
Croce	(1,-1)	(-1,1)

Ogni giocatore possiede una moneta ed il gioco consiste nel mostrarne contemporaneamente uno dei due lati (Testa o Croce). Se i lati dei due penny sono uguali vince il giocatore 2, se sono diversi vince il giocatore 1. Evidentemente, non esiste alcuna strategia pura di equilibrio, in quanto ogni giocatore dovrebbe poter anticipare la mossa dell'avversario e reagire di conseguenza. Esempi simili si possono trovare in giochi come il Poker, nel quale si deve determinare la frequenza con cui bluffare. Un giocatore che non bluffa mai o che, al contrario, bluffa sempre sarà letto facilmente dagli avversari che potranno interpretare con precisione le sue mosse. Per questo, risulta conveniente bluffare sporadicamente. In generale, qualsiasi gioco in cui ogni giocatore vorrebbe anticipare le mosse dell'altro non presenta alcun equilibrio di Nash, come descritto nel secondo capitolo.

Un ulteriore esempio è dato dal seguente gioco, detto *pari e dispari*:

Figura 11: Pari e dispari

G.1/G.2	Uno	Due	Tre
Uno	P	D	P
Due	D	P	D
Tre	P	D	P

Ogni giocatore può giocare un numero da uno a tre, se la somma dei due numeri giocati è pari (P) vince il giocatore 1, se è dispari (D) vince il giocatore 2. Poiché il giocatore 1 ha 5 risultati vincenti su 9 si potrebbe pensare che egli sia favorito. Allo stesso modo, se il giocatore 2 gioca Due ha una possibilità di 2/3 di vincere, dunque superiore a quella del giocatore 1. Il giocatore 1 è razionale e sa che anche il giocatore 2 lo è; quindi, può prevedere che il giocatore 2 giochi Due e di conseguenza giocare anch'egli Due, vincendo la partita. Grazie all'ipotesi di conoscenza comune, questo ragionamento potrebbe continuare all'infinito senza ottenere un risultato definitivo. Per ovviare ai problemi sollevati da questi due esempi si ricorre al concetto di *strategia mista*.

### 3.2. Strategie miste ed Equilibrio di Nash

#### DEFINIZIONE 3.2.1

Si dice strategia mista per il giocatore  $i$ , la distribuzione di probabilità delle strategie contenute in  $S_i$ , ovvero delle sue strategie pure.

Nel gioco *Matching pennies* una strategia mista per il giocatore  $i$  è la distribuzione di probabilità  $(q, 1-q)$  dove  $q$  è la probabilità di giocare Testa e  $1-q$  la probabilità di giocare Croce, con  $0 \leq q \leq 1$ . Le strategie pure dei giocatori sono semplicemente dei casi limiti delle strategie miste, in cui  $q$  oppure  $1-q$  è pari a zero.

Estendendo la definizione all'esistenza di un numero  $K$  di strategie pure disponibili per un giocatore  $i$ , sia  $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$  l'insieme di tali strategie. Una strategia mista per il giocatore  $i$  è una distribuzione di probabilità  $(p_{i1}, \dots, p_{iK})$  in cui  $p_{iK}$  è la probabilità che il giocatore  $i$  giochi la strategia  $s_{iK}$  per ogni  $1 \leq k \leq K$ . Dove la somma della probabilità  $p_{i1}, \dots, p_{iK} = 1$ .

È interessante notare il rapporto tra strategie miste e strategie pure nel contesto della dominanza stretta. Una strategia  $s_i$  è strettamente dominata se il giocatore  $i$  non ha nessun vantaggio nel giuocarla rispetto ad almeno un'altra strategia. Allo stesso modo, se una strategia  $s_i$  non è conveniente da giocare per il giocatore  $i$ , allora sarà strettamente dominata. Quest'ultima proposizione è vera se si considerano anche le strategie miste, come nella seguente matrice dei pay-off del giocatore 1 in un gioco generico:

Figura 12: Pay-off del giocatore 1

G.1/G.2	Rosso	Giallo
Verde	3,-	0,-
Blu	0,-	3,-
Viola	1,-	1,-

In questo gioco, la miglior risposta del giocatore 1 alla giocata del giocatore 2 è rispettivamente:

- Verde, se il giocatore 1 crede che nella distribuzione delle probabilità del giocatore 2 sia  $q \geq 0,5$ , ovvero che ci sia più del 50% di probabilità che il giocatore 2 giochi Rosso.
- Blu, se il giocatore 1 crede che nella distribuzione delle probabilità giocatore 2 sia  $q \leq 0,5$ , ovvero che ci sia più del 50% di probabilità che il giocatore 2 giochi Giallo.

La strategia ottimale per il giocatore 1 non può mai essere Viola, nonostante essa non sia strettamente dominata dalle altre strategie pure. Difatti, Viola è dominata da una strategia mista: se il giocatore 1 gioca Blu con probabilità 0,5 e Verde con probabilità 0,5 avrà un pay-off atteso di  $(3 + 0) \div 2 = 1,5$ . Questo pay-off è maggiore di quello che il giocatore 1 otterrebbe giocando Viola, indipendentemente dalla risposta del giocatore 2. Dunque, se una strategia mista può dominare una strategia pura, allora è vero anche il contrario. Se i pay-off della giocata Viola del giocatore 1 fossero i seguenti:

*Figura 13: Pay-off della giocata Viola*

G.1/G.2	Rosso	Giallo
Viola	2,-	2,-

Allora, questa strategia dominerebbe strettamente la strategia mista  $(q, 1-q)$  del giocatore 2 poiché offrirebbe un pay-off maggiore ( $2 > 1,5$ ) (a patto che  $q$  sia compreso tra  $1/3$  e  $2/3$ ). Allo stesso tempo, pur con i nuovi pay-off la strategia Viola non dominerebbe strettamente le strategie pure Blu e Verde.

Utilizzando la nozione di strategia mista si può enunciare il Teorema di Nash in modo più completo, estendendone la definizione per mostrare come in ogni gioco finito esiste un Equilibrio di Nash. Per introdurre questo concetto si può fare riferimento al gioco dei *Matching pennies*. Ammettiamo che il giocatore 1 pensi che il giocatore 2 scelga Testa o Croce con probabilità rispettivamente  $(q, 1-q)$ . Quindi il giocatore 1 si aspetta un pay-off di  $1 - 2q$  se gioca Testa e  $2q - 1$  se gioca Croce. Pertanto, la strategia ottimale è Testa se  $q < 0,5$ , viceversa è Croce. Se  $q = 0,5$  allora il giocatore 1 è indifferente rispetto alla scelta. Allo stesso modo, sia  $(r, 1 - r)$  la strategia mista del giocatore 1, dove  $r$  è la probabilità di Testa e  $1-r$  la probabilità di Croce. Allora il pay-off atteso del giocatore 1 quando egli gioca  $(r, 1 - r)$  e quando il giocatore 2 gioca  $(q, 1 - q)$  è  $(2q - 1) + r(2 - 4q)$ . La risposta ottima del giocatore 1 è  $r = 1$  (Testa) se  $q < 0,5$ , viceversa la risposta migliore del giocatore 1 è  $r = 0$  (Croce) se  $q > 0,5$ .

### DEFINIZIONE 3.2.2

*Nel gioco con due giocatori  $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ , le strategie miste  $(p_1^*, p_2^*)$  sono un Equilibrio di Nash se la strategia mista di ogni giocatore è una risposta ottima alla strategia mista dell'altro giocatore.*

È importante notare che le probabilità assegnate agli eventi scelti ognuno dei due giocatori, ovvero  $(r, 1 - r)$  e  $(q, 1 - q)$  non sono aleatorie ma sono un riflesso dell'incertezza (o della credenza) di ogni giocatore rispetto a ciò che farà l'altro.

Le strategie miste permettono di tracciare una funzione che descrive la risposta migliore di un giocatore al variare delle probabilità assegnate alle strategie miste dell'altro giocatore. Questa funzione è detta *funzione di Corrispondenza*. Prendiamo ad esempio il gioco descritto dalla seguente matrice:

Figura 14: Sinistra, Destra, Su, Giù

G.1/G.2	Sinistra	Destra
Su	(0,0)	(3,-1)
Giù	(5,-1)	(0,5)

Come si può vedere non esiste un equilibrio di Nash per alcuna coppia di strategie pure. Prendendo in esame le strategie miste e considerando che il giocatore 1 gioca Su o Giù con probabilità  $(r, 1 - r)$  e che il giocatore 2 gioca Sinistra o Destra con probabilità  $(q, 1 - q)$ , allora i pay-off del giocatore 1 saranno:

1.  $0q + 3(1 - q)$  se gioca Su
2.  $5q + 0(1 - q)$  se gioca Giù

Uguagliando i due pay-off si ottiene  $q = 3/8$ , ovvero il valore di  $q$  per cui scegliere Su o Giù è indifferente per il giocatore 1. Tuttavia, se  $q < 3/8$  allora Su è la scelta ottimale, viceversa se  $q > 3/8$  allora Giù è la scelta che garantisce il miglior pay-off atteso. Si può quindi tracciare la funzione di corrispondenza nell'intervallo  $[0,1]$  delle strategie miste del giocatore 1:

$$r(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 3/8 \\ (0,1) & \text{se } q = 3/8 \\ 1 & \text{se } q < 3/8 \end{cases}$$

Ciò significa che quando  $q < 3/8$  il giocatore 1 sceglierà la strategia Su con probabilità 1, viceversa quando  $q > 3/8$  sceglierà la strategia Su con probabilità 0, ovvero sceglierà la strategia Giù con probabilità 1. Infine, se  $q = 3/8$  allora la scelta è indifferente.

Allo stesso modo, per il giocatore 2 si può ottenere una simile funzione di corrispondenza:

$$q(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < 6/7 \\ (0,1) & \text{se } r = 6/7 \\ 1 & \text{se } r > 6/7 \end{cases}$$

Quindi, l'equilibrio di Nash si avrà per quella coppia di  $q$  ed  $r$  per cui i due giocatori risultano indifferenti alla scelta, ovvero  $q = 3/8$  e  $r = 6/7$ .

Utilizzando il concetto di funzione di corrispondenza si può dimostrare il Teorema di Nash (1950) nella sua forma più estesa e generale:

### DEFINIZIONE 3.2.3

Nel gioco con  $n$  (finiti) giocatori  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , se  $s_i$  è finito per ogni  $i$  allora esiste almeno un equilibrio di Nash, in strategie pure o eventualmente miste.

Per la dimostrazione di questo teorema si utilizza il *Teorema del punto fisso* di Brouwer<sup>6</sup>, poiché si mostra come ogni punto fisso in una certa corrispondenza sia un Equilibrio di Nash e come tale corrispondenza debba avere un punto fisso. La dimostrazione analitica non sarà oggetto di questo elaborato.

### 3.3. Strategia di Minimax

Una soluzione alternativa all'Equilibrio di Nash è la soluzione di *minimax* (o *maximin*), teorizzata per la prima volta da Von Neumann nel 1928<sup>7</sup>. Questa soluzione prevede che un giocatore scelga la strategia che minimizzi la propria perdita massima (*minimax*) o massimizzi la propria vincita minima (*maximin*). È bene ricordare che questa strategia ha senso solo per giochi a *somma zero*.

Si considerino due giocatori, il giocatore 1 ha un insieme di strategie miste chiamato  $X$  (che comprende gli elementi  $(x_1, \dots, x_n)$  la cui somma è pari a 1), il giocatore 2 ha un insieme di strategie miste chiamato  $Y$ .

Data la matrice  $A$  di un gioco dove  $i$  e  $j$  sono le scelte rispettivamente dei giocatori 1 e 2 per una strategia  $i$  e dove  $a_{ij}$  è l'elemento della matrice corrispondente alle due scelte, la vincita attesa dei due giocatori se il giocatore 1 gioca  $x \in X$  e il giocatore 2 gioca  $y \in Y$  è pari a:

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

Se l'obiettivo del giocatore 1 è massimizzare la propria vincita minima, egli cercherà di ottenere una quantità  $v$  tale che:  $v_1 = \max_{x \in X} \min_j \{x^T A_{.j}\}$ , essendo  $A_{.j}$  la colonna  $j$ -esima della matrice  $A$ . Questa strategia è detta *maximin*.

Allo stesso modo, l'obiettivo del giocatore 2 è quello di minimizzare la propria perdita massima, egli cercherà di ottenere una quantità  $v$  tale che:  $v_2 = \min_{y \in Y} \max_i \{A_{i.} y\}$ , essendo  $A_{i.}$  la riga  $i$ -esima della matrice  $A$ . Questa strategia è detta *minimax*.

Si consideri l'esempio dato dalla seguente matrice:

---

<sup>6</sup> Luitzen Brouwer, Jacques Hadamard; 1910

<sup>7</sup> Von Neumann; *La Teoria dei Giochi di Società*, 1928

Figura 15: Strategia minimax

G.1/G.2	Ovest	Est
Nord	(2,2)	(2,2)
Sud	(1,3)	(3,1)

Il giocatore 1 deve decidere se giocare Nord o Sud. Applicando la strategia minimax, egli sceglierà la giocata con il massimo pay-off minore, ovvero Nord. Applicando la stessa strategia, il giocatore 2 sceglierà Ovest e si avrà un equilibrio di (Nord, Ovest) che in questo caso è anche un Equilibrio di Nash.

Applicando questa volta la strategia maximin, il giocatore 1 sceglierà comunque Nord, poiché massimizza la vincita minima, difatti con questa scelta si assicura quantomeno una vincita di 2. Allo stesso modo, il giocatore 2 gioca Ovest poiché si assicura una vincita minima di 2. Anche in questo caso l'equilibrio è in (Nord, Ovest).

La teoria minimax ha ottenuto notevoli fortune in ambito informatico e di programmazione, in particolare per ciò che riguarda gli algoritmi nei giochi a turni, come il tris, il Go o gli scacchi. Questo perché la strategia minimax permette all'algoritmo di valutare uno stato del gioco (una qualsiasi posizione) e valutare la mossa che minimizza la miglior posizione ottenibile dall'avversario. Ciò avviene attraverso l'assegnazione di un punteggio relativo per ogni mossa, con il punteggio massimo corrispondente alla vittoria. Questo processo implica che il computer debba poter analizzare tutti gli scenari possibili prima di effettuare una scelta, cosa non possibile in giochi complessi come gli scacchi nei quali sarebbe necessaria l'analisi di elevati ordini di grandezza di mosse. Per questo, si utilizza una tecnica che permette all'algoritmo di valutare una posizione complessa analizzando solo un certo numero di mosse (c.d. *profondità*), detta *euristica*<sup>8</sup>. L'euristica permetta alla macchina di conoscere con buona precisione quale sia la valutazione di una certa posizione di gioco senza conoscerne tutti i possibili risvolti, grazie alla conoscenza di posizioni simili. Ad esempio, quando vediamo un particolare albero per la prima volta sappiamo che è ragionevolmente un albero grazie a tutti gli alberi simili che abbiamo visto nella nostra vita. Questo approccio è molto più veloce rispetto a condurre un'analisi botanica sull'albero per determinarne la specie. Gli algoritmi minimax funzionano allo stesso modo, se vedono una breve serie di mosse che porta ad una posizione che *sanno* essere vincente, eseguono le mosse senza calcolare tutti gli scenari successivi. Per migliorare ulteriormente l'efficienza di questi algoritmi si usano oggi metodi più sofisticati come la *potatura alfa-beta* o la *ricerca ad albero Monte Carlo*.

---

<sup>8</sup>Papadimitriou, Steiglitz; *Ottimizzazione combinatoria: algoritmi e complessità*, 1982

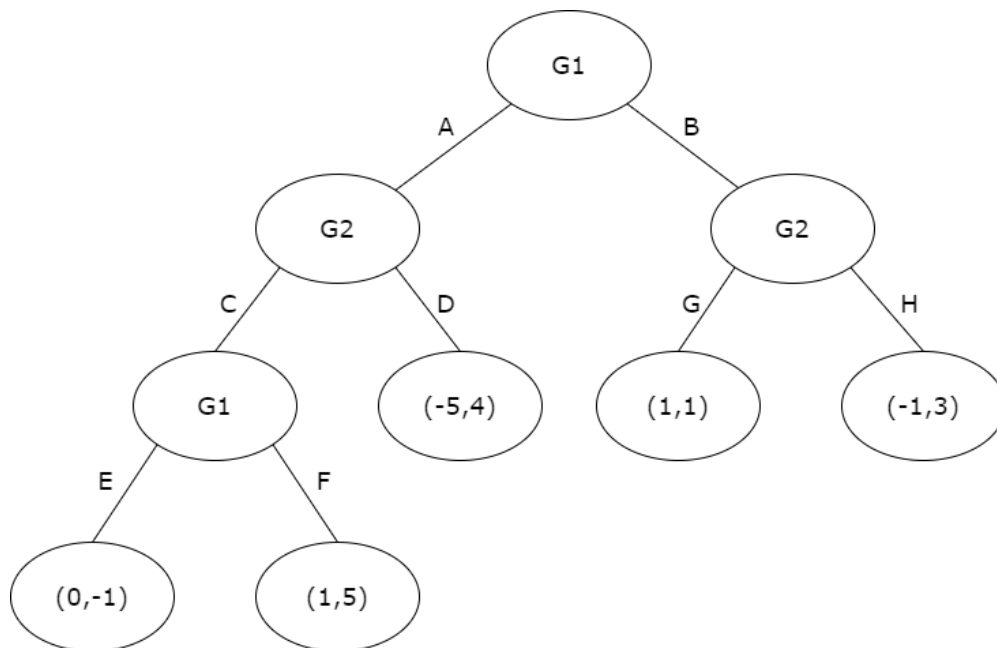
### 3.4. Giochi dinamici

L'esempio del gioco degli scacchi di cui al paragrafo precedente implica che i giocatori effettuino una sequenza di mosse nel tempo, ognuna delle quali è influenzata dalle precedenti e influenza le successive. Per ipotesi, gli esempi analizzati presupporranno un'informazione perfetta e completa e tutti i giocatori si comporteranno in modo razionale con l'unico obiettivo di massimizzare il proprio pay-off. Le caratteristiche principali di questa classe di giochi sono tre:

1. Le mosse dei giocatori avvengono in successione
2. Le mosse precedenti sono analizzate e prese in considerazione prima che venga scelta la mossa successiva
3. I pay-off dei giocatori per ogni combinazione di mosse sono di conoscenza comune

In questi giochi si può trovare la soluzione ottimale ricorrendo all'*induzione a ritroso* (*backwards induction*). Questo processo inizia dall'analisi dell'ultima mossa possibile e si procede a ritroso considerando di volta in volta i pay-off delle possibili mosse che possono portare alla mossa in analisi. Si faccia riferimento al problema esposto dal seguente grafo:

Figura 16: Gioco dinamico



Per capire come funziona l'induzione al ritroso si parta dall'ultima scelta possibile, ovvero quella tra la mossa E e la mossa F del giocatore 1. Ovviamente il giocatore 1 preferirà giocare F poiché gli garantisce un pay-off maggiore ( $1 > 0$ ). Andando a ritroso, il giocatore 2 che si trova a dover scegliere tra la strategia C e la D sa che, nel caso scegliesse C, il giocatore 1 in quanto razionale giocherebbe F e quindi i pay-off finali sarebbero (1,5). Il giocatore 2 sceglie quindi C poiché gli garantisce un pay-off di 5 che è maggiore

rispetto al 4 che otterrebbe giocando D. Risalendo alla scelta iniziale, il giocatore 1 sa che se gioca A allora il giocatore 2 sceglierà di giocare C e quindi otterrà un pay-off di 1. Se il giocatore 1 invece sceglie B, sa che il giocatore 2 giocherà H che garantirebbe al giocatore 1 un pay-off di -1. Pertanto, l'equilibrio si ottiene giocando A,C ed F con la coppia di pay-off (1,5).

Il metodo dell'induzione a ritroso presenta però un problema non secondario. Uno dei due giocatori potrebbe decidere di danneggiare l'altro a patto di veder ridotto anche il proprio pay-off, attuando la cosiddetta strategia della *minaccia*. Difatti, il giocatore 1 potrebbe voler danneggiare il giocatore 2 scegliendo E invece di F, riducendo il proprio pay-off di 1 ed il pay-off del giocatore 2 di 6. A sua volta, se il giocatore 2 crede che il giocatore 1 voglia danneggiarlo, giocherà D invece di C, danneggiando il giocatore 1. Allo stesso modo, il giocatore 1 potrebbe prevedere questo comportamento e giocare B invece di A. In questo modo la coppia di pay-off finale sarebbe (-1,3), strettamente inferiore rispetto a (1,5) ottenuto in precedenza. Ciò può accadere nel caso in cui la razionalità di uno dei due (o di entrambi) i giocatori non sia conoscenza comune. Nella pratica, questa fattispecie si verifica di frequente e ciò rende il processo di induzione a ritroso poco appetibile nell'essere usato nella realtà. Tuttavia, le minacce possono *non essere credibili*, ovvero possono non rappresentare un'alternativa valida. Questa distinzione sarà approfondita successivamente.

### 3.5. Nella pratica: Duopolio di Stackelberg

Un'applicazione in campo microeconomico dei giochi dinamici ad informazione completa e perfetta è stata proposta da Stackelberg nel 1934<sup>9</sup>. Similmente al modello di Cournot, trattato nel Capitolo 2.3, il duopolio di Stackelberg prevede due imprese che producono beni omogenei e che devono scegliere la quantità  $q_1$  e  $q_2$  da produrre per massimizzare il proprio pay-off. La differenza tra i due modelli risiede nella successione temporale delle scelte: in Cournot le scelte delle due imprese avvenivano simultaneamente, in Stackelberg un'impresa sceglie per prima (*leader*) e l'altra per seconda (*follower*). Questa fattispecie è comune nella realtà in quanto capita spesso che in un mercato vi sia un'impresa con un maggior potere di mercato, che quindi possa *dettare le regole del gioco*. La successione temporale degli eventi del gioco è la seguente:

1. L'impresa 1 (*leader*) sceglie una quantità  $q_1 \geq 0$  da produrre.
2. L'impresa 2 (*follower*) tiene conto della scelta dell'impresa 1 e sceglie di produrre una quantità  $q_2 \geq 0$  di conseguenza.
3. Le due imprese ricevono un pay-off sulla base delle loro scelte.

Come nel duopolio di Cournot, la funzione del pay-off dell'impresa 1 è:

---

<sup>9</sup> Heinrich Stackelberg; *Marktform und Gleichgewicht*, 1934

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c]$$

Per trovare le quantità di equilibrio si procede con il processo di induzione a ritroso presentato nel paragrafo precedente. A muovere per seconda è l'impresa 2, che reagisce ad una quantità  $q_1$  prodotta dall'impresa 1 cercando di massimizzare il proprio pay-off:  $\max q_2[a - (q_1 + q_2) - c]$  con  $q_2 \geq 0$ . Svolgendo il problema di massimo si trova la funzione di reazione dell'impresa 2 alla scelta della quantità dell'impresa 1:

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c)$$

Questa quantità è pari a quella trovata nel modello di Cournot, con la differenza che in questo caso  $R_2(q_1)$  è realmente la quantità scelta dall'impresa 2, mentre in Cournot era una quantità basata su un'ipotesi di scelta dell'impresa 1, che sceglieva simultaneamente. Continuando nel processo di induzione a ritroso si analizza la mossa dell'impresa 1 la quale, conoscendo la razionalità dell'impresa 2 ne prevede il comportamento. In altre parole, l'impresa 1 sa che se sceglie  $q_1$  allora l'impresa 2 risponderà con  $R_2(q_1)$ . A questo punto il problema di ottimo dell'impresa 1 diventa:

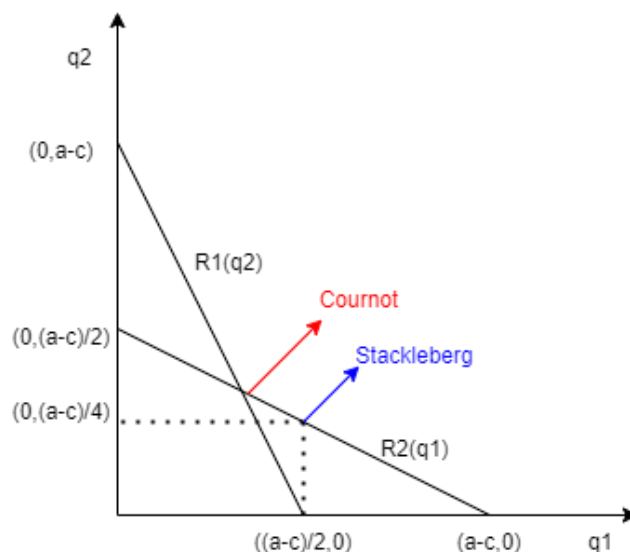
$$\max q_1[a - (q_1 + R_2(q_1)) - c]$$

con  $q_1 \geq 0$ . Svolgendo i termini all'interno della parentesi l'espressione diventa:

$$\max q_1 = q_1 \left[ \frac{1}{2}(a - q_1 - c) \right]$$

Svolgendo le derivate delle funzioni delle due imprese ed uguagliandole a zero si ricavano le due quantità di equilibrio:  $q_1^*(a - c)/2$  e  $q_2^* = (a - c)/4$ . A differenza del modello di Cournot, le due imprese producono due quantità diverse in equilibrio, con l'impresa leader che si trova a produrre una quantità maggiore e quindi ad ottenere un pay-off superiore rispetto all'impresa follower. Di seguito il grafico che mostra il nuovo equilibrio tra le due imprese:

Figura 17: Duopolio di Stackelberg



L'impresa 1 si trova in una posizione migliore rispetto all'impresa 2 e rispetto alla posizione in cui si trovava nel duopolio di Cournot. Difatti, riesce a produrre una quantità maggiore anche se il prezzo sarà necessariamente inferiore rispetto a prima. Questo risultato implica che avere delle informazioni aggiuntive in un gioco a più giocatori potrebbe non essere vantaggioso, anzi, potrebbe peggiorare la situazione di chi possiede queste informazioni. Consideriamo una versione leggermente differente del duopolio di Stackelberg, in cui l'impresa 2 sceglie la quantità da produrre dopo l'impresa 1, ma senza tenere in considerazione  $q_1$ . L'impresa 2, a questo punto, può solo immaginare quale sarà la scelta dell'impresa 1. Se l'impresa 2 immaginasse, ad esempio, che  $q_1^* = (a - c)/2$ , allora risponderebbe coerentemente con il modello di Stackelberg originale con  $q_2^* = (a - c)/4$ . L'impresa 1 può prevedere questa ipotesi e giocare la risposta ottimale nei confronti di  $(a - c)/4$ , ovvero  $3(a - c)/8$ . Ciò non sarebbe possibile poiché l'impresa 2 non potrebbe ragionevolmente credere che l'impresa 1 giochi la quantità di Stackelberg visto che come appena visto è incentivata a deviare da quella strategia. In questa versione leggermente differente del gioco l'unico equilibrio di Nash è pari a quello del modello di Cournot con  $q_1^* = q_2^* = (a - c)/3$ .

Come dimostrato da questo esempio, una piccola variazione nel grado di informazioni possedute da (almeno) uno dei giocatori può modificare drasticamente l'esito del gioco, sia in meglio che in peggio per il giocatore che le possiede. Nel prossimo capitolo saranno introdotte formalmente le definizioni di informazione imperfetta ed incompleta e si analizzeranno le implicazioni di tali categorie di giochi nell'ambito della ricerca dell'equilibrio.

## 4. INFORMAZIONE

### 4.1. Informazione completa ed imperfetta

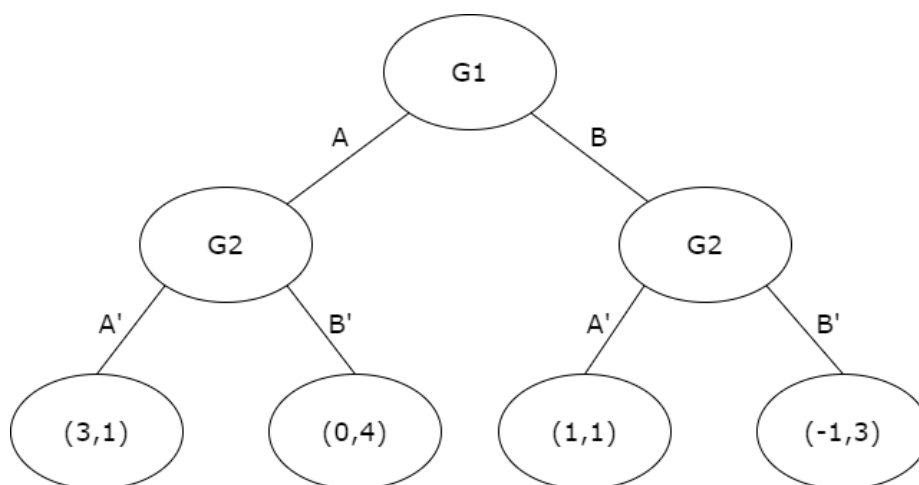
Nei capitoli precedenti si è trattato di giochi prevalentemente ad informazione completa e perfetta, ovvero giochi in cui ogni giocatore chiamato a scegliere conosce tutta la storia del gioco ed i pay-off propri e degli altri giocatori. In questo paragrafo si analizzeranno i giochi ad informazione completa ed imperfetta, ovvero giochi in cui almeno un giocatore, pur conoscendo tutti i pay-off potenziali degli altri giocatori, non conosce esattamente la propria posizione nel gioco al momento della scelta. In altre parole, non conosce tutta la storia del gioco nel momento in cui è chiamato ad effettuare la propria giocata.

Il modo migliore per analizzare un gioco ad informazione imperfetta è attraverso la forma *estesa*, che è stata già utilizzata nel paragrafo 3.4, seppur non in modo esplicito. Questa rappresentazione permette di specificare un numero maggiore di informazioni riguardo al gioco, in particolare:

1. I giocatori che partecipano al gioco
2. Il momento in cui i giocatori devono *muovere*
3. Quali sono le azioni a disposizione dei giocatori al momento della mossa
4. Il grado di conoscenza della storia del gioco di un giocatore al momento della mossa
5. I pay-off di ogni giocatore per ogni combinazione di strategie adottate

Si noti come il punto 1 ed il punto 5 sono comuni alla rappresentazione in forma *normale*, di cui è stato fatto largo uso nei capitoli precedenti. I punti 2, 3 e 4 aggiungono ulteriori informazioni circa la posizione in cui si trova un giocatore nel momento in cui deve scegliere un'azione da intraprendere. Di seguito un esempio di rappresentazione estesa di un gioco ad informazione completa e perfetta:

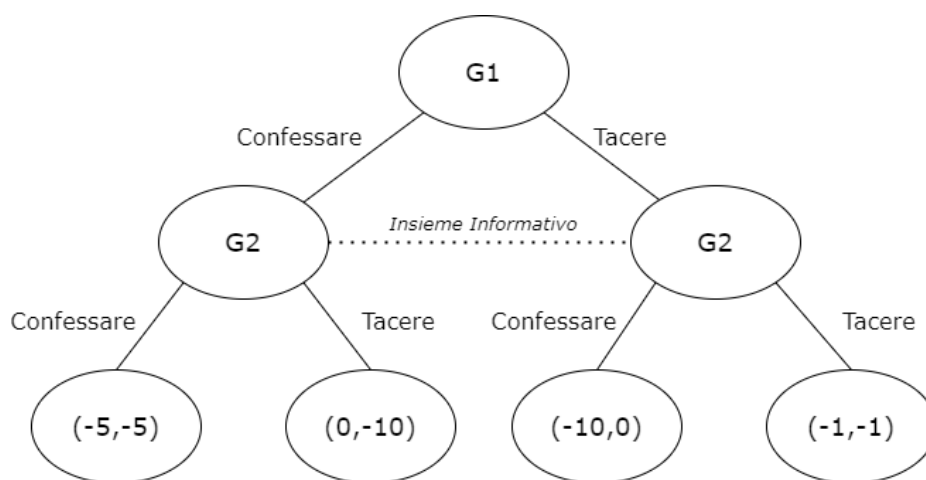
Figura 18: Gioco in forma estesa ad informazione completa e perfetta



Nel primo stadio del gioco, il giocatore 1 sceglie di giocare A o B; il giocatore 2, vista la decisione del giocatore 1 decide se giocare A' o B'. Ogni momento di scelta per un giocatore è detto *nodo decisionale*; pertanto, il gioco inizia con un nodo decisionale del giocatore 1, che può portare a due diversi nodi decisionali del giocatore 2. Il giocatore 1 ha una sola strategia: giocare A o B, e due azioni: A e B. Questa distinzione seppur banale è rilevante, poiché una strategia è a tutti gli effetti un piano di azione del giocatore *i* per ogni momento in cui può essere chiamato a muovere. In questo gioco il giocatore 2 ha a disposizione due azioni (A e B) e quattro strategie che dipendono *in primis* dalla scelta del giocatore 1: (A, A'), (A, B'), (B, A'), (B, B').

La rappresentazione in forma estesa può essere utilizzata anche per dei giochi statici, ipotizzando che il giocatore 2 giochi la propria mossa dopo il giocatore 1, ma senza aver visto la mossa di quest'ultimo. Per un esempio simile si rimanda al duopolio di Stackelberg nel paragrafo 3.5. Per indicare il livello di informazione a disposizione di un giocatore in un particolare nodo decisionale si fa riferimento alla nozione di *insieme informativo*: un insieme di nodi decisionali in cui il giocatore è chiamato a muovere ma non sa in quale dei nodi in cui ha diritto a muovere si trovi il gioco. Per chiarire questa definizione si faccia riferimento alla rappresentazione estesa del seguente problema di nostra vecchia conoscenza, il Dilemma del Prigioniero trattato nel capitolo 1:

Figura 19: Dilemma del prigioniero in forma estesa



Per ipotesi, il giocatore 2 non vede la mossa del giocatore 1 nel momento in cui deve decidere se Confessare o Tacere. Ciò è sostanzialmente uguale a ciò che accadrebbe nella versione statica del gioco, in cui i giocatori scelgono simultaneamente e separatamente. Il fatto che il giocatore 2 non sia sicuro della scelta del giocatore 1 fa sì che egli non sappia in quale dei due nodi decisionali si trovi. L'insieme di questi due nodi è quindi un insieme informativo per il giocatore 2, il quale può solo formulare delle ipotesi e assegnare delle probabilità riguardo la scelta del giocatore 1. Questo esempio, oltre a chiarire il concetto di insieme informativo, permette di definire in modo alternativo l'informazione perfetta ed imperfetta: un gioco ha

informazione perfetta se ogni insieme informativo dei giocatori è costituito da *un solo* nodo; viceversa, un gioco ha informazione imperfetta se almeno un insieme informativo di un giocatore è costituito da *almeno due* nodi. Come si vedrà, questa definizione è valida solo per i giochi ad informazione completa. Nell'esempio del Dilemma del Prigioniero, il giocatore 1 ha un solo insieme informativo composto da un singolo nodo (anche perché muove per primo). Al contrario, il giocatore 2 ha un insieme informativo composto da due nodi, quindi per la definizione di cui sopra si parla di informazione *imperfetta*. In generale, ogni gioco statico con mosse simultanee rappresentato in forma estesa è ad informazione imperfetta.

Le nozioni di nodo decisionale e insieme informativo permettono di formulare un concetto di equilibrio più forte rispetto a quelli visti finora. Per prima cosa occorre dare la definizione di *sottogioco*:

#### DEFINIZIONE 4.1.1

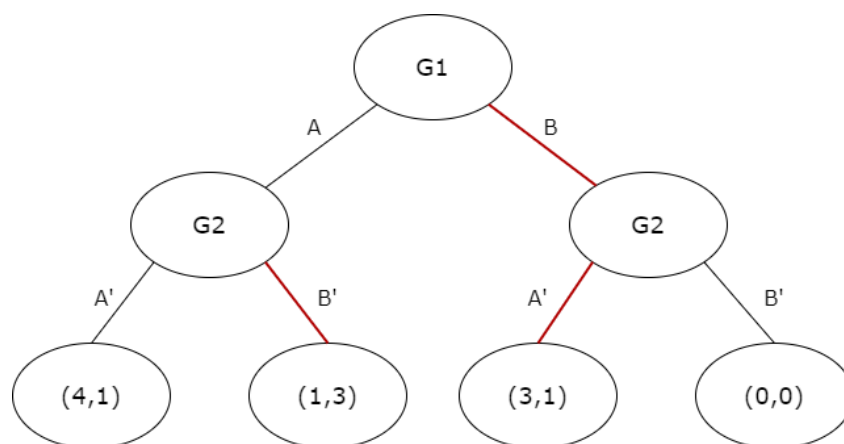
*Un sottogioco è una porzione limitata di un gioco con le seguenti caratteristiche:*

- 1. Inizia a partire da un insieme informativo costituito da un singolo nodo (tranne il primo del gioco)*
- 2. Comprende tutti i nodi decisionali successivi al nodo iniziale*
- 3. Non separa gli insiemi informativi successivi al nodo iniziale*

Il punto 3) implica che un sottogioco possa essere trattato come un gioco normale e che se un nodo  $n$  segue il nodo iniziale del sottogioco, allora tutti gli eventuali altri nodi appartenenti all'insieme informativo  $n$  devono essere considerati nel sottogioco.

A questo punto è possibile definire l'*equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi* come l'equilibrio in cui le strategie dei giocatori formano un equilibrio di Nash in ognuno dei sottogiochi. Per comprendere il significato di questa definizione si può ricorrere al processo di induzione a ritroso: per prima cosa si identificano i sottogiochi *terminali* ovvero quelli più piccoli che si trovano alla fine del gioco originario; per ciascun sottogioco si trova l'equilibrio di Nash e si sostituisce il pay-off corrispondente al nodo iniziale del sottogioco in esame; si procede in questo modo fino a risalire tutto l'albero del gioco fino a trovare un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Di seguito un esempio:

Figura 20: Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi



Applicando il processo di induzione a ritroso nel sottogioco che inizia con la mossa del giocatore 2 dopo che il giocatore 1 gioca A (sulla sinistra), si trova che la strategia ottimale per il giocatore 2 è B'. Se il giocatore 1 gioca B, invece, la strategia ottimale del giocatore 2 è giocare A'. Il giocatore 1, conoscendo la razionalità del giocatore 2 e prevedendone la scelta, decide di giocare B per garantirsi un pay-off maggiore. Dunque, l'esito dell'induzione a ritroso è la strategia (B, A'). L'equilibrio perfetto nei sottogiochi considera tutti gli equilibri dei sottogiochi, anche quelli che non si verificano ed in questo caso è pari a (B, (A', B')). Questa distinzione è importante poiché l'equilibrio perfetto nei sottogiochi considera l'intera strategia e non solo la *strada* ottimale. Ciò è importante per riprendere il concetto di minacce non credibili introdotto nel paragrafo 3.4 e mostrare come nei giochi ad informazione completa e perfetta esse siano eliminate. Difatti, nell'esempio di cui sopra il giocatore 2 potrebbe minacciare di giocare B' qualora il giocatore 1 giocasse B. Tuttavia, questa minaccia non può realmente avere effetto dato che non costituisce un equilibrio di Nash nel sottogioco.

Questa proprietà dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi non può essere applicata ai giochi ad informazione completa ma imperfetta. Infatti, in questi giochi è presente almeno un insieme informativo composto da più di un nodo e questo genera incertezza circa la scelta che compierebbe il giocatore chiamato a muovere in quell'insieme. In altre parole, il giocatore non può sapere se quel nodo sarà o meno raggiunto nel gioco e quindi non può formulare una predizione certa sulla propria strategia. Un modo per risolvere questo problema è quello di chiedere al giocatore che si trova a dover muovere in un certo insieme informativo di ipotizzare una distribuzione di probabilità circa le possibilità che ogni nodo dell'insieme venga raggiunto. Questo procedimento porta ad ottenere un equilibrio ancora più forte di quelli esaminati finora, detto *equilibrio Bayesiano*. Sarà introdotto nel prossimo paragrafo insieme ai giochi ad informazione incompleta.

## 4.2. Giochi statici ad informazione incompleta

Nei giochi visti finora ogni giocatore era a conoscenza dei pay-off degli altri giocatori, anche nelle situazioni di informazione imperfetta in cui il giocatore non sapeva a quale nodo dell'insieme informativo si trovasse il gioco. In un contesto di informazione incompleta almeno un giocatore non è a conoscenza dei pay-off di almeno un altro giocatore, come avviene ad esempio nelle aste a busta chiusa. Questa categoria di giochi è stata introdotta da Harsanyi nel 1967.

Per rappresentare i giochi ad informazione incompleta in forma normale è necessario trovare un modo per rappresentare l'incertezza riguardo la scelta della funzione dei pay-off da parte dei giocatori. Ogni funzione dei pay-off del giocatore  $i$  è scritta in questo modo:

$$u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$$

Questa definizione è simile a quella usata nel capitolo 2 nei giochi statici ad informazione completa e perfetta, ovvero  $u_i(s_1, \dots, s_n)$ . La prima differenza è che per i giochi Bayesiani usiamo la nozione di *azione* ( $a_i$ ) e non quella di *strategia* ( $s_i$ ). Questo perché una strategia implica un insieme certo di azioni, mentre in questo caso ogni azione è subordinata al verificarsi di un *tipo* ( $t_i$ ) e quindi per definizione incerta. Il tipo può essere definito come la scelta del giocatore  $i$  riguardo a quale funzione dei pay-off scegliere. Ad esempio, se il giocatore 1 può scegliere l'insieme di azioni  $(a_1, a_2)$  con probabilità  $q$  o l'insieme  $(a_3, a_4)$  con probabilità  $1 - q$  allora si dirà che il giocatore 1 ha due tipi:  $t_1$  con probabilità  $q$  e  $t_2$  con probabilità  $1 - q$ . Quindi, l'incertezza di un giocatore  $i$  circa i pay-off degli altri giocatori può essere tradotta nell'incertezza riguardo il tipo degli altri giocatori. Questo significa che un giocatore formula una distribuzione di probabilità dei tipi degli altri giocatori dato il proprio tipo in base alle proprie credenze, che si può scrivere utilizzando la probabilità condizionata come  $p_i(t_{-i}|t_i)$ , dove  $t_{-i}$  sono i valori dei tipi degli altri giocatori contenuti nell'insieme  $T_{-i}$ .

### DEFINIZIONE 4.2.1

Un gioco statico  $G$  in contesto di informazione incompleta si definisce come  $G = \{A_1, \dots, A_n; T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$ .

in cui  $A_1, \dots, A_n$  sono gli spazi delle azioni dei giocatori;  $T_1, \dots, T_n$  sono gli spazi dei tipi dei giocatori;  $p_1, \dots, p_n$  sono le credenze relative ai tipi degli altri giocatori e  $u_1, \dots, u_n$  sono le rispettive funzioni dei pay-off.

Per trattare l'incertezza che governa i giochi ad informazione incompleta si introduce un ulteriore giocatore, chiamato *natura*. La natura estrae aleatoriamente i tipi dei giocatori in base ad una distribuzione di probabilità. Questo *escamotage* serve a trasformare un gioco ad informazione incompleta in un gioco ad informazione imperfetta, quindi più semplice da trattare e comprendere. Attraverso il concetto di natura si

può definire la *strategia* a partire dagli spazi dei tipi e delle azioni. Una strategia del giocatore  $i$  è una funzione  $s_i(t_i)$  che per ogni  $t_i$  estratto dalla natura indica la corrispondente azione  $a_i \in A_i$ . L'*equilibrio di Nash bayesiano* si definisce in modo del tutto simile all'equilibrio di Nash incontrato nei giochi ad informazione completa. In altre parole, l'equilibrio di Nash bayesiano risolve il problema di ottimo per ogni giocatore rendendo sconveniente deviare dalla strategia.

Per un esempio di gioco ad informazione incompleta si faccia riferimento al seguente esempio proposto da Fudenberg e Tirole (1991)<sup>10</sup>:

Figure 21 e 22, *Gioco delle imprese*

G.1 <sub>0</sub> /G.2	E	NE
C	(3,-1)	(5,0)
NC	(2,1)	(3,0)

G.1 <sub>3</sub> /G.2	E	NE
C	(0,-1)	(2,0)
NC	(2,1)	(3,0)

L'impresa 1 opera in un certo mercato e deve decidere se costruire o meno un impianto nuovo (C, NC). L'impresa 2 deve decidere se entrare o meno nel mercato (E, NE) ma non sa quanto l'impianto costerà all'impresa 1: se costasse 0 i pay-off sarebbero indicati nella tabella a sinistra e l'impresa 2 giocherebbe NE; viceversa, se costasse 3 i pay-off sarebbero indicati nella tabella a destra e l'impresa 2 giocherebbe E. L'impresa 2 può effettuare la propria scelta sulla base delle proprie credenze circa i costi dell'impresa 1, attribuendo delle probabilità ai due eventi: si indichi con  $p$  la probabilità che il costo sia 3 e con  $1 - p$  la probabilità che il costo sia 0. I tipi dell'impresa 1 sono quindi due e l'impresa 2 troverà conveniente giocare E se  $p < 0,5$  oppure NE se  $p > 0,5$ . La soluzione di questo gioco necessita dell'utilizzo di strategie miste, ma non è stato ancora dimostrato se esse siano efficaci nel contesto dei giochi ad informazione incompleta.

Grazie all'introduzione della natura è stato dimostrato da Harsanyi come non solo sia possibile applicare le strategie miste in un contesto di informazione incompleta, ma che sia possibile rafforzare la definizione di strategie miste in modo più puntuale. Nel capitolo 3 si è parlato di strategia mista di un giocatore 2 come la distribuzione di probabilità che il giocatore 2 attribuisce alle possibili mosse del giocatore 1. Il giocatore 1, in realtà, non sceglie in modo casuale ma generalmente utilizza una piccola e quasi trascurabile porzione di informazione privata  $\varepsilon_1$ . Ecco che il gioco diventa ad informazione incompleta. Riprendiamo il gioco introdotto nel capitolo 2, ovvero la *Battaglia dei sessi* tra Carlo e Maria, considerando una piccola quantità di informazione privata per entrambi:

<sup>10</sup> Fudenberg, Tirole; *Game Theory*, 1991

Figura 23: Battaglia dei sessi in informazione incompleta

Carlo/Maria	Partita	Teatro
Partita	$(2+\varepsilon_C, 1)$	$(0, 0)$
Teatro	$(0, 0)$	$(1, 2+\varepsilon_M)$

dove  $\varepsilon_C$  è l'informazione privata di Carlo e  $\varepsilon_M$  è l'informazione privata di Maria, estratte casualmente da un insieme  $[0, x)$  con  $x$  molto piccolo. Questo gioco si può scrivere in forma normale con  $A = (\text{Partita}, \text{Teatro})$ ,  $T = [0, x)$  e le credenze pari a  $p_M(\varepsilon_C) = p_C(\varepsilon_M) = 1/x, \forall \varepsilon \in [0, x)$ . Per ipotesi, Carlo gioca Partita se  $\varepsilon_C$  supera un valore  $c$ , altrimenti gioca Teatro. Allo stesso modo, Maria gioca Teatro se  $\varepsilon_M$  supera un valore  $m$ , altrimenti gioca Partita. Quindi, la probabilità che Carlo giochi Partita è pari a  $(x - c)/x$  e la probabilità che Maria giochi Teatro è  $(x - m)/x$ . Dal punto di vista di Carlo (speculare a quello di Maria), data la strategia scelta da Maria, i due pay-off sono i seguenti:

1. Se Carlo gioca Partita allora il pay-off è  $\frac{m}{x}(2+\varepsilon_C) \times 1 + [(x - m)/x] \times 0 = \frac{m}{x}(2+\varepsilon_C)$
2. Se Carlo gioca Teatro il pay-off è  $\frac{m}{x} \times 0 + [(x - m)/x] \times 1 = \frac{(x-m)}{x}$

Ponendo a sistema le due equazioni si ottiene che Partita è la strategia ottimale se  $e_C \geq \frac{x}{m} - 3 = c$ . Allo stesso modo, dal punto di vista di Maria, Teatro è la strategia ottimale se  $e_M \geq \frac{x}{c} - 3 = m$ .

Risolvendo l'equazione dell'ottimo di Carlo (utilizzare quella di Maria porta allo stesso risultato) si ottiene che la probabilità che Carlo giochi Partita è pari a  $1 - \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x}$ , che al tendere di  $x$  a zero si avvicina al valore di  $2/3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2x} \right) = \frac{2}{3}$$

Questo valore è lo stesso che si sarebbe ottenuto in un contesto di informazione completa attraverso strategie miste. Quindi, ciò dimostra che le strategie miste in un contesto di informazione incompleta possono essere trattate come strategie pure introducendo una piccola quantità di informazione privata (detta anche *perturbazione*).

### 4.3. Giochi dinamici ad informazione incompleta

È stato appena dimostrato come i giochi statici ad informazione incompleta possano essere trattati come giochi ad informazione imperfetta aggiungendo la natura al gioco. Inoltre, si è visto come l'equilibrio di Nash bayesiano sia un concetto di equilibrio più forte rispetto all'equilibrio di Nash in informazione completa e all'equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi. Nel trattare dei giochi dinamici ad informazione incompleta, una categoria di giochi ancora più elaborati, sarà presentato il concetto di *equilibrio bayesiano perfetto*. Questo processo di raffinare di volta in volta l'equilibrio al crescere della complessità del gioco serve a dimostrare che gli equilibri meno forti hanno valenza solo nei giochi di corrispondente complessità. In altre parole, un equilibrio di Nash semplice in giochi statici ad informazione completa funziona allo stesso modo di un equilibrio bayesiano perfetto in giochi dinamici ad informazione incompleta, ma se si cerca di applicare l'equilibrio di Nash a quest'ultima categoria di giochi si scopre che esso non è sufficiente ad eliminare gli equilibri e le minacce non plausibili.

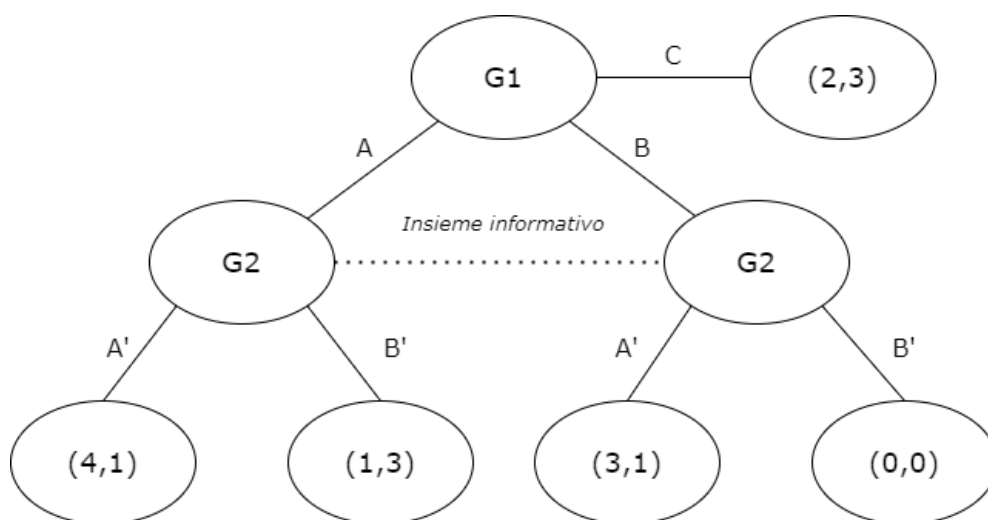
Un *equilibrio bayesiano perfetto* deve soddisfare i quattro requisiti di seguito, anche se sono state formulate negli anni diverse definizioni comprendenti ulteriori requisiti o fondate su concetti come l'equilibrio sequenziale (Kreps e Wilson)<sup>11</sup>. Ad ogni modo, una delle definizioni generalmente accettate è quella che si basa sui seguenti requisiti:

- 1) Il giocatore cui spetta la mossa in un insieme informativo deve formulare una distribuzione di probabilità (credenza) su quale nodo dell'insieme sia stato raggiunto dal gioco. Se l'insieme comprende un solo nodo, esso avrà probabilità pari a 1. Questo requisito sussiste anche nell'equilibrio di Nash bayesiano, poiché senza l'assegnazione delle probabilità ai nodi dell'insieme informativo non sarebbe possibile formulare delle strategie razionali.
- 2) Le strategie dei giocatori devono essere sequenzialmente razionali, data le distribuzioni delle probabilità (credenze) sullo stato del gioco. Il vincolo che le strategie debbano essere sequenzialmente razionali implica che tutta la sequenza delle azioni di una strategia debba essere ottimale date le credenze dei giocatori.
- 3) Il terzo requisito è fondamentale per restringere il campo delle credenze alle sole plausibili, ovvero quelle credenze facenti parte del *sentiero di equilibrio*. Nella rappresentazione estesa di un gioco, il sentiero di equilibrio indica la successione di azioni dei giocatori che sono un equilibrio di Nash. Se un insieme informativo è fuori da questo sentiero, significa che in equilibrio sarà raggiunto con probabilità pari a 0. Quindi, negli insiemi informativi facenti parte del sentiero di equilibrio le credenze dei giocatori si basano esclusivamente sulle loro strategie di equilibrio. Si faccia riferimento al seguente gioco in forma estesa:

---

<sup>11</sup> Kreps, Wilson; *Sequential Equilibria*, 1982

Figura 24: Equilibrio bayesiano perfetto



Questo gioco è del tutto simile a quello incontrato nel paragrafo 4.1, con la differenza che il giocatore 1 può giocare anche la strategia C. Applicando la definizione di equilibrio di Nash nella rappresentazione in forma normale del gioco si ottengono due equilibri:  $(B, A')$  e  $(C, B')$ . L'equilibrio  $(C, B')$  non è ovviamente plausibile perché per il giocatore 2 la mossa  $A'$  è sempre dominante (infatti porta al giocatore 2 pay-off superiori rispetto a  $B'$  per ogni nodo decisionale). Applicando il primo requisito, si introduce una distribuzione delle credenze per ogni giocatore. Applicando il secondo requisito, si restringe il campo alle strategie sequenzialmente razionali e ciò è sufficiente per eliminare l'equilibrio  $(C, B')$ . I primi due requisiti impongono che le strategie dei giocatori non siano dominate nei sottogiochi. Applicando il terzo requisito, si nota come il giocatore 2 debba credere con  $p = 1$  che il giocatore 1 giochi B e quindi sappia quale nodo informativo sia stato raggiunto con certezza.

Nella maggior parte dei casi i primi tre requisiti riescono a definire completamente l'equilibrio bayesiano perfetto, che lega l'equilibrio al concetto di credenza e non solo a quello di strategia. Imporre la plausibilità delle credenze implica la razionalità delle strategie e risolve quasi sempre il problema delle minacce non credibili.

- 4) Negli insiemi informativi non facenti parte del sentiero di equilibrio le credenze dei giocatori si basano esclusivamente sulle loro strategie di equilibrio (ove possibile). Quest'ultimo requisito introduce il problema delle credenze non plausibili fuori dal sentiero di equilibrio. Per una definizione formale si faccia riferimento a Fudenberg e Tirole (1991)<sup>12</sup>. In alcuni giochi a più di due giocatori può accadere che una credenza fallace, seppure estranea al sentiero di equilibrio possa influenzare l'equilibrio del gioco. Ciò accade perché le credenze sul sentiero di equilibrio si basano su strategie che comprendono anche credenze al di fuori di questo sentiero, anche se nella maggior

<sup>12</sup> Fudenberg, Tirole; *Game Theory*, 1991

parte dei casi ciò non è un problema. In verità, anche il requisito 4 presenta un problema di circolarità: per qualsiasi insieme informativo l'insieme di credenze di un giocatore si basa sia sulle azioni precedenti che future, quindi non è sempre possibile trovare l'equilibrio risalendo l'albero del gioco, come si faceva per gli equilibri trattati nei paragrafi precedenti.

## APPROFONDIMENTO: TEORIA EVOLUTIVA DEI GIOCHI

La teoria evolutiva dei giochi è un'applicazione dei concetti di equilibrio propri della Teoria dei Giochi ai problemi evolutivi delle popolazioni biologiche. Questa branca della Teoria dei Giochi nasce nel 1973 dagli studi di Smith e Price<sup>13</sup> riguardo dei modelli che potessero prevedere il comportamento evolutivo degli animali. Seppur nato con tutt'altro scopo, questo approccio alle strategie competitive in ambito biologico ha trovato molta fortuna in ambito socioeconomico, grazie alla sua capacità di prevedere il comportamento di soggetti non razionali. L'assenza del requisito di razionalità perfetta di tutti gli agenti, proprio della Teoria dei Giochi, rende il modello più facilmente applicabile in ambito pratico. Mentre nella Teoria classica, la bontà di una strategia in un gioco a due giocatori è misurata attraverso una coppia di pay-off  $u_i(s_1, s_2)$ , nella Teoria evolutiva è misurata attraverso la capacità dell'una o dell'altra specie di replicarsi. Questa misurazione avviene attraverso le *equazioni dei replicatori*, ovvero equazioni differenziali non lineari che pongono in relazione il benessere di una popolazione (e quindi la sua capacità di replicarsi) al numero degli individui.

La scrittura continua di un'equazione dei replicatori è la seguente:

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(x) - \varphi(x)]$$

dove  $x_i$  è la percentuale della specie  $i$  nella popolazione  $x$ ;  $f_i(x)$  è la funzione del benessere della specie  $i$ ;  $\varphi(x)$  è il benessere medio dell'intera popolazione. Nella pratica si usa la forma discreta di questa equazione, che comporta semplicemente una maggiore quantità di calcoli pur fornendo lo stesso risultato teorico, per questo sarà utilizzata la forma continua. Si consideri il rapporto tra due popolazioni in proporzione  $x_i$  ed  $x_j$  e si derivi l'equazione risultante in funzione del tempo, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x_i}{x_j} \right) = \frac{x_i}{x_j} [f_i(x) - f_j(x)]$$

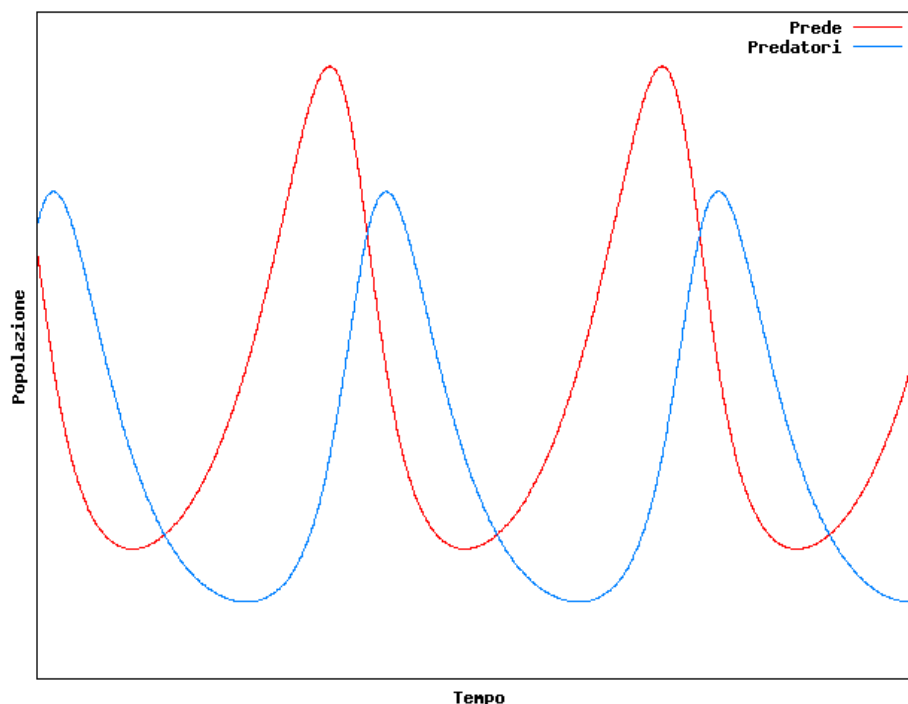
che indica come la differenza positiva o negativa nella variazione della popolazione tra due specie è data semplicemente dalla differenza di benessere delle due specie stesse. Un esempio di questo principio è dato

---

<sup>13</sup> Maynard-Smith, Price; *The Logic of Animal Conflict*, 1973

dalle *equazioni di di Lotka-Volterra*<sup>14</sup> che descrivono un modello evolutivo tra due popolazioni, una di prede ed una di predatori. Assumendo che i predatori possono cibarsi solo delle prede, e che la quantità di di cibo per i predatori è proporzionale al numero di prede che incontrano. L'equilibrio si trova nel punto in cui il numero di prede uccise dai predatori è pari al numero di prede che nascono. Logicamente, se i predatori uccidono un numero troppo elevato di prede, si troveranno senza cibo e la loro popolazione diminuirà, favorendo il proliferare delle prede. Viceversa, se le prede sono in numero troppo elevato, i predatori troveranno più facile ucciderle, facendone diminuire la popolazione ed aumentando la propria:

*Figura 25: Equazioni di Lotka-Volterra*



da [https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni\\_di\\_Lotka-Volterra](https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra)

Come si può notare dalla *Figura 25* l'andamento della popolazione è armonico, questa ciclicità è data dal fatto che le popolazioni (quando non sono in equilibrio) tendono a ribilanciarsi costantemente per i motivi sopra elencati. Dopo aver introdotto il concetto di equilibrio evolutivo attraverso un esempio, si può procedere ad un enunciato più formale.

Le soluzioni delle equazioni dei replicatori sono le cosiddette *strategie evolutivamente stabili (ESS)*, ovvero quelle strategie che sopravvivono alla selezione naturale darwiniana. In altre parole, una strategia evolutivamente stabile sopravvive all'introduzione nel tempo di altre strategie *mutanti* che alterano temporaneamente l'equilibrio. Si noti come ogni popolazione trasmette la propria strategia in maniera ereditaria, quindi non sono ammessi cambi di strategie o strategie che prevedono di modificare il proprio comportamento a partire da un certo momento  $t$  (*trigger strategies*). Le strategie di equilibrio inoltre, possono essere sia pure che miste. Una strategia evolutivamente stabile  $s^*$  è quindi tale se all'apparire di

<sup>14</sup> Volterra; *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, 1926

una strategia mutante  $s$ , l'utilità evolutiva ottenuta dalla porzione di popolazione che adotta  $s^*$  (*non mutante*) è superiore all'utilità evolutiva ottenuta dalla porzione di popolazione che adotta  $s$  (*mutante*); ovvero  $u(s^*) > u(s)$ . Se entrambe le specie utilizzano una stessa strategia evolutivamente stabile ( $s^*, s^*$ ), allora si otterrà un equilibrio evolutivo, ovvero una tipologia di equilibrio di Nash. Si noti come le due strategie eventualmente miste devono essere simmetriche poiché ci sia equilibrio.

#### DEFINIZIONE

*Dato un gioco evolutivo  $G$ ,  $s^*$  è una strategia evolutivamente stabile se  $(s^*, s^*)$  è un equilibrio di Nash e se per ogni altra strategia  $s \neq s^*$  si ha che  $f(s^*, s) > f(s, s)$ .*

In altre parole,  $s^*$  è evolutivamente stabile se, oltre ad essere equilibrio di Nash se entrambe le specie la giocano, garantisce un pay-off superiore alla specie che gioca  $s^*$  dato che l'altra gioca  $s$ , rispetto alla specie che gioca  $s$  dato che l'altra gioca  $s$ . Si faccia riferimento al seguente problema *Falchi e Colombe*<sup>15</sup>:

*Figura 26: Falchi e Colombe*

G.1/G.2	Falco	Colomba
Falco	$(1/2-c, 1/2-c)$	$(1, 0)$
Colomba	$(0, 1)$	$(1/2, 1/2)$

Il gioco si svolge in una popolazione di animali in cui ogni animale, quando si scontra con un altro per ottenere una preda, può assumere una di due strategie: Falco o Colomba. La strategia Colomba (tranquilla) prevede che se anche l'altro animale gioca Colomba allora la preda sarà divisa con pay-off  $(1/2, 1/2)$ . Se una Colomba incontra un Falco (strategia aggressiva), allora la Colomba fugge ed il Falco ottiene tutta la preda con pay-off  $(1, 0)$  o  $(0, 1)$ . Se due animali giocano Falco allora avviene un combattimento, alla fine del quale ognuno ottiene metà della preda meno  $c$ , ovvero il costo dei danni subiti nel combattimento  $(1/2-c, 1/2-c)$ . L'esistenza di una strategia di equilibrio ed evolutivamente stabile è subordinata alla grandezza del parametro  $c$ , in particolare esistono tre casi:

1.  $c < 1/2$ : in questo caso il pay-off dei due animali che giocano Falco è positivo, e poiché giocare Colomba è dominato da giocare Falco, allora (Falco, Falco) è un equilibrio evolutivo di Nash. Tuttavia, questo equilibrio non è efficiente poiché il pay-off ottenuto è minore di quello che si otterrebbe giocando (Colomba, Colomba).
2.  $c = 1/2$ : in questo caso il pay-off dei due animali che giocano Falco è nullo. La strategia (Falco, Falco) è sempre un equilibrio evolutivo non efficiente ed anche le strategie (Colomba, Falco) e

<sup>15</sup> Maynard-Smith; *Evolution and the Theory of Games*, 1982

(Falco, Colomba) sono equilibri di Nash, ma non evolutivamente stabili poiché manca il requisito di simmetria.

3.  $c > 1/2$ : in questo caso il pay-off dei due animali che Giocano Falco è negativo, quindi (Falco, Falco) non è un equilibrio di Nash. Gli unici equilibri sono (Colomba, Falco) e (Falco, Colomba) che, come visto, non sono stabili evolutivamente.

Negli ultimi due casi non esiste un equilibrio stabile nel tempo in strategie pure, ma si può ricorrere all'utilizzo delle strategie miste. Sia  $p$  la probabilità di Falco e  $1 - p$  la probabilità di Colomba per entrambi gli animali (si ricordi che i pay-off sono simmetrici). Nel caso in cui  $c = 1/2$ , i pay-off del giocatore 1 sono:

1.  $0p + (1 - p)$  se gioca Falco
2.  $0p + (1 - p)/2$  se gioca Colomba

Come al solito, uguagliando i due pay-off si ottiene che la strategia ottimale evolutivamente stabile è di giocare (Falco, Falco) con  $p = 1$ . Nel caso in cui  $c > 1/2$ , utilizzando la stessa procedura si trova che l'equilibrio evolutivamente stabile è in  $p = 1/2c$ . È interessante notare come nei precedenti equilibri in strategie pure o miste in cui giocare Falco era la strategia evolutivamente stabile, le Colombe sarebbero scomparse dalla popolazione e la stabilità sarebbe stata data dalla presenza costante di soli Falchi ( $x_F = 1, x_C = 0$ ). Invece, nell'equilibrio in strategia mista  $(1/2c, 1/2c)$  le due popolazioni rimangono costanti nel tempo senza che una delle due sia dominata dall'altra. La logica di questo risultato risiede nel fatto che, se la strategia aggressiva porta con buona probabilità ad un esito negativo (e quindi non è dominante), gli animali preferiranno giocarla con una probabilità minore di 1 ed inversamente proporzionale alla perdita di benessere connessa. Se gli animali giocassero comunque Falco con probabilità pari a 1, allora i Falchi sarebbero dominati dalle Colombe. Invece, con questa soluzione in strategie miste le popolazioni rimangono stabili nel tempo<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Falco e Colomba sono le due strategie e non le popolazioni, ma sono state usate per semplicità come sinonimi in quanto ai fini del gioco è indifferente.

## CONCLUSIONE

La Teoria dei giochi, seppur relativamente giovane, ha esercitato una profonda influenza nello studio delle scienze sociali ed economiche. Grazie alla sua intrinseca capacità di analizzare il comportamento di agenti razionali e non, è candidata a diventare (soprattutto nella forma evolutiva) il *linguaggio universale* di tali scienze<sup>17</sup>. L'analisi dell'equilibrio teorico di Nash nelle sue varie forme ha in realtà una forte valenza pratica: difatti, comprendere le dinamiche più semplici di equilibrio è la base per poter analizzare i più complessi casi reali, in cui spesso queste dinamiche sono rivisitate ed estese.

In ambito economico, la Teoria dei Giochi trova applicazioni in microeconomia e finanza. Per quanto riguarda la microeconomia, come visto negli esempi di duopolio (Cournot e Stackelberg), la Teoria permette di analizzare il punto di vista di ogni impresa e di discernerne la strategia ottimale in risposta a quella dell'impresa avversaria. I principi applicati ai duopoli, ovviamente, valgono anche per modelli con un numero superiore di imprese (oligopoli) che richiedono semplicemente un numero maggiore di calcoli. In finanza, una delle applicazioni principali ha a che fare con la *finanza comportamentale*, più precisamente nella valutazione dei derivati. Difatti, si usano modelli di Teoria dei Giochi in informazione completa per prevedere i pay-off degli investitori interessati ad una particolare opzione e fissarne il prezzo in modo da massimizzare il guadagno dell'emittente<sup>18</sup>. Tuttavia, l'impatto maggiore della Teoria dei Giochi in anni recenti è stato senza dubbio in ambito informatico, nel campo della *machine learning*. Come accennato nel paragrafo 3.3 riguardo agli algoritmi *minimax*, la Teoria ha permesso agli ingegneri di programmare le macchine verso la ricerca di strategie di equilibrio vincenti e basate quindi sul teorema di Nash.

Pur avendone evidenziato i numerosi pregi, non si può ignorare il fatto che la Teoria dei Giochi abbia un importante limite: l'assenza di eziologia. Difatti, seppur riesca a prevedere sotto determinate ipotesi il comportamento degli agenti, non spiega il *perché* di queste azioni. Questo limite non è rilevante nell'analisi teorica che ha caratterizzato questo elaborato, ma lo diventa nel momento in cui la Teoria assume valenza pratica, specialmente in ambito socioeconomico. Pur portando con sé questo fardello, la Teoria dei Giochi rimane una delle branche della matematica più promettenti e che si spera potranno contribuire in futuro a spiegare la realtà che osserviamo.

---

<sup>17</sup> Gintis; *Classic versus evolutionary game theory*, 2000

<sup>18</sup> [borsaitaliana.it](http://borsaitaliana.it)

## **BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA**

Aumann, R (1976). *Agreeing to Disagree*.

Dindo P, (2012). *Replicazione*. Scaricato da treccani.it.

Edizioni Ghibli (2017). *Il pensiero di Neumann: la teoria dei giochi*. Scaricato da edizionighibli.com.

Ernandes, M (-). *Teoria Evoluzionistica dei Giochi*.

Fragelli, V (2011). *Teoria dei Giochi*.

Fudenberg, D e Tirole, J (1991) *Game Theory*.

Gibbons, R (1992). *Teoria dei Giochi*.

Guidotti, M (2006). *La Teoria dei Giochi*. Scaricato da galenotech.org.

Karlin, A.R (2016). *Game Theory, Alive*.

Kreps, D e Wilson, R (1982). *Sequential Equilibria*.

Madeo, D e Mocenni, C (2016). *Teoria dei Giochi e Giochi evolutivi*.

Mangianti, M (2016). *La Teoria Dei Giochi: Alcuni Esempi*.

Maynard-Smith, J (1982). *Evolution and the Theory of Games*.

Maynard-Smith, J e Price, G.R (1973). *The Logic of Animal Conflict*.

Rossi, F (2018). *La Teoria dei Giochi e l'equilibrio di Nash*. Scaricato da startingfinance.it.

Torre, A (2017). *Teoria dei Giochi*. Scaricato da unipv.it.

Treccani (2012). *Von Neumann-Morgenstern, funzione di utilità*. Scaricato da treccani.it.

Volterra, V (1926). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*.

Von Neumann, J (1928). *La Teoria dei Giochi di Società*.