

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI

“LUISS - GUIDO CARLI”

---



Dipartimento di Economia e Finanza

Corso di laurea in Economia e Finanza – Finanza dei Mercati e  
Quantitativa

**I MERCATI SPERIMENTALI:  
IL ROTMAN INTERACTIVE TRADER**

RELATORE:

CHIARISSIMO PROF. EMILIO BARONE

LAUREANDO:

MARCO SALERNO

MATR. 631251

CORRELATORE:

CHIARISSIMO PROF. NICOLA BORRI

---

ANNO ACCADEMICO 2011-12



# Indice

Introduzione.....	5
Capitolo 1 – Un software per le simulazioni di mercato .....	8
Cos'è l'experiential learning .....	8
Il Rotman Interactive Trader .....	10
Capitolo 2 – Market Making & Algorithmic Trading .....	19
Letteratura .....	20
Un modello per la stima dei prezzi <i>bid</i> ed <i>ask</i> . .....	25
Definizione del modello .....	25
Caratteristiche del modello .....	38
Un algoritmo per il Rotman Interactive Trader .....	45
Appendice 2.1 .....	52
Appendice 2.2 .....	56
Capitolo 3 – Modelli per il rischio di credito.....	59
Il modello di Merton e quello sviluppato da KMV .....	60
Il modello di Merton .....	60
Il modello sviluppato da KMV .....	63
Credit Risk Case per il software RIT .....	70
Un modello <i>à la Leland</i> per la stima del rischio di credito .....	81
La dinamica del valore delle attività aziendali .....	84
I contratti.....	85

<i>Default Point, Leverage e volatilità dell'equity</i> .....	87
La struttura del debito .....	88
La struttura a termine delle probabilità di default e dei Credit Default Swaps .....	89
Utilizzo del modello per l'analisi empirica.....	93
Analisi empirica.....	94
I dati.....	94
I risultati.....	97
Appendice 3 .....	103
Conclusione.....	112
Riferimenti Bibliografici .....	114

## Introduzione

In questo lavoro analizzeremo l'utilizzo del software "Rotman Interactive Trader" (RIT) che è stato sviluppato dalla University of Toronto e che consente la simulazione di diversi mercati permettendo un approccio pratico allo studio delle materie finanziarie (*experiential learning* o anche *deriving by doing*).

Forniremo una descrizione del software e di come esso può essere utilizzato per svolgere delle simulazioni di mercato. Tale software si sta diffondendo notevolmente negli USA ed in Canada dove è utilizzato da circa 31 diverse università tra le quali: Massachusetts Institute of Technology, University of Chicago, Duke University e HEC Montreal. A conferma che l'interesse verso programmi che permettano di simulare i mercati sta crescendo, notiamo che Harvard Business School sta sviluppando "uptick", software che dovrebbe permettere le stesse simulazioni del RIT ma che al momento è molto meno "s sofisticato". Inoltre, un'altra prestigiosa università, Stanford University, ha ultimato la costruzione del suo Financial Lab nel mese di Aprile (2012).

Analizzeremo inoltre il problema del *market making*. Se volessimo acquistare un titolo sul mercato dovremmo pagare il prezzo *ask* quotato mentre se volessimo venderlo potremmo farlo ricevendo il prezzo *bid*. Il *bid-ask spread* è il costo da sostenere affinché la transazione avvenga immediatamente (*cost of immediacy*) ed è quel costo che giustifica la differenza tra il prezzo pagato nella transazione ed il valore reale del bene (*fundamental value*). Forniremo un modello per la determinazione di tale *cost of immediacy* e, di conseguenza, dei prezzi *bid* e *ask*. Mostreremo inoltre la costruzione di un algoritmo in Visual Basic for Application che svolga l'attività di *market maker* e possa essere utilizzato sul Rotman Interactive Trader. Tale algoritmo può essere una base di partenza sulla quale implementare nuove strategie qualora la "LUISS Guido Carli" decida di partecipare alle future edizioni della "Rotman International Trading Competition".

Infine, dal momento che la valutazione del rischio di credito suscita, da sempre, un grande interesse da parte sia delle banche che delle altre istituzioni finanziarie, condurremo un'analisi sui "modelli strutturali" per il rischio di credito. Essi sono interessanti perché

## Introduzione

permettono sia la stima delle probabilità di default sia il *pricing* del debito e dell'*equity* in un unico modello basato su dati di mercato (prezzo dei titoli azionari, opzioni, etc.).

In particolare, analizzeremo quei modelli che utilizzano la teoria delle opzioni per la stima del rischio di credito ed il primo ad apparire in letteratura è stato il modello di Merton. La peculiarità di tale modello consiste nel fatto che l'*equity* può esser visto come un'opzione call europea scritta sulle attività della società e avente un prezzo d'esercizio pari al valore facciale del debito. Il modello può essere utilizzato per stimare o le probabilità neutrali verso il rischio che una società fallisca o il *credit spread* sul debito. Per poter applicare tale modello è necessario conoscere il valore corrente delle attività, la volatilità delle attività, l'ammontare del debito e la sua scadenza. Il modello di Merton è stato utilizzato da Kealhofer, McQuown e Vasicek che hanno costituito nel 1989 la KMV Corporation (acquisita in seguito da Moody's ed oggi operante con il nome Moody's Analytics). KMV utilizzava il modello di Merton per attribuire ad ogni società una variabile detta *Expected Default Frequency (EDF)* che rappresentava la probabilità di default reale calcolata sulla base di un database di società fallite.

Presenteremo inoltre un nuovo case per il Rotman Interactive Trader che è basato sul modello di Merton e stimola gli studenti a reagire alle news concernenti il valore delle attività, del debito, della volatilità delle attività e della *maturity* del debito. Mostriamo che questo case richiede ai partecipanti di comprendere il funzionamento del modello di Merton e, se utilizzato per una simulazione competitiva, di trasporlo in un modello Excel che possa essere d'aiuto nella valutazione del rischio di credito.

Svolgeremo infine un'analisi empirica utilizzando un modello per il rischio di credito *à la Leland* che ha come caratteristica peculiare l'ipotesi che il debito sia perpetuo. Tale impostazione non solo permette di replicare il fenomeno del *roll-over* del debito che è utilizzato dalle società (in particolar modo dalle banche) ma risulta particolarmente utile quando ci si trova ad analizzare dati empirici. Con il modello di Merton infatti si è obbligati a fare un'ipotesi circa la scadenza del debito (comunemente posta pari a 5 anni) mentre con il modello *à la Leland* ciò non è più necessario. Il modello sarà calibrato utilizzando i *CDS spread*, le quotazioni azionarie ed opzionarie relative a 17 banche (europee ed americane). Verranno mostrate le probabilità di default neutrali verso il

## Introduzione

rischio calcolate ed i risultati saranno confrontati con quelli pubblicati dal *Risk Management Institute* della University of Singapore.

## Capitolo 1 - Un software per le simulazioni di mercato

In questo capitolo forniremo una descrizione del software RIT che è stato sviluppato dalla University of Toronto per permettere un approccio pratico allo studio delle materie finanziarie (*experiential learning*). Tale software si sta diffondendo notevolmente negli USA ed in Canada dove è utilizzato da circa 31 diverse università<sup>1</sup> tra le quali: Massachusetts Institute of Technology, University of Chicago, Duke University e HEC Montreal.

Da qualche anno, anche alcune università europee hanno acquistato la licenza: University of Cambridge, Dublin City University, CASS Business School e la LUISS Guido Carli.

### Cos'è l'*experiential learning*

La creatività e l'innovazione sono fondamentali in qualsiasi ambito ed in particolare nel mondo del *business*. Ci si può interrogare su come si possano incentivare gli studenti ad "innovarsi", ossia come spronarli a svolgere delle ricerche che conducano a qualcosa di più rispetto alla mera conoscenza mnemonica.

I risultati dell'apprendimento dipendono, ovviamente, dall'approccio che ha lo studente. Gli studiosi in materia hanno notato che alcuni studenti sono, per natura, interessati a conoscere non solo il significato degli argomenti trattati durante un corso ma anche come essi si relazionano con altri elementi precedentemente acquisiti. Tali studenti vengono classificati come studenti volti al *deep learning* e spesso non si attengono semplicemente al materiale suggerito in classe ma cercano di approfondire oppure di capire le implicazioni pratiche. Conseguenza di tale approccio è una miglior comprensione delle problematiche affrontate rispetto agli studenti volti al *surface learning*.

Quest'ultima tipologia di studenti tende a focalizzare i propri studi solo al materiale fornito in classe e strettamente necessario per il superamento dell'esame. Essi si concentrano più sul mero esercizio mnemonico (magari senza comprendere pienamente il significato) piuttosto che sull'acquisizione "vera" dei concetti. Questo approccio allo

---

<sup>1</sup> Fonte: *Financial Research and Trading Lab* presso la University of Toronto.



studio porterà gli studenti, con molta probabilità, a non utilizzare i concetti mostrati loro dai docenti qualora si trovino di fronte a problemi mai affrontati.

Alla luce di quanto esposto, come si può incentivare l'approccio *deep learning*? L'approccio degli studenti è sicuramente influenzato dal metodo d'insegnamento e dalla modalità di assegnazione dei voti. Per acquisire pienamente la conoscenza di un determinato argomento è necessario non solo leggerne la descrizione/spiegazione ma anche metterlo in relazione con ciò che già si conosce e cercare evidenze empiriche che lo confermino. La probabilità che gli studenti facciano ciò aumenta notevolmente se: le votazioni sono anch'esse basate su queste attività di approfondimento; se il carico complessivo degli studi permette loro di dedicarsi a tali attività. Tutto ciò può essere ottenuto utilizzando strumenti tradizionali (richiesta di *problem set* e *case studies* durante il corso) ma per permettere agli studenti di simulare ciò che affronteranno nel mondo del lavoro ciò non è sufficiente.

Infatti, nella pratica, difficilmente ci si trova ad affrontare problemi definiti in modo chiaro, con tutte le informazioni necessarie o suggerimenti possibili che indichino la tecnica più appropriata da utilizzare per la loro risoluzione. È necessario infatti essere in grado di utilizzare le proprie conoscenze e competenze in ambienti complessi e in tempo reale, oltre a sviluppare l'abilità di identificare gli strumenti e i dati più idonei. In numerosi programmi educativi, queste capacità sono sviluppate attraverso esperienze interattive simulate in scenari realistici.

In ogni caso, sono poche le tecniche di insegnamento che permettono di riprodurre questo tipo di esperienza. Per questo motivo, la capacità di insegnare assume un valore ancora più importante se permette agli studenti di applicare, esaminare con occhio critico e sviluppare ciò che hanno appreso in aula, utilizzando, in un ambiente "sano" e controllato, i dati e gli strumenti che normalmente troverebbero sul posto di lavoro.

Il *Financial Research and Trading Lab* (FRTL) presso la Rotman School of Management fornisce questo tipo di ambiente, stimolando l'apprendimento degli studenti e permettendo loro di applicare ed estendere le conoscenze e le nozioni che hanno acquisito durante le lezioni. Ad esempio, gli studenti che usufruiscono del Lab possono utilizzare informazioni in tempo reale provenienti dai mercati disponibili per tutta la gamma di titoli

finanziari e società che avrebbero a disposizione a lavoro. La possibilità di lavorare con dati reali e di usare e sviluppare modelli finanziari li rende in grado di comprendere come e perché i titoli finanziari sono negoziati, in che modo sono valutati, quali sono le fonti di rischio e rendimento, e così via. Lavorare nel FRTL permette di avere dei *feedback* immediati sulle proprie azioni, incoraggia gli studenti a testare le proprie idee e ad imparare in maniera “significativa”. Il *learning experience* è disegnato per superare la ripetizione di esercizi altamente strutturati che vengono imparati a memoria dagli studenti, fornendo le condizioni ideali per un apprendimento più approfondito.

Oltre a permettere agli studenti di applicare nella pratica ciò che hanno imparato sui libri, il FRTL offre l’opportunità di apprendere di più. Lavorando con dati reali e strumenti standard, essi si sono impegnati in un ciclo di *experiential learning*. Il FRTL permette loro di testare strategie e procedure che hanno imparato in aula, e di osservarne le conseguenze. Poiché sono chiamati a confrontare le teorie e gli strumenti analitici con i dati, si imbattono in problemi ogni volta nuovi e inattesi. Tali *feedback* possono spingere gli studenti a fare nuove domande, portando da qui ad un nuovo livello di comprensione dei concetti spiegati, che a loro volta possono essere testati e ripetuti nel ciclo di apprendimento. Inoltre, oltre a fornire un’esperienza impagabile dal punto di vista pratico, l’*experiential learning* può incoraggiare lo spirito di curiosità che è alla base dell’innovazione. La sfida per le *business school* è quella di sviluppare degli approcci educativi che incoraggino la comprensione approfondita dei vari problemi, forniscano incentivi per scoprire nuove opportunità. Tali metodi di insegnamento, basati sull’approccio pratico, possono dare come risultati non solo una conoscenza duratura ma anche l’intrinseca motivazione per un apprendimento continuo.

Questi risultati sono essenziali per gli studenti prossimi alla laurea laddove questi intendano ricoprire al meglio il loro futuro ruolo di leader “innovativi”.

### **Il Rotman Interactive Trader**

Il Rotman Interactive Trader è un software sviluppato dalla Rotman School of Management presso la University of Toronto che permette di simulare varie tipologie di mercato e di generare particolari scenari (ad esempio una crisi di liquidità) al fine di

mostrare agli studenti cosa implicano nella pratica determinate strategie o particolari avvenimenti. Il RIT può esser visto come un simulatore di volo, si carica un determinato scenario e gli studenti attraverso la simulazione hanno la possibilità di provare in modo diretto le implicazioni di quel determinato scenario e sono spronati a sviluppare strategie che permettano di ottimizzare la propria performance.

Forniremo di seguito una spiegazione dell'utilizzo del server e delle variabili che si possono modificare per adattare i *case* forniti dal FRTL alle proprie esigenze.

Per lanciare un *case file* è sufficiente aprire il programma "RIT server" (doppio click sull'icona), selezionare il *case file* prescelto (click su "Browse" nella schermata iniziale) e poi cliccare su "Load". Si possono lanciare più *case* dallo stesso computer, sarà sufficiente fare nuovamente doppio click sul software "RIT server" e lanciare un altro *case*.

Gli studenti dovranno aprire il software "RIT Client" e collegarsi al server utilizzando l'indirizzo IP e la porta ("Port") mostrati in basso a destra nella schermata del "RIT server". Qualora siano stati lanciati più *case* dallo stesso computer si noterà che l'indirizzo IP non cambia mentre a cambiare sarà il numero della porta ("Port").

Quando si carica un *case*, il software dà la possibilità di modificare i parametri generali dalla scheda *Game Variables* (si veda la Figura 1) e che di seguito descriviamo:

*TicksPerPeriod* fornisce la durata (in secondi) del *case* mentre *TicksPerYear* ci dice di quanti secondi è composto un anno nella simulazione. Ad esempio, se vogliamo un *case* che duri 5 minuti e che simuli 1 mese di mercato reale dovremo fissare *TicksPerPeriod* pari a 300 ( $=60 \times 5$ ) e *TicksPerYear* pari a 3600 ( $300 \times 12$ ).

*MarkToMarketsPerPeriod* indica ogni quanti secondi avviene il *marking to market*; è importante quando si utilizzano i *futures*.

*IsSecuredLogin* è una variabile che assume valore Vero o Falso. Se Vero consentirà la connessione soltanto a coloro che sono presenti in una lista precedentemente caricata nel software. Se Falso consentirà l'accesso a chiunque.

*IsEnforceTradingLimits* è anch'esso una variabile Vero/Falso. Se Vero, non permetterà ai *trader* di superare i limiti specificati nella scheda *Trading Limits*.

*TicksPerTenderOffer* permette di modificare il numero di secondi che ogni *trader* ha per rispondere/valutare un ordine istituzionale.

*IsAnonymousTrading* è una variabile Vero/Falso. Se Vero, non consente di vedere il nome degli altri trader nel *book* di negoziazione pertanto ogni trader ha la sicurezza che gli altri non possano copiare la propria strategia.

*IsRTDEnabled* permette di attivare (se Vero) o disattivare (se Falso) la possibilità di importare in Excel i dati del mercato simulato attraverso la funzione "Datitemporeale".

*IsAPIEnabled* permette di attivare o disattivare la possibilità di utilizzare algoritmi per il trading.

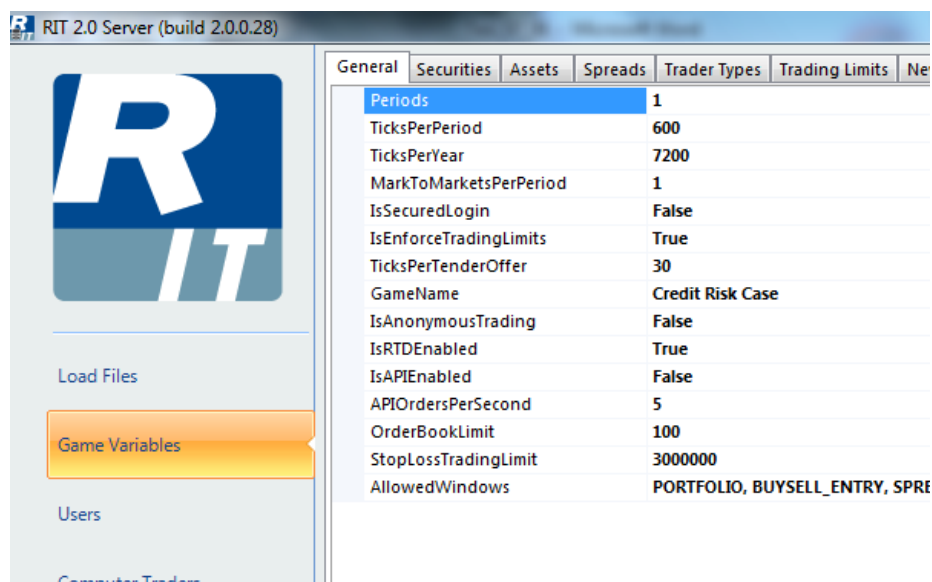
*APIOrderPerSecond* permette di definire quanti ordini accettare ogni secondo da ogni singolo algoritmo. Se posto pari a 5, ad esempio, consente ad ogni algoritmo di eseguire al massimo 5 ordini per secondo. Aumentare questa variabile consente una maggiore velocità ma allo stesso tempo pone sotto stress la memoria CPU del computer sul quale è lanciato il server.

*StopLossTradingLimit* permette di limitare le perdite di un singolo trader al valore specificato in quella determinata cella. Quando le perdite superano tale limite, il trader è automaticamente impossibilitato ad eseguire altre transazioni. Tale variabile è utile per evitare che due persone si organizzino per alterare il mercato.

---

**Figura 1. Scheda "General"**

---



## Capitolo 1 - Un software per le simulazioni di mercato

Passiamo ora alla scheda *Securities* (si veda la Figura 2 ). Per ogni *ticker* potremo modificare le seguenti variabili:

*Ticker* è il nome del titolo che apparirà ai *trader*;

*Type* permette di definire se esso debba essere un *Futures*, un'azione, un indice azionario, un'opzione, uno *swap*;

*IsTradeable* permette di rendere il titolo negoziabile o meno;

*IsFollowPath* permette di immettere liquidità infinita se posto Vero. Questa variabile è utile quando ci si vuole concentrare su un problema (ad esempio: simulazione del delta hedging) senza preoccuparsi della liquidità del titolo che viene resa infinita dal software;

*StartPeriod* e *StopPeriod* servono, rispettivamente, ad indicare al software il periodo a partire dal quale il titolo inizia ad essere negoziato oppure cessa di essere negoziato;

*StartPrice* indica il prezzo di partenza del titolo. *MinPrice* e *MaxPrice* indicano, rispettivamente, il prezzo minimo e quello massimo che saranno accettati per i *limit order*.

Tutti gli ordini al di sotto del *MinPrice* saranno considerati nulli e non verranno presi in considerazione dal software. Stessa cosa accade per gli ordini che stanno al di sopra del *MaxPrice*;

*QuotedDecimals* permette di aumentare il numero di decimali quotati. È utile quando si utilizzano case con obbligazioni a breve scadenza;

*IsShortAllowed* è permette di stabilire se sia possibile o meno effettuare le vendite allo scoperto.

*TradingFee* indica le commissioni che devono essere pagate per l'utilizzo dei *market order*. Esse possono essere calcolate in diversi modi (per unità, per transazione o per percentuale) modificando la variabile *TradingFeeType*;

*MaxTradeSize* indica il numero massimo di titoli acquistabili con un singolo contratto;

*Currency* permette di denominare il ticker in una valuta diversa dal dollaro. In tal modo si possono creare *case* complessi che permettono arbitraggi triangolari, *carry trading* e così via.

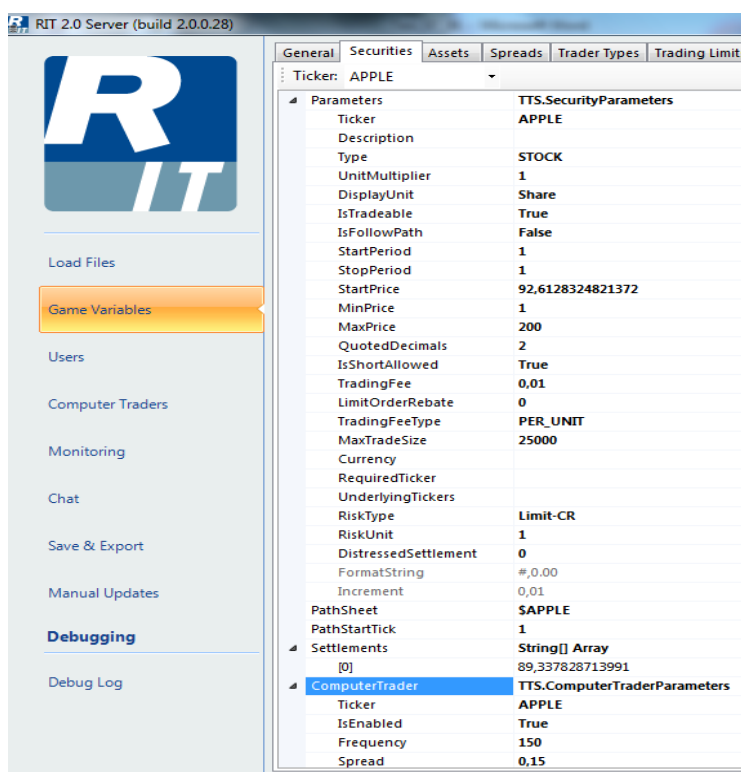
Vi è la possibilità di modificare anche i parametri che regolano il comportamento dei *Computer Trader* attraverso le seguenti variabili:

*IsEnabled* permette di scegliere tra un mercato in cui vi siano *Computerized ANON Trader* ed uno in cui non vi sono;

*Frequency* indica il numero di ordini che gli *ANON Trader* eseguono in un minuto. Tanto più alto è questo valore tanto più vi sarà liquidità sul mercato;

*Spread* indica lo *spread* che sarà utilizzato dagli *ANON Trader*. Più è alto questo valore e più illiquido sarà il mercato;

Figura 2. Scheda "Securities"



*Size* è espressa in dollari ed indica la il valore medio degli ordini immessi dagli *ANON Trader*. Il valore di ogni ordine è pari al prezzo moltiplicato per la quantità pertanto possiamo ricavare il numero medio di titoli che verranno comprati/venduti dagli *ANON Trader* semplicemente dividendo per il prezzo corrente dell'azione;

*IsInitializeBook* è una variabile che governa il momento in cui inizia l'attività degli *ANON Trader*. Quando settata su Vero fa sì che l' *order book* sia riempito dagli *ANON Trader* già a partire dal primo secondo di simulazione. Il numero di ordini immesso dagli *ANON*

## Capitolo 1 – Un software per le simulazioni di mercato

*Trader* è governato dalla variabile *InitialBookSize*. Se settata su Falso, l'*order book* apparirà "vuoto" e soltanto quando la simulazione sarà iniziata gli *ANON Trader* cominceranno a immettere i propri ordini. *Aggressiveness* e *ReversionMultiplier* sono due variabili che permettono di calibrare con quale velocità gli *ANON Trader* eliminano eventuali scostamenti del prezzo dal *path* pregenerato. Tanto più il valore di queste due variabili è elevato tanto più gli *ANON Trader* manterranno il prezzo vicino a quello generato dal modello.

Passiamo ora alla scheda *Asset* (si veda la Figura 3). Per ogni ticker potremo modificare le seguenti variabili:

*Ticker* è il nome dell'*asset* che apparirà ai *trader*;

*Type* permette di definire se esso è un *container* (deposito), *pipeline* (tubature per trasporto), *ship* (nave da trasporto), *refinery* (raffineria), *power plant* (una centrale energetica) o un *producer* (questa variabile è generica e potrebbe essere un'industria che, immettendo un quantitativo di *asset* permette la produzione di altri *asset*);

*TotalQuantity* definisce il numero totale di tale *asset* che si vuole rendere disponibile ai *trader*.

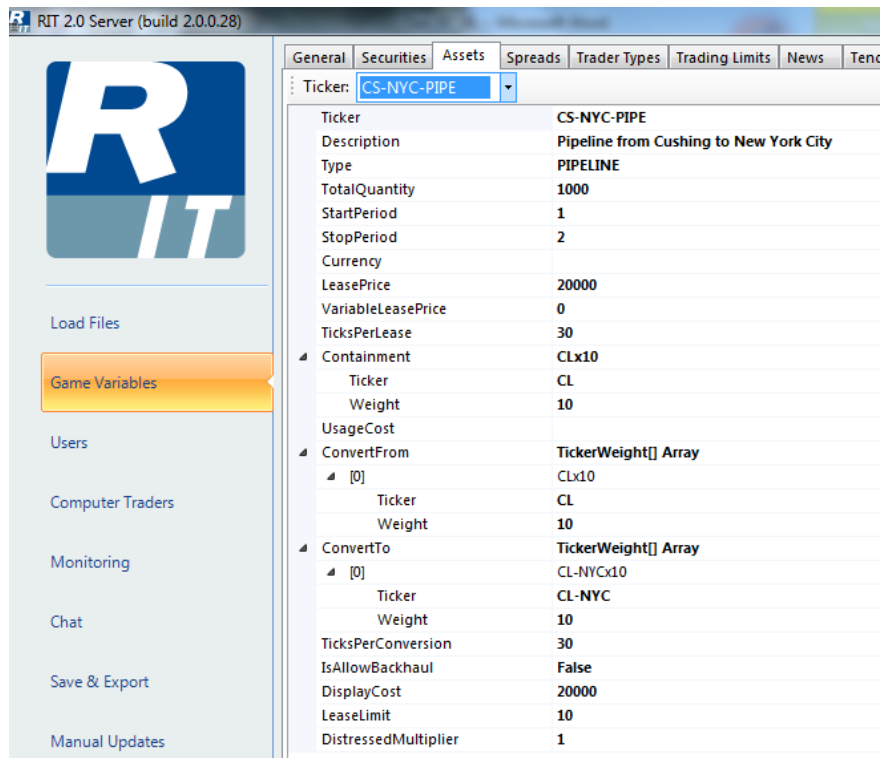
*LeasePrice* indica la commissione necessaria per l'utilizzo dell'*asset* per il numero di secondi specificati dalla variabile *TicksPerLease*;

*TicksPerConversion* stabilisce il numero di secondi necessari per effettuare la conversione (per conversione si intende il trasporto in caso di *pipeline*, la raffinazione in caso di *refinery*, la produzione in caso di *power plant* o *producer*);

*IsallowBackhaul* permette di gestire il trasporto in una sola direzione oppure in entrambe. Ad esempio: se abbiamo la produzione di petrolio in Alaska ed il mercato spot si trova a Chicago possiamo utilizzare una *pipeline* per il trasporto e consentire che esso avvenga solo dall'Alaska a Chicago e non viceversa settando questa variabile su False;

*LeaseLimit* consente di limitare il numero di unità di tale *asset* che possono essere utilizzate contemporaneamente.

Figura 3. Scheda "Assets".



Nella scheda Trading Limits (si veda la Figura 4) potremo modificare i limiti imposti ai *trader* in termini di numero di titoli da poter detenere.

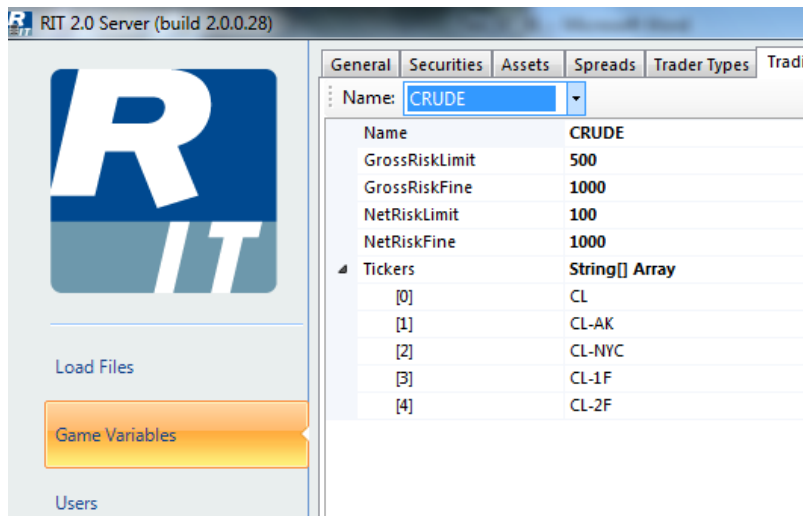
Le variabili che si possono modificare sono *GrossRiskLimit*, *GrossRiskFine*, *NetRiskLimit*, *NetRiskFine*.

Il *GrossRiskLimit* è costituito dal numero massimo di posizioni che un *trader* può assumere ed è calcolato come somma algebrica delle posizioni lunghe più il valore assoluto delle posizioni corte. Il *NetRiskLimit* è dato invece dalla posizione netta che il *trader* possiede ed è calcolato come somma algebrica delle posizioni lunghe e quelle corte. Ovviamente, il *NetRiskLimit* deve essere sempre minore (al più uguale) rispetto al *GrossRiskLimit*. Nel caso in cui nella scheda "General" avessimo dato la possibilità di superare i limiti di posizione, si dovrebbero prevedere delle *finis* che sono specificate nel software come numero di dollari per ogni unità che supera il limite. Ipotizziamo che un *trader* abbia una posizione lunga pari a 100000 unità del titolo ABC ed una posizione corta pari 20000 unità del titolo XYZ. La sua posizione netta sarà 80000 unità mentre la sua *gross position* sarà di 120000



unità. Se ipotizziamo che il *net* ed il *gross limit* siano, rispettivamente pari a 50000 e 100000 e che le *finis* siano entrambe pari a 0.1\$ per ogni titolo che supera il limite, il nostro *trader* subirà la seguente penalizzazione: sarà multato di 3000\$ [0.1\$ (80000-50000)] per aver superato il *net limit*; sarà multato di 2000\$ [0.1\$ (120000-100000)].

Figura 4. Scheda "Trading Limits"



La scheda "Users" consente semplicemente di vedere i *trader* che sono connessi mentre quella "Monitoring" consente di controllare le posizioni ed i profitti dei singoli *trader*. La scheda "Chat" consente di monitorare le conversazioni avvenute tramite chat.

Durante la sessione di trading il "RIT 2.0 server" permette di monitorare le posizioni assunte dai singoli *trader* dalla scheda "Monitoring", tale funzione è utile per capire chi ha problemi nel seguire le istruzioni ricevute. Si possono anche ordinare i *trader* in base alle commissioni pagate, alle *finis* ricevute, al "Profit and Loss", etc. a seconda delle necessità che si hanno. Facendo doppio click nella scheda "Monitor", in corrispondenza di una determinata colonna il software apre un grafico ,aggiornato in tempo reale, che mostra i *trader* ordinati in base al criterio della colonna prescelta.

Quando il *case* è terminato si può passare alla scheda "Save and Export" dove è possibile salvare tre tipi diversi di file:

- a) "State" - questo file permette di salvare la sessione di trading e riprenderla in un secondo momento. Anche se poco sfruttata, potrebbe essere utile qualora si utilizzino *case* molto lunghi e si necessiti di una pausa.
- b) "Export to Excel" - permette di esportare i dati relativi a tutte le transazioni effettuate ed i profitti di tutti i *trader* in un file Excel che potrà essere in seguito analizzato. Selezionando "Include charting data" è possibile includere nel file Excel generato dal software anche i dati per la costruzione dei grafici relativi alle transazioni sui vari titoli per ogni *trader*.
- c) "Generate Reports" - questo comando permette di generare un resoconto personalizzato per ogni singolo *trader* (in formato PDF). Nella casella InputBox è possibile definire il nome del report. Selezionando "Include security charts" saranno visualizzati anche i grafici dei titoli nel report (è sconsigliato selezionare tale casella quando il numero di *trader* è elevato perché si genererebbero un numero di grafici molto elevato che potrebbe mandare in crisi la CPU del computer sul quale è lanciato il server). Stessa cosa può esser fatta per le chat selezionando la casella "Include chat logs". Per inviare i *report* ai singoli *trader* e permettere loro di scaricarli sul proprio computer è necessario, prima di cliccare il tasto "save", selezionare la casella "Push report to clients" (come mostrato in Figura 5).

---

**Figura 5. Sezione "Save and Export".**

---

The image shows a screenshot of a software interface with three distinct sections for saving and exporting data. The top section, titled "State", contains a "Save" button. The middle section, titled "Export To Excel", features a checkbox labeled "Include charting data" which is currently unchecked, and a "Save" button below it. The bottom section, titled "Generate Reports", includes a text input field for "Prefix" with the value "hsdakkk", two checkboxes for "Include security charts" and "Include chat logs" (both unchecked), a checkbox for "Push reports to clients" which is checked, and a "Save" button at the bottom right.

## Capitolo 2 - Market Making & Algorithmic Trading

I mercati perfettamente concorrenziali, *friction-less markets*, si caratterizzano per la loro capacità di assorbire immediatamente ordini di grandi dimensioni e, allo stesso tempo, di neutralizzare repentinamente eventuali scostamenti dei prezzi dal loro valore d'equilibrio. Se ipotizzassimo di agire in un regime di perfetta concorrenza varrebbe la legge del prezzo unico ed il costo di ogni transazione sarebbe, banalmente, pari al valore del titolo scambiato indipendentemente dal volume.

Una domanda sorge spontanea, i mercati di borsa possono essere considerati perfettamente concorrenziali?

I mercati di borsa non consentono di avere un unico prezzo per lo stesso titolo a causa della presenza del *bid-ask spread*. Se infatti volessimo acquistare dovremmo pagare il prezzo *ask* quotato mentre se volessimo vendere potremmo farlo ricevendo il prezzo *bid*. Scendiamo più nel dettaglio.

Nei mercati *quote-driven* è il *market maker* a quotare costantemente un prezzo *bid* ed uno *ask*. Nei mercati *order-driven* ogni *trader* può fissare le sue quotazioni *bid* e *ask* immettendo nel mercato due *limit order* di segno opposto con lo scopo di lucrare lo *spread*. È importante notare che queste quotazioni sono limitate ad un determinato quantitativo che viene dichiarato preventivamente. Infatti sia il *market maker* che il *trader* sono tenuti a specificare il volume per il quale sono disposti a eseguire gli ordini ai prezzi quotati.

Alla luce di quanto detto, possiamo vedere il costo di ogni transazione finanziaria come composto da due parti:

Il valore del titolo;

Costo da sostenere affinché la transazione avvenga immediatamente (*cost of immediacy*).

Da questa prospettiva possiamo affermare che il *cost of immediacy* è quel fattore che giustifica la differenza tra il prezzo pagato nella transazione ed il valore reale del bene (*fundamental value*).

In questo capitolo forniremo un modello per la determinazione di tale *cost of immediacy* e, di conseguenza, dei prezzi *bid* e *ask*. Prima, però, forniremo una disamina della letteratura su tale tema a partire dal lavoro pionieristico di Demsetz<sup>2</sup>.

### Letteratura

La convergenza di interessi tra accademici e professionisti sulla struttura che governa le transazioni finanziarie ha fatto nascere un filone della letteratura in materia finanziaria che va sotto il nome di “*market microstructure*”. Gli studi appartenenti a questo genere sono stati condotti osservando differenti strutture di mercato ed analizzando le differenze che ne derivano in merito a:

- costi di transazione;
- volatilità dei prezzi;
- costi dovuti alla liquidità.

In generale, i costi di transazione, *transaction cost*, sono quelli che devono essere sostenuti affinché avvenga il trasferimento della proprietà del titolo e sono strettamente collegati ai costi dovuti alla liquidità, *liquidity cost*.

Amihud e Mendelson<sup>3</sup> individuano, tra le componenti dei costi dovuti alla liquidità, il *bid-ask spread* e i *market impact cost*. Questi ultimi sono calcolati come la differenza tra il prezzo pagato per la transazione e quello che si sarebbe avuto se la transazione non fosse avvenuta. In altri termini, tale costo è pari all’impatto che la transazione ha sul prezzo di mercato.

Stoll<sup>4</sup> si focalizza invece sul fatto che il *market maker* fornisce un servizio al mercato, è un fornitore di liquidità (*liquidity provider*). Il suo ruolo è quello di fare da intermediario tra acquirenti e venditori permettendo ad ogni investitore di effettuare le transazioni in modo immediato. Pertanto, nell’analisi del *bid-ask spread* si deve analizzare il comportamento del *market maker* ed i costi che lo stesso sostiene per fornire liquidità.

---

<sup>2</sup> Demsetz, H., 1968. The cost of transacting 33-. *Quarterly Journal of Economics*, Issue 82, pp. 33-53.

<sup>3</sup> Amihud, Y. & Mendelson, H., 1980. Dealership market: Market-making with inventory. *Journal of Financial Economics*, Volume 8, pp. 31-53.

<sup>4</sup> Stoll, H. R., 1992. Principles of Trading Market Structure. *Journal of Financial Services Research*, Issue 6, pp. 75-107.

Bagehot<sup>5</sup> afferma che il *market maker* interagisce con tre gruppi di agenti:

- agenti che hanno informazioni privilegiate (*informed trader*)
- agenti che sono mossi da esigenze di liquidità (*liquidity trader*)
- agenti che hanno aspettative diverse dal mercato con riguardo al *fair price* del titolo.

Gli *informed trader* si caratterizzano per il possesso di informazioni privilegiate. Essi acquisteranno quando il *fair price* è maggiore della quotazione *ask* e venderanno quando è minore del prezzo *bid*. Il *market maker* subirà sempre una perdita dalle transazioni effettuate con questa tipologia di agenti.

I *liquidity trader* sono quegli individui che si presentano sul mercato mossi da esigenze di liquidità. Hanno pertanto la necessità di eseguire la transazione con effetto immediato e sono disposti a sopportare un piccolo costo per l'immediatezza fornita dal *market maker*. Quest'ultimo guadagna sempre dalle transazioni effettuate con questa tipologia di agenti. Infine, alcuni agenti pensano che i prezzi dei titoli ancora non abbiano scontato alcune informazioni pubbliche e pertanto si rivolgono al *market maker* ritenendo le quotazioni di quest'ultimo una buona opportunità d'investimento. In realtà, ogni informazione pubblica (in un mercato efficiente almeno in forma debole) è immediatamente scontata sui prezzi pertanto il *market maker* guadagnerà anche dalle contrattazioni con questa tipologia di agenti.

Stoll identifica tre componenti di costo che il *market maker* sostiene svolgendo il suo ruolo di *liquidity provider*:

- I costi dovuti al mantenimento del portafoglio (*cost of carrying inventory*)
- Gli *order processing cost*
- I costi dovuti alla selezione avversa (*adverse selection cost*)

I costi dovuti al mantenimento del portafoglio (*cost of carrying inventory*) sono quei costi dovuti al fatto che il *market maker*, a seguito della sua attività, possiede un portafoglio la cui composizione è diversa da quella ritenuta ottimale. Ad esempio, pur in assenza di qualsiasi altra tipologia di costi, se un *market maker* vuole avere una posizione nulla su un determinato titolo, egli sarà disposto a comprare/vendere soltanto se la sua controparte è

---

<sup>5</sup> Bagehot, W., 1971. The only game in town. *Financial Analysts Journal*, 27(2), p. 12–22.

disposta a riconoscergli, rispettivamente, uno sconto/premio per deviare dalla sua posizione ottimale.

I costi dovuti alla selezione avversa, *adverse selection cost*, sono dovuti al fatto che il *market maker* può trovarsi ad effettuare transazioni con individui che hanno informazioni migliori delle sue pertanto, come già mostrato da Bagehot (1971), subirà sicuramente una perdita.

Gli *order processing cost* sono costi che possono essere fissi o variabili e si riferiscono a tutte quelle spese necessarie affinché il *market maker* possa operare: affitto di locali, acquisto apparecchiature elettroniche, etc. Tali costi sono di minore importanza perché è possibile renderli minimi attraverso le economie di scala.

A questo punto la letteratura in materia si è divisa in due correnti: una vede il *market maker* come un individuo che cerca di minimizzare i *cost of carrying inventory* ed ha dato il via al cosiddetto *inventory-based approach*; l'altra focalizza la propria attenzione sul differenziale informativo esistente tra *informed agents* e *market maker*, e prende il nome di *information-based approach*.

Nell'*inventory-based approach* le determinanti del *bid-ask spread* possono essere analizzate ipotizzando 2 diversi *framework* <sup>6</sup>:

un *single-dealer framework*, in cui esiste un unico *market maker* che ha il monopolio sulle transazioni;

un *multi-dealer framework*, in cui il *market maker* opera in un mercato competitivo.

In entrambe i casi il *market maker* deve fissare lo *spread* in modo da massimizzare il suo profitto. Aumentando lo *spread* si limita il *cost of carrying inventory*, diminuendolo si aumenta il numero delle transazioni. Il *market maker* deve dunque trovare un trade-off tra la minimizzazione dei *cost of carrying inventory* e la massimizzazione del numero di transazioni eseguite.

Nel *single-dealer framework*, gli arrivi di ordini d'acquisto e di vendita seguono, per ipotesi, processi di Poisson indipendenti e si pongono dei limiti al numero massimo di posizioni che il *market maker* può avere (sia lunghe che corte). Questi deve fronteggiare due fonti d'incertezza:

---

<sup>6</sup>Ho, T. & Stoll, H. R., 1981. Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. *Journal of Financial Economics*, 9(1), pp. 47-73.

## Capitolo 2 – Market Making & Algorithmic Trading

- quale sarà il futuro andamento del prezzo del titolo;
- quale sarà la futura domanda per il titolo.

Il *market maker* massimizza la sua funzione di profitto aggiustando dinamicamente le sue quotazioni *bid* e *ask*. Queste ultime sono fortemente dipendenti dalla composizione del portafoglio del *market maker*. In particolare, Amihud e Mendelson<sup>7</sup> mostrano che esse sono funzioni monotone decrescenti del numero di titoli già in possesso del *market maker*. Spieghiamo questo meccanismo con un esempio.

Ipotizziamo che il *market maker*, in base all'informazione disponibile, si aspetti che il *fair price* di un titolo sia  $P$ . Definiamo  $P_{bid}$  e  $P_{ask}$  essere, rispettivamente, il prezzo quotato *bid* e *ask*. Se il *market maker* ha una posizione eccessivamente lunga sul titolo e vuole liquidarne una parte, egli ridurrà  $P_{ask}$  inducendo un aumento della domanda per il titolo. Contestualmente, ridurrà anche  $P_{bid}$  inducendo una diminuzione dell'offerta da parte degli agenti operanti sul mercato. Ovviamente, se lo scopo del *market maker* è quello di aumentare il numero di titoli in portafoglio, egli porrà in essere una strategia opposta. Aumenterà  $P_{ask}$  per diminuire la domanda del titolo e incrementerà  $P_{bid}$  per aumentare l'offerta.

Nel *multi-dealer framework*, il singolo *market maker* riconosce che il suo guadagno dipende dalle azioni poste in essere dagli altri *market maker* presenti sul mercato<sup>8</sup>. Le differenze con il *single-dealer framework* consistono nel fatto che le quotazioni *bid* ed *ask* dipendono anche dalla correlazione esistente tra i titoli.

Passando all' *information-based approach*, Copeland e Galai<sup>9</sup> analizzano la struttura dei prezzi *bid* e *ask* utilizzando la teoria delle opzioni sostenendo che ogni *limit order* possa essere visto come un'opzione. In particolare, un *limit order* d'acquisto equivale ad un'opzione put con prezzo d'esercizio pari alla quotazione *bid* mentre un *limit order* di vendita può esser visto come un'opzione call con prezzo d'esercizio pari alla quotazione *ask*. Per

---

<sup>7</sup>Amihud, Y. & Mendelson, H., 1980. Dealership market: Market-making with inventory. *Journal of Financial Economics*, Volume 8, pp. 31-53.

<sup>8</sup> Amihud, Y. & Mendelson, H., 1983. Price Smoothing and Inventory. *Review of Economic Studies*, Volume 50, pp. 87-98.

<sup>9</sup> Copeland, T. E. & Galai, D., 1983. Information effects on the *bid-ask spread*. *Journal of Finance*, December, 38(5), pp. 1457-1469.

quanto detto, il *market maker* offre al mercato uno straddle composto da due opzioni *out-of-the money* poiché il *fair price* (secondo le informazioni possedute dal *market maker*) giace tra la quotazione *bid* e quella *ask*. Gli autori affermano che l'esercizio delle opzioni *out-of-the money* può essere motivato da due fattori:

- esigenze di liquidità;
- possesso di informazioni privilegiate.

Nel primo caso, il *market maker* si trova ad interagire con *liquidity trader* disposti a sopportare la perdita derivante dall'esercizio dell'opzione *out-of-the money* per beneficiare dell'immediatezza della transazione. Nel secondo caso, il *market maker* opera con *informed trader*, individui che hanno informazioni migliori delle sue e approfitteranno di ogni situazione in cui il *fair price* si sposta al di fuori della finestra creata dal *bid-ask spread*. Il *market maker* deve fissare lo *spread* in modo da minimizzare le perdite dovute alle transazioni che intercorrono con gli *informed trader* e, allo stesso tempo, massimizzare i profitti derivanti dalle negoziazioni effettuate con i *liquidity trader*.

Glosten and Milgrom<sup>10</sup> esaminano le proprietà del *bid-ask spread* in un mercato in cui vi è assenza di costi di transazione e omogeneità di aspettative sia tra i *market makers* che tra i *trader* presenti sul mercato. Anche in questo lavoro le categorie di individui sono i *liquidity trader* che agiscono per esigenze di liquidità e gli *informed trader* che operano soltanto se ci sono disallineamenti tra le loro aspettative ed i prezzi quotati. In tale contesto lo *spread* può aumentare se:

gli *informed trader* hanno informazioni privilegiate rispetto ai *liquidity trader*;

gli *informed trader* sono numericamente superiori ai *liquidity trader*;

aumenta l'elasticità di domanda ed offerta attese dai *liquidity trader* rispetto al prezzo del titolo.

Al limite, se il numero degli *informed trader* è molto maggiore rispetto ai *liquidity trader*, la quotazione *bid* sarebbe talmente bassa e quella *ask* talmente alta che non si avrebbero transazioni. Il mercato fallirebbe e tale situazione cesserebbe soltanto laddove gli *informed*

---

<sup>10</sup> Glosten, L. R. & Milgrom, P. R., 1985. *Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed trader*. *Journal of Financial Economics*, Marzo, 14(1), pp. 71-100.



*trader* uscissero dal mercato oppure i *liquidity trader* colmassero il gap informativo con i *trader* informati.

### Un modello per la stima dei prezzi *bid* ed *ask*.

#### Definizione del modello

In questo paragrafo analizzeremo il *bid-ask spread* utilizzando la teoria delle opzioni. Abbiamo già mostrato che i *limit order* possono essere visti come delle opzioni. In particolare un *limit order* in acquisto (vendita) può essere visto come un'opzione americana put (call) con prezzo d'esercizio pari al *bid* (*ask*). Pertanto, è come se il *market maker* vendesse al mercato uno straddle composto due opzioni out of the *money* il cui premio è rappresentato dalla differenza tra il *mid-price* (il prezzo medio tra *bid* ed *ask*) e lo strike price dell'opzione. Tale premio è incassato soltanto quando l'opzione viene esercitata dunque tali opzioni sono simili a delle *deferred premium option*. Il limite principale di tale impostazione consiste nel fatto che si devono fare delle assunzioni circa la *maturity* delle opzioni. I *limit order* possono infatti essere cancellati e ciò fa sì che la scadenza delle opzioni non sia fissa ma stocastica.

Un modo per superare tale problema è stato proposto da Chacko, Jurek e Stafford<sup>11</sup>. Al fine di preservare la trattabilità analitica gli autori hanno ipotizzato una particolare struttura di mercato che consente di calcolare i prezzi *bid* ed *ask* utilizzando variabili che possono essere osservate sul mercato.

Quando un trader immette un *limit order* di vendita con quantità  $Q$  ad un prezzo  $K$ , egli dà alla controparte la possibilità di acquistare ad un determinato prezzo una certa quantità di titoli. Il *limit order* di vendita può, dunque, essere visto come una call americana scritta su  $Q$  titoli. Analogamente, un *limit order* d'acquisto con quantità  $Q$  ad un prezzo  $K$  dà, alla controparte, la possibilità di vendere ad un determinato prezzo una certa quantità del titolo pertanto equivale ad una put americana scritta su  $Q$  titoli. Immettere un *limit order* equivale dunque a offrire un'opzione al mercato che cessa di esistere non appena

---

<sup>11</sup> Chacko, G. C., Jurek, J. W. & Stafford, E., 2008. The price of immediacy. *Journal of Finance*, Volume 3, pp. 1253-1289.

qualcuno la esercita. Affinché gli scambi avvengano immediatamente, chi scrive l'opzione deve stabilire un prezzo  $K$  tale da far sì che sia ottimale esercitare l'opzione immediatamente. Analizziamo meglio quest'aspetto. Il valore dell'opzione (*limit order*) ed il suo esercizio ottimale dipendono da tre fattori:

la struttura del mercato;

l'andamento del *fair price* del titolo;

il tasso d'arrivo degli ordini di segno opposto (misurato come numero di ordini/unità di tempo);

Questi tre elementi hanno una dinamica molto complessa e, al fine di preservare la trattabilità analitica del modello, sono state fatte delle ipotesi che riportiamo di seguito.

Il modello ipotizza che vi siano due categorie di agenti, entrambi con lo stesso set informativo: i *trader* ed il *market maker*. Il *market maker* fa da intermediario assicurando liquidità e facilitando gli scambi tra i *trader*. A differenza dei *trader*, il *market maker* ha la possibilità di avere continuamente accesso ad un *interdealer market* dove può coprire le sue posizioni effettuando gli scambi al *fair price*<sup>12</sup>. Si ipotizza un mercato in cui i *trader* hanno la possibilità di utilizzare soltanto dei *limit order* e sono alla ricerca di liquidità pertanto vogliono che l'ordine sia eseguito immediatamente. Si ipotizza inoltre che vi sia un'asimmetria tra l'arrivo degli ordini d'acquisto e quelli di vendita per un determinato prezzo. Possiamo affermare che il *market maker* ha una forza contrattuale nel fissare i prezzi *bid* ed *ask* per via della sua posizione privilegiata. Egli fornisce liquidità al mercato (è un *liquidity provider*) e riuscirà a fissare uno *spread* rispetto al *fair price* che sarà pagato dai *liquidity trader* in cambio dell'immediatezza della transazione. Infatti, affinché il *limit order* immesso dal trader (colui che scrive l'opzione) sia eseguito immediatamente, egli deve offrire al mercato un'opzione che sia sufficientemente *in-the-money* in modo da indurre il *market maker* ad esercitarla immediatamente. L'opzione scritta dal trader potrebbe essere esercitata anche da *limit order* di segno opposto (che arrivano, per ipotesi, in modo stocastico seguendo un processo di Poisson) pertanto soltanto il *market maker* può assicurare l'esecuzione immediata.

---

<sup>12</sup> Questa caratteristica è propria anche del modello proposto da Duffie, D., Gârleanu, N. & Pedersen, L. H., 2005. Over-the-counter Markets. *Econometrica*, Volume 73, pp. 1815-1847.

Gli ordini di segno opposto hanno il potere di far diminuire il numero delle transazioni poste in essere dal *market maker*, possono essere visti come una sorta di dividendo stocastico sul sottostante (la quantità  $Q$  di titoli) e creano un incentivo, per il *market maker*, all'esercizio anticipato. Il grado della forza contrattuale del *market maker* è, dunque, influenzato dall'intensità con cui arrivano gli ordini di segno opposto. Al limite, quando il tasso d'arrivo degli ordini di segno opposto (misurato come numero di ordini per unità di tempo) tende all'infinito la forza contrattuale del *market maker* scompare. La caratteristica peculiare di questo modello consiste nel fatto che quei prezzi che portano all'esercizio immediato dell'opzione rappresentano le quotazioni *bid* ed *ask* del *market maker*.

Il *fair price* segue, per ipotesi, un moto geometrico browniano del tipo:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (2.1)$$

dove  $\mu$  e  $\sigma^2$  rappresentano, rispettivamente, il tasso istantaneo di rendimento e la varianza del *fair price*, e  $dZ_t$  è un processo di Wiener standard.

L'impossibilità, per i *trader*, di rivolgersi all'*interdealer market* giustifica la presenza del *market maker* e del *bid-ask spread*. Da notare che, nonostante i *trader* non abbiano accesso all'*interdealer market*, possono scambiare tra di loro al *fair price* (prezzo medio tra *bid* ed *ask*) quando ordini di segno opposto giungono nel medesimo istante. In assenza di tale situazione, essi sono costretti a rivolgersi al *market maker* che comprerà (venderà) il titolo a sconto (premio).

Lo scopo principale del modello è fornire una spiegazione dei costi di transazione e, di conseguenza, della differenza tra il *fair price* ed il prezzo al quale il *market maker* è disposto ad eseguire un *limit order* con quantità pari a  $Q$ . Al fine di fornire tale spiegazione, diamo maggiori informazioni del meccanismo attraverso il quale i *limit order* sono esercitati.

Un *limit order* sarà indicato dalla sigla  $L^i(Q, K)$ .  $Q$  è la quantità specificata nell'ordine,  $K$  il prezzo e  $i$  indica il tipo ( $i=B$  per *buy*,  $i=S$  per *sell*). Come già brevemente accennato, i *limit order* possono essere esercitati dal *market maker* in qualsiasi istante precedente l'arrivo di un ordine di segno opposto con quantità pari a  $Q$ . L'arrivo degli ordini immessi dai *trader* è ipotizzato seguire un processo di Poisson con parametro  $\lambda^B(Q)$  oppure da  $\lambda^S(Q)$  a seconda che l'ordine sia d'acquisto o di vendita. Notiamo come tale parametro dipenda

dalla quantità  $Q$  perché tanto più la quantità dell'ordine è grande tanto più alto il valore assunto dal parametro. Per tale ipotesi, il tempo necessario affinché un ordine  $L^i(Q, K)$  sia assorbito dagli ordini di segno opposto segue una distribuzione esponenziale con media pari, rispettivamente, a  $[\lambda^B(Q)]^{-1}$  per  $i=S$  oppure  $[\lambda^S(Q)]^{-1}$  per  $i=B$ .

Per evitare l'analisi dell' *order book* si è ipotizzato che i tutti i *trader* abbiano bisogno di liquidità pertanto immettono soltanto ordini che siano immediatamente esercitabili dal *market maker*. Al fine di indurre il *market maker* all'esercizio anticipato, il trader deve scrivere un'opzione che sia sufficientemente *in-the-money*. Bisogna dunque determinare i prezzi che inducono l'esercizio immediato dell'opzione e per farlo è necessario valutare tale opzione. Abbiamo bisogno di tre elementi:

il tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ ;

la volatilità del titolo,  $\sigma$ ;

il tasso al quale arrivano ordini di segno opposto,  $\lambda^i(Q)$  che è a sua volta una funzione della quantità  $Q$ .

Si definiscono  $K_B(Q)$  e  $K_A(Q)$  i prezzi che assicurano una transazione immediata di  $Q$  titoli, rispettivamente in acquisto ed in vendita dal punto di vista del *market maker* e sono equivalenti alle quotazioni dei prezzi *bid* ed *ask*. Segue che lo *strike price* per il quale risulta ottimale esercitare immediatamente un *limit order* di vendita (acquisto) su  $Q$  azioni rappresenta la quotazione *bid* (*ask*) per il quantitativo  $Q$ . Per come è stato descritto il modello, possiamo valutare i *limit order* come se fossero delle opzioni perpetue superando uno dei limiti del modello di Copeland e Galai che invece necessitavano la stima della *maturity* dei *limit order*. Ciò è reso possibile dal fatto che i *trader* sono tutti alla ricerca di liquidità (*liquidity seeking*) pertanto immettono ordini che verranno immediatamente eseguiti. Per quanto detto, l'opzione da valutare è un'opzione perpetua il cui sottostante paga un dividendo stocastico rappresentato dal numero di transazioni eseguite da ordini di segno opposto. Dal momento che le opzioni americane sono una funzione monotona crescente del tempo mancante alla scadenza, i costi di transazione calcolati da tale modello dovrebbero essere i massimi possibili.

Il dividendo rappresentato dal numero di transazioni eseguite da ordini di segno opposto è un elemento fondamentale del modello perché induce il *market maker* monopolista ad esercitare anticipatamente l'opzione e chiarisce anche la sua funzione di *liquidity provider*.

Forniamo ora le formule per la valutazione dei *limit order*<sup>13</sup>. Definiamo  $L(V_t, Q, K)$  il valore di un *limit order* al tempo  $t$  per una quantità  $Q$  e con uno *strike price* pari a  $K$ . Date le assunzioni poste finora,  $L(V_t, Q, K, t)$  avrà il seguente moto:

$$dL(V_t, Q, K) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\pi(t, t + \Delta t) \cdot (L(V_{t+\Delta t}, Q, K) - L(V_t, Q, K)) + (1 - \pi(t, t + \Delta t)) \cdot (0 - L(V_t, Q, K))] \quad 2.2$$

dove  $\pi(t, t + \Delta t)$  rappresenta la probabilità che il *limit order* non venga esercitato nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Utilizzando il lemma di Ito e ricordando che gli ordini arrivano seguendo un processo di Poisson possiamo giungere alla seguente equazione differenziale ordinaria di secondo grado:

$$L_F \cdot (rF_{Q,t}) + \frac{1}{2} L_{FF} \cdot (\sigma F_{Q,t})^2 - (r + \lambda^i(Q)) \cdot L = 0 \quad 2.3$$

al fine di non appesantire la notazione abbiamo sostituito il solo  $L$  al posto di  $L(\cdot)$ . Inoltre,  $F_{Q,t} (= Q \cdot V_t)$  rappresenta il *fair price* di  $Q$  titoli,  $\lambda^i(Q)$  rappresenta la probabilità istantanea che arrivi un ordine di segno opposto con quantità pari a  $Q$ . I pedici nell'equazione indicano le derivate parziali. Quest'equazione avrà una soluzione analitica che avrà la seguente forma:

$$L = A \cdot F_{Q,t}^\gamma \quad 2.4$$

Ciò implica che  $L_F$  dovrà esser pari a:

$$L_F = \gamma \cdot A \cdot F_{Q,t}^{\gamma-1} \quad 2.5$$

e  $L_{FF}$  dovrà esser pari a:

---

<sup>13</sup> Le formule qui presentate sono ottenute seguendo la valutazione delle opzioni americane perpetue proposta da Barone; Barone, G., 2010. European Compound Options Written on Perpetual American Options. *Working Paper*, November.

$$L_{FF} = \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot A \cdot F_{Q,t}^{\gamma-2} \quad 2.6$$

Pertanto, sostituendo le equazioni 2.5 e 2.6 nella 2.3 otterremo:

$$\gamma \cdot A \cdot F_{Q,t}^{\gamma} \cdot r + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) \cdot A \cdot F_{Q,t}^{\gamma} \cdot \sigma^2 - (r + \lambda^i(Q)) \cdot A \cdot F_{Q,t}^{\gamma} = 0 \quad 2.7$$

Dall'equazione 2.7 possiamo ricavare l'equazione caratteristica (ipotizzando  $A \cdot F_{Q,t}^{\gamma}$  diverso da zero):

$$A \cdot F_{Q,t}^{\gamma} \left[ \frac{1}{2} \gamma^2 \cdot \sigma^2 + \gamma \cdot \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - (r + \lambda^i(Q)) \right] = 0 \quad 2.8$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono le seguenti:

$$\gamma_1 = \frac{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2(r + \lambda^i(Q))}}{\sigma^2} \quad 2.9$$

$$\gamma_2 = \frac{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2(r + \lambda^i(Q))}}{\sigma^2} \quad 2.10$$

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono funzioni monotone crescenti nella volatilità. È possibile mostrare che, al variare della volatilità, si ha sempre che  $\gamma_1 \geq 1$  e  $-\infty \leq \gamma_2 \leq 0$ .

Avendo due soluzioni dall'equazione caratteristica, avremo due soluzioni all'equazione 2.3:

$$L_1 = A_1 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_1} \quad \text{e} \quad L_2 = A_2 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_2} \quad 2.11$$

Dove  $A_1$  e  $A_2$  sono 2 costanti. In realtà, noi vogliamo un' unica soluzione generale. Si nota che se  $L_1$  e  $L_2$  soddisfano l'equazione 2.3 allora anche  $L_1 + L_2$  soddisfa la 2.3. Pertanto la nostra soluzione generale sarà:

$$L_1 = A_1 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_1} + A_2 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_2} \quad 2.12$$

Per passare dalla soluzione generale a quella particolare abbiamo bisogno di tre condizioni al contorno che differiscono a seconda che si tratti di un *limit order* di vendita o d'acquisto.

Analizziamo dapprima il caso di un *limit order* di vendita (definito dall'apice S), le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$L^S(0, Q, K) = 0 \quad 2.13$$

$$L^S(V^*, Q, K) = Q \cdot (V^* - K) \quad 2.14$$

$$L^S_F(V^*, Q, K) = 1 \quad 2.15$$

Dove  $V^*$  indica il valore di  $V$  al quale è ottimale l'esercizio anticipato della call sottostante il *limit order*. La prima condizione (equazione 2.13) impone che il valore del *limit order* sia nullo quando il prezzo del titolo sottostante è pari a zero. Analizzando l'opzione sottostante, tale condizione ci dice che il valore dell'opzione call deve diventare nullo al tendere di  $V_t$  (*fair price* del sottostante) a zero. Imponendo all'equazione 2.12 di soddisfare la condizione imposta dalla 2.13 otteniamo che:

$$L^S(0, Q, K) = A_1 \cdot 0^{\gamma_1} + A_2 \cdot 0^{\gamma_2} = 0 \quad 2.16$$

Ed essendo  $\gamma_2 \leq 0$ , si deve necessariamente avere che  $A_2 = 0$ . Pertanto la soluzione particolare dovrà avere la seguente forma:

$$L^S(V_t, Q, K) = A_1 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_1} = A_1 \cdot (Q \cdot V_t)^{\gamma_1} \quad 2.17$$

Il secondo vincolo impone che l'opzione call *at the money* abbia un valore pari al suo valore intrinseco. Imponendo tale vincolo (equazione 2.14) all'equazione 2.17 abbiamo che:

$$Q \cdot (V^* - K) = A_1 \cdot (Q \cdot V^*)^{\gamma_1} \quad 2.18$$

Da cui possiamo ricavare  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{Q \cdot (V^* - K)}{(Q \cdot V^*)^{\gamma_1}} = Q^{1-\gamma_1} \cdot \frac{(V^* - K)}{(V^*)^{\gamma_1}} \quad 2.19$$

Sostituendo l'equazione 2.19 nella 2.17 e facendo le opportune semplificazioni, otteniamo una soluzione particolare che ha la seguente forma:

$$L^S(V_t, Q, K) = Q \cdot (V^* - K) \cdot \left(\frac{V_t}{V^*}\right)^{\gamma_1} \quad 2.20$$

Imponiamo ora il terzo vincolo (equazione 2.15). A tal fine è necessario calcolare la derivata prima del *limit order* rispetto a  $F_{Q,t}$ :

$$L^S_F(V_t, Q, K) = \gamma_1 \cdot Q^{1-\gamma_1} \cdot \frac{(V^* - K)}{(V^*)^{\gamma_1}} \cdot F_{Q,t}^{\gamma_1-1} = \gamma_1 \cdot \frac{(V^* - K)}{(V^*)^{\gamma_1}} \cdot V_t^{\gamma_1-1} \quad 2.21$$

Imponendo che tale derivata rispetti il vincolo imposto dall'equazione 2.15 si ha che:

$$\gamma_1 \cdot \frac{(V^* - K)}{(V^*)^{\gamma_1}} \cdot (V^*)^{\gamma_1-1} = 1 \quad 2.22$$

Dall'equazione 2.22 possiamo ricavare  $V^*$ :

$$V^* = K \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \quad 2.23$$

Pertanto, la soluzione che ci fornisce il valore di un *limit order* di vendita sarà:

$$\begin{cases} L^S(V_t, Q, K) = Q \cdot (V^* - K) \cdot \left(\frac{V_t}{V^*}\right)^{\gamma_1} & \text{se } V_t < V^* \\ L^S(V_t, Q, K) = Q \cdot (V_t - K) & \text{se } V_t \geq V^* \end{cases} \quad 2.24$$

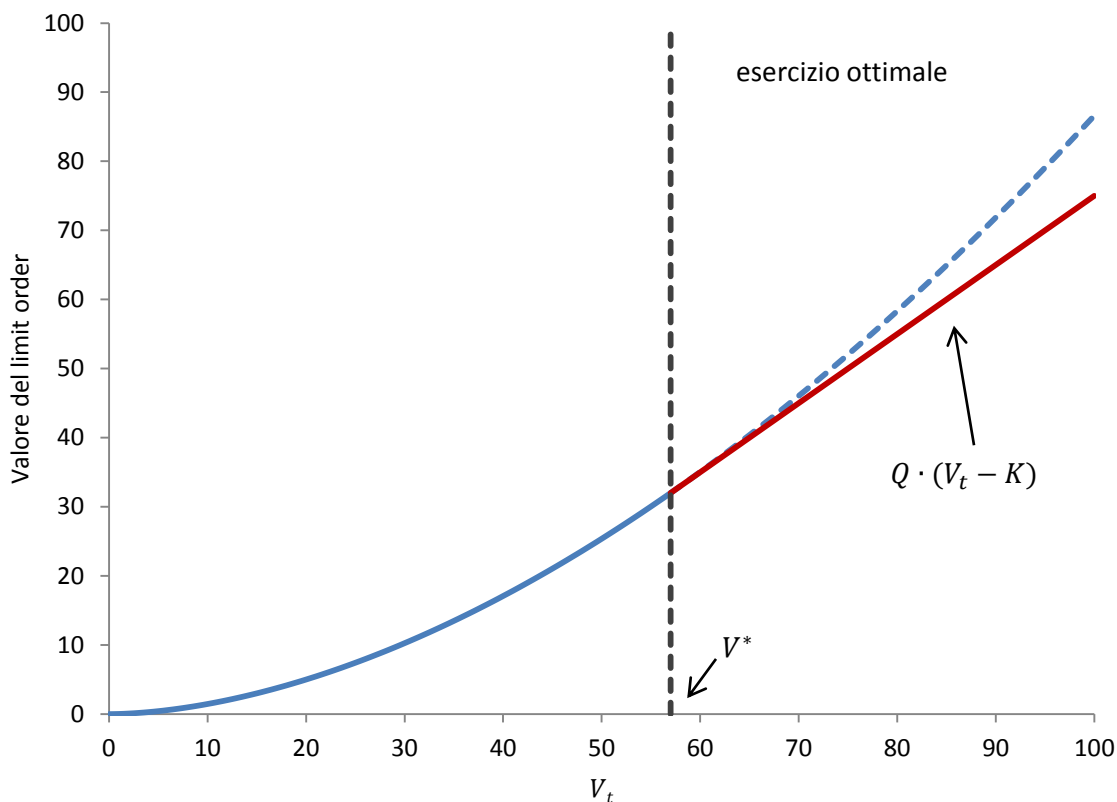
Con  $V^*$  e  $\gamma_1$  calcolati, rispettivamente, come mostrato dalle equazioni 2.23 e 2.9. La Figura 6 mostra il valore del *limit order* di vendita al variare di  $V_t$ .

Affinché il *limit order* di vendita sia eseguito immediatamente dal *market maker*, è necessario fissare un prezzo  $K$  tale che il valore attuale del titolo,  $V_t$ , risulti essere pari al valore soglia,  $V^*$ . In altri termini, affinché l'opzione sia esercitata immediatamente, colui che la scrive deve scegliere uno *strike price* tale da rendere nullo il valore temporale. Questo *strike price* individua la quotazione *bid* che definiremo come  $K_B$ . La differenza tra  $V_t$  e  $K_B$  ci fornisce il valore di un'opzione che è esercitabile immediatamente e rappresenta anche il costo per l'immediatezza sostenuto dal *trader* per un quantitativo di titoli pari a  $Q$ . Per quanto detto, l'equazione 2.23 diventa:

$$V^* = V_t = K_B(Q) \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \quad 2.25$$



**Figura 6. Valore di un *limit order* di vendita.** La Figura 6 è stata ottenuta utilizzando l'equazione 24 con i seguenti dati:  $Q=1$ ,  $r=5\%$ ,  $\sigma=30\%$ ,  $K=25$  e  $\lambda^B=0,1$ .



Notiamo come l'equazione 2.25 sia uguale alla 2.23. Tuttavia, mentre nella 2.23 l'incognita era  $V^*$ , nell'equazione 2.25 l'incognita è  $K_B(Q)$  che sarà pari a:

$$K_B(Q) = V_t \cdot \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \tag{2.26}$$

Notiamo come la quotazione *bid* sia funzione di  $\gamma_1$  che, a sua volta è funzione di  $\lambda^B$  e  $Q$ . Dall'equazione 2.26 possiamo anche calcolare il costo dell'immediatezza come percentuale di  $V_t$ :

$$\frac{K_B(Q) - V_t}{V_t} = -\frac{1}{\gamma_1} \tag{2.27}$$

Analizziamo ora il caso di un *limit order* d'acquisto (definito dal pedice  $B$ ), le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$L^B(\infty, Q, K) = 0 \quad 2.28$$

$$L^B(V^{**}, Q, K) = Q \cdot (K - V^{**}) \quad 2.29$$

$$L^B_F(V^{**}, Q, K) = 1 \quad 2.30$$

Dove  $V^*$  indica il valore di  $V$  al quale è ottimale l'esercizio anticipato della put sottostante il *limit order*. La prima condizione (equazione 2.28) impone che il valore del *limit order* sia nullo quando il prezzo del titolo sottostante tende all'infinito. Analizzando l'opzione sottostante, tale condizione ci dice che il valore dell'opzione put deve diventare nullo al tendere di  $V_t$  (*fair price* del sottostante) all'infinito. Imponendo all'equazione 2.12 di soddisfare la condizione imposta dalla 2.28 otteniamo che:

$$L^B(\infty, Q, K) = A_1 \cdot \infty^{\gamma_1} + A_2 \cdot \infty^{\gamma_2} = 0 \quad 2.31$$

Ed essendo  $\gamma_1 \geq 1$ , si deve necessariamente avere che  $A_1 = 0$ . Pertanto la soluzione particolare dovrà avere la seguente forma:

$$L^B(V_t, Q, K) = A_2 \cdot F_{Q,t}^{\gamma_2} = A_2 \cdot (Q \cdot V_t)^{\gamma_2} \quad 2.32$$

Il secondo vincolo impone che l'opzione put *at the money* abbia un valore pari al suo valore intrinseco. Imponendo tale vincolo (equazione 2.29) all'equazione 2.32 abbiamo che:

$$Q \cdot (K - V^{**}) = A_2 \cdot (Q \cdot V^{**})^{\gamma_2} \quad 2.33$$

Da cui possiamo ricavare  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{Q \cdot (K - V^{**})}{(Q \cdot V^{**})^{\gamma_2}} \quad 2.34$$

Sostituendo l'equazione 2.34 nella 2.32 e facendo le opportune semplificazioni, otteniamo una soluzione particolare che ha la seguente forma:

$$L^B(V_t, Q, K) = Q \cdot (K - V^{**}) \cdot \left(\frac{V_t}{V^{**}}\right)^{\gamma_2} \quad 2.35$$

Imponiamo ora il terzo vincolo (equazione 2.30). A tal fine è necessario calcolare la derivata prima del *limit order* rispetto a  $F_{Q,t}$ :

$$L^B_F(V_t, Q, K) = \gamma_2 \cdot Q^{1-\gamma_2} \cdot \frac{(K - V^{**})}{(V^{**})^{\gamma_2}} \cdot F_{Q,t} \gamma_2^{-1} = \gamma_2 \cdot \frac{(K - V^{**})}{(V^{**})^{\gamma_2}} \cdot V_t^{\gamma_2-1} \quad 2.36$$

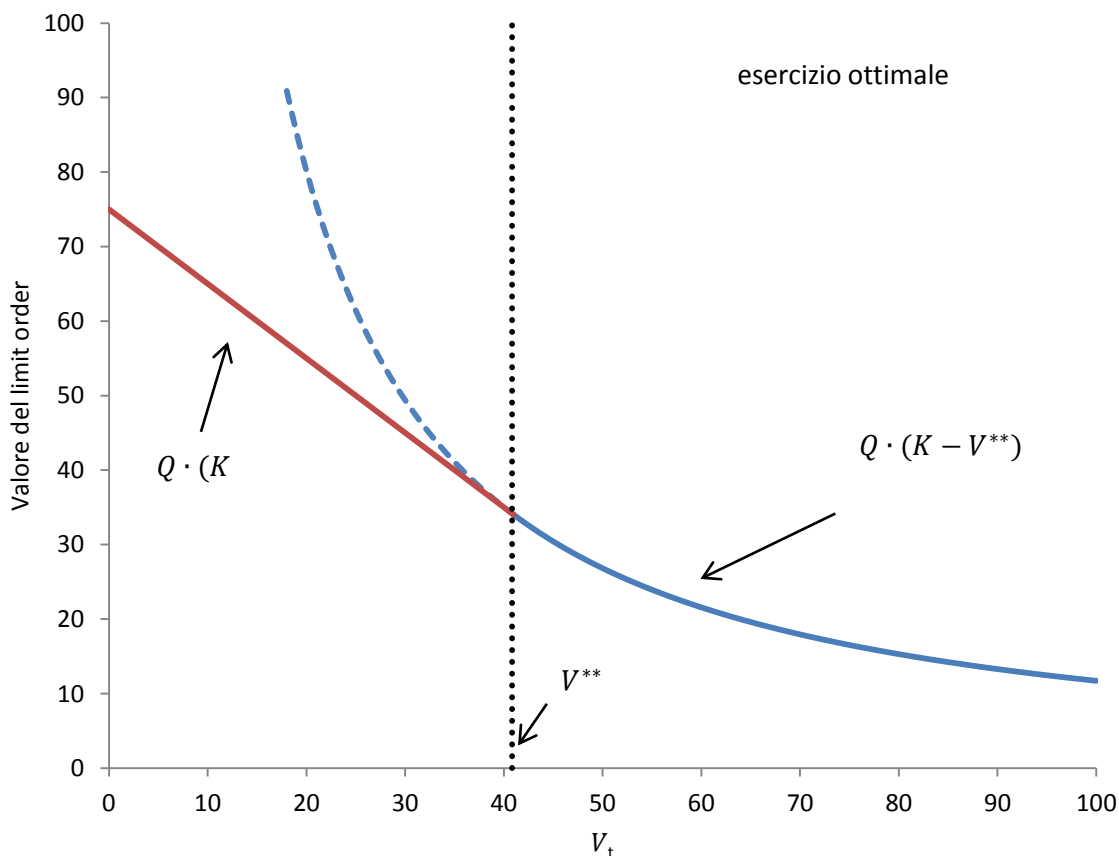
Imponendo che tale derivata rispetti il vincolo imposto dall'equazione 2.30 si ha che:

$$\gamma_2 \cdot \frac{(K - V^{**})}{(V^{**})^{\gamma_2}} \cdot (V^{**})^{\gamma_2-1} = 1 \quad 2.37$$

Dall'equazione 2.37 possiamo ricavare  $V^{**}$ :

$$V^{**} = K \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \quad 2.38$$

**Figura 7. Valore di un limit order d'acquisto.** La Figura 7 è stata ottenuta utilizzando l'equazione 2.39 con i seguenti dati:  $Q=1$ ,  $r=5\%$ ,  $\sigma=40\%$ ,  $K=75$  e  $\lambda^S=0,1$ .



Pertanto, la soluzione che ci fornisce il valore di un *limit order* d'acquisto sarà:

$$\begin{cases} L^B(V_t, Q, K) = Q \cdot (K - V^{**}) \cdot \left(\frac{V_t}{V^{**}}\right)^{\gamma_2} & \text{se } V_t > V^* \\ L^B(V_t, Q, K) = Q \cdot (K - V^{**}) & \text{se } V_t \leq V^* \end{cases} \quad 2.39$$

Con  $V^{**}$  e  $\gamma_2$  calcolati, rispettivamente, come mostrato dalle equazioni 2.38 e 2.10. La Figura 7 mostra il valore del *limit order* d'acquisto al variare di  $V_t$ .

Affinché il *limit order* di acquisto sia eseguito immediatamente dal *market maker*, è necessario fissare un prezzo  $K$  tale che il valore attuale del titolo,  $V_t$ , risulti essere pari al valore soglia,  $V^{**}$ . In altri termini, affinché l'opzione sia esercitata immediatamente, colui che la scrive deve scegliere uno *strike price* tale da renderne nullo il valore temporale. Questo *strike price* individua la quotazione *ask* che definiremo come  $K_A$ . La differenza tra  $K_A$  e  $V_t$  ci fornisce il valore di un'opzione che è esercitabile immediatamente e rappresenta anche il costo per l'immediatezza sostenuto dal *trader* per un quantitativo di titoli pari a  $Q$ . Per quanto detto, l'equazione 2.38 diventa:

$$V^{**} = V_t = K_A(Q) \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \quad 2.40$$

Notiamo come l'equazione 2.40 sia uguale alla 2.38. Tuttavia, mentre nella 2.38 l'incognita era  $V^{**}$ , nell'equazione 2.40 l'incognita è  $K_A(Q)$  che sarà pari a:

$$K_A(Q) = V_t \cdot \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \quad 2.41$$

Notiamo come la quotazione *ask* sia funzione di  $\gamma_2$  che, a sua volta è funzione di  $\lambda^S$  e  $Q$ . Dall'equazione 2.41 possiamo anche calcolare il costo dell'immediatezza come percentuale di  $V_t$ :

$$\frac{K_A(Q) - V_t}{V_t} = -\frac{1}{\gamma_2} \quad 2.42$$

Le relazioni esposte nelle equazioni 2.9 e 2.10 possono essere semplificate laddove  $\lambda^i(Q) \gg r$  (il parametro  $\lambda^i(Q)$  è largamente superiore al tasso d'interesse privo di rischio). In particolare la formula per il calcolo di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  può essere così approssimata:

$$\gamma_1 \approx +\frac{\sqrt{2\lambda^B(Q)}}{\sigma} \quad \text{e} \quad \gamma_2 \approx -\frac{\sqrt{2\lambda^S(Q)}}{\sigma} \quad 2.43$$

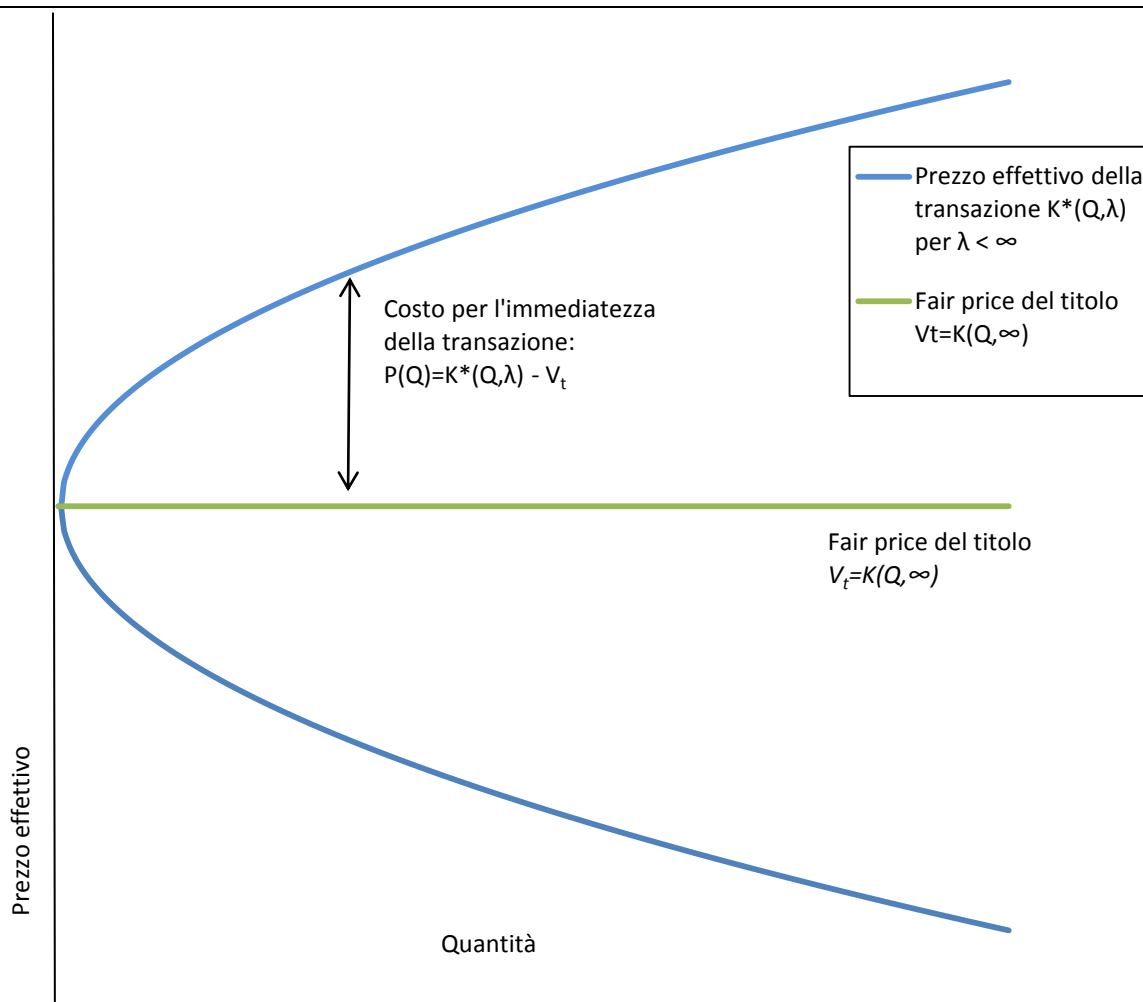
Pertanto, secondo il modello, il costo per l'immediatezza espresso come percentuale del *fair price* del titolo sottostante sarà approssimativamente proporzionale a  $[\lambda^i(Q)]^{-1/2}$  (la radice quadrata del tempo necessario affinché un ordine  $L^i(Q,K)$  sia assorbito dagli ordini di segno opposto). Inoltre, il costo per l'immediatezza converge a zero al tendere di  $\lambda^i(Q)$  a infinito. La probabilità istantanea che arrivi un ordine di segno opposto  $[\lambda^i(Q)]$  è, a sua volta funzione di  $Q$ . Ipotizzando che il tempo medio affinché un *limit order* con quantità pari a  $Q$  sia assorbito da ordini di segno opposto è pari a  $Q$  volte il tempo necessario per l'assorbimento di un *limit order* con quantità pari ad 1, allora  $\lambda^i(Q) = \lambda^i(1) \cdot Q$ .

Ciò implica che il costo per l'immediatezza espresso come percentuale del *fair price* del titolo sarà approssimativamente proporzionale alla radice quadrata di  $Q$  come mostra la seguente relazione:

$$P(Q) \approx \sigma \sqrt{\frac{Q}{\lambda^i(1)}} \quad 2.44$$

La Figura 8 mostra la differenza tra il *fair price* ed i prezzi effettivi delle transazioni come prevista dal modello qui descritto.

**Figura 8. Il costo dell'immediatezza.** Questa figura mostra la relazione tra i prezzi effettivi delle transazioni e la quantità  $Q$ . Inoltre, mostra la differenza tra il caso in cui  $\lambda$  è finito e quello in cui è pari a infinito. Si nota che quando  $\lambda$  è infinito si ha la perfetta uguaglianza tra *fair price* e prezzo effettivo della transazione.



### Caratteristiche del modello

Il modello appena descritto permette la definizione delle quotazioni dei prezzi *bid* ed *ask*.

Le variabili principali che portano ad una modifica di tali quotazioni sono due:

la volatilità del sottostante;

il tasso al quale arrivano gli ordini di segno opposto.

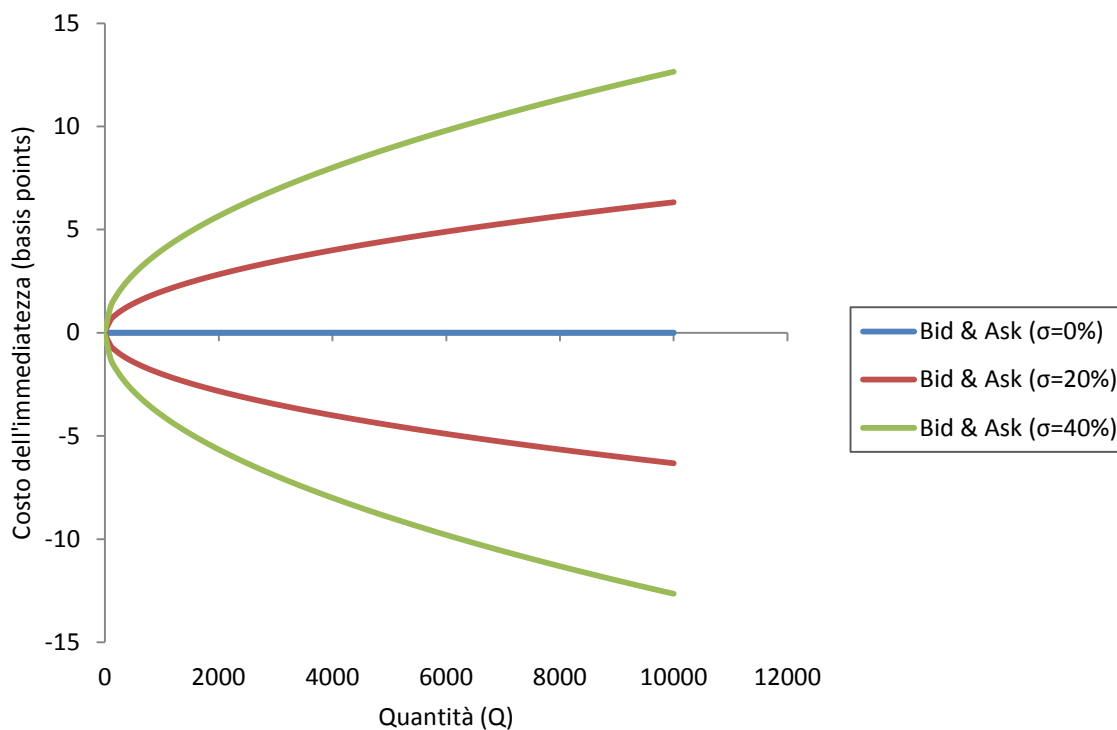
Il *bid-ask spread*, secondo quanto previsto dal modello, aumenta all'aumentare della volatilità del sottostante. Ciò è in linea con quanto mostrato da altri autori [ (Demsetz,

1968) e (Ho & Stoll, 1981) ] ed è intuitivamente coerente dal punto di vista economico. Infatti, se un *market maker* acquista un titolo per soddisfare l'esigenza di liquidità di un *trader*, egli sarà esposto a movimenti al ribasso del prezzo del titolo. Dal momento che un aumento della volatilità fa aumentare la probabilità di tali movimenti avversi, è lecito attendersi un *bid-ask spread* maggiore. Il modello presentato è basato sulle opzioni e, come è noto, il valore delle opzioni è funzione crescente della volatilità. Tale proprietà induce il *market maker* a modificare il prezzo ottimale per l'esercizio dell'opzione al variare della volatilità. In particolare, maggiore è la volatilità, maggiore sarà il valore dell'opzione e maggiore dovrà essere la differenza tra lo *strike price* e il *fair price* del titolo affinché il *market maker* eserciti immediatamente l'opzione. Casi degeneri sono quelli in cui la volatilità approssima lo zero oppure l'infinito. Se la volatilità tende a zero, le opzioni a disposizione del *market maker* hanno tutte valore nullo dunque non è richiesto alcun premio/sconto per l'esercizio delle stesse (si veda la Figura 9). Quando invece la volatilità del titolo tende all'infinito, il valore dell'opzione implicita in un *limit order* di vendita con *strike*  $K$  e quantità pari a  $Q$  tende ad un valore pari a  $Q$  volte il *fair price* del titolo. In modo analogo, l'opzione implicita in un *limit order* d'acquisto con *strike*  $K$  e quantità pari a  $Q$  tende ad un valore pari a  $Q$  volte  $K$ . Affinchè il *market maker* eserciti l'opzione, quest'ultima deve essere *in-the-money* pertanto il costo dell'immediatezza, stimato dal modello, sarà pari al 100%.

Altro elemento importante nella determinazione dei prezzi *bid* ed *ask* è il tasso al quale arrivano gli ordini di segno opposto. Quando tale tasso aumenta, è lecito attendersi una diminuzione del tempo d'attesa necessario affinché un *limit order* sia eseguito da ordini di segno opposto. Nel caso in cui il tasso fosse pari all'infinito (situazione di mercato perfetto), il tempo d'attesa necessario affinché l'ordine sia eseguito da ordini di segno opposto sarebbe pari a zero.

Nella realtà, tuttavia, tale tasso è finito e quando un individuo vuole effettuare una transazione in modo immediato è disposto a sostenere un costo (in termini di *bid-ask spread*) per trasferire il tempo d'attesa al *market maker*. Il modello qui presentato affronta questa problematica come mostrano le equazioni 2.9 e 2.10.

**Figura 9. Costo dell'immediatezza al variare della volatilità.** La figura mostra come variano i prezzi *Bid* ed *Ask* al variare della volatilità. L'asse principale rappresenta il *fair price* del titolo sottostante. Si nota come all'aumentare della volatilità ci sia un aumento dei prezzi *ask* ed una diminuzione di quelli *bid* che conduce ad un ampliamento dello *spread*.



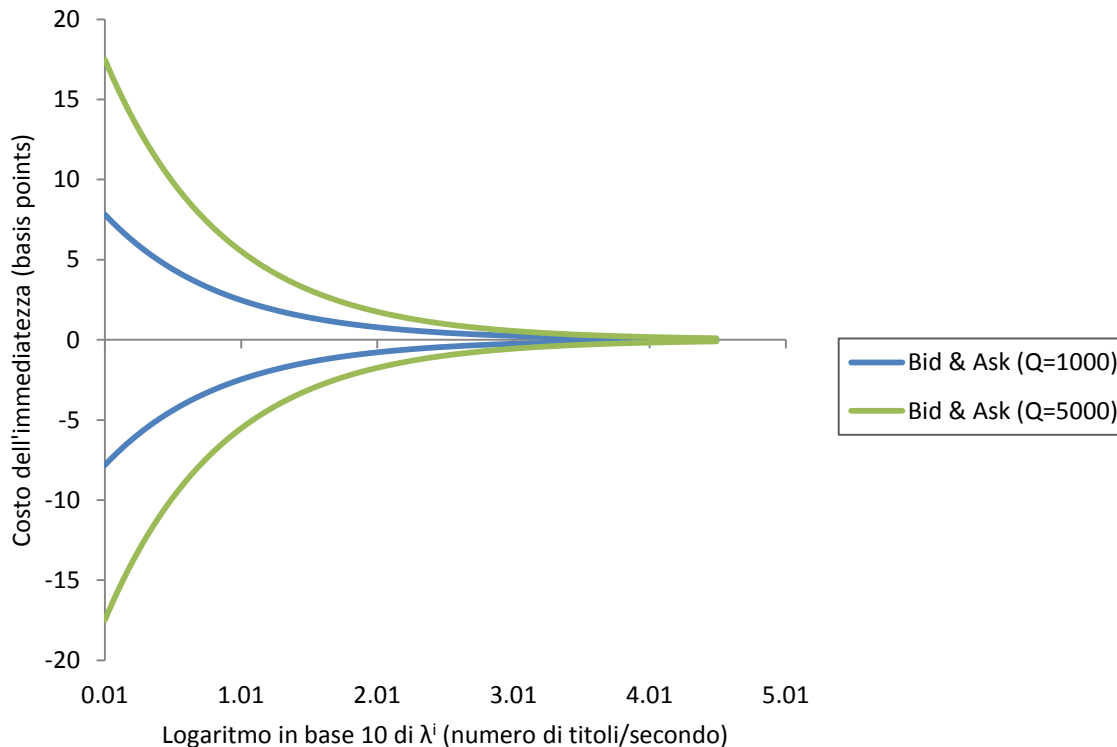
È come se il tasso al quale arrivano gli ordini d'acquisto (vendita) determina il tempo necessario affinché l'opzione scritta da un venditore (compratore) sia esercitata. Un aumento del tasso d'arrivo degli ordini d'acquisto (vendita) fa diminuire il tempo necessario per l'esercizio dell'opzione scritta dal venditore (compratore) comportando un tasso *bid* (*ask*) più alto (basso). Infatti, quando aumenta il tasso al quale arrivano gli ordini di segno opposto, il *market maker* si trova ad agire in una situazione di maggiore competitività ed è, pertanto, indotto a richiedere uno sconto/premio minore. Di conseguenza, il *bid-ask spread* diminuisce. In un mercato perfetto dove la liquidità è infinita ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), il *market maker* si trova in una situazione di concorrenza perfetta pertanto il *bid-ask spread* approssima lo zero (si veda la Figura 10). D'altro canto, quando un mercato diventa man mano sempre meno liquido ( $\lambda \rightarrow 0$ ), lo *spread* richiesto dal *market maker* aumenta progressivamente. Nel caso limite in cui  $\lambda=0$ , il *market maker* è l'unico *liquidity provider* ed il



mercato “crolla” completamente. Infatti, essendo il *market maker* in una situazione di monopolio (non solo perché non ci sono altri dealer ma anche perché non ci sono ordini di segno opposto), allora avremmo un *market failure* perché il *market maker* fisserà un prezzo *bid* prossimo allo zero ed un prezzo *ask* molto superiore al *fair price* del titolo.

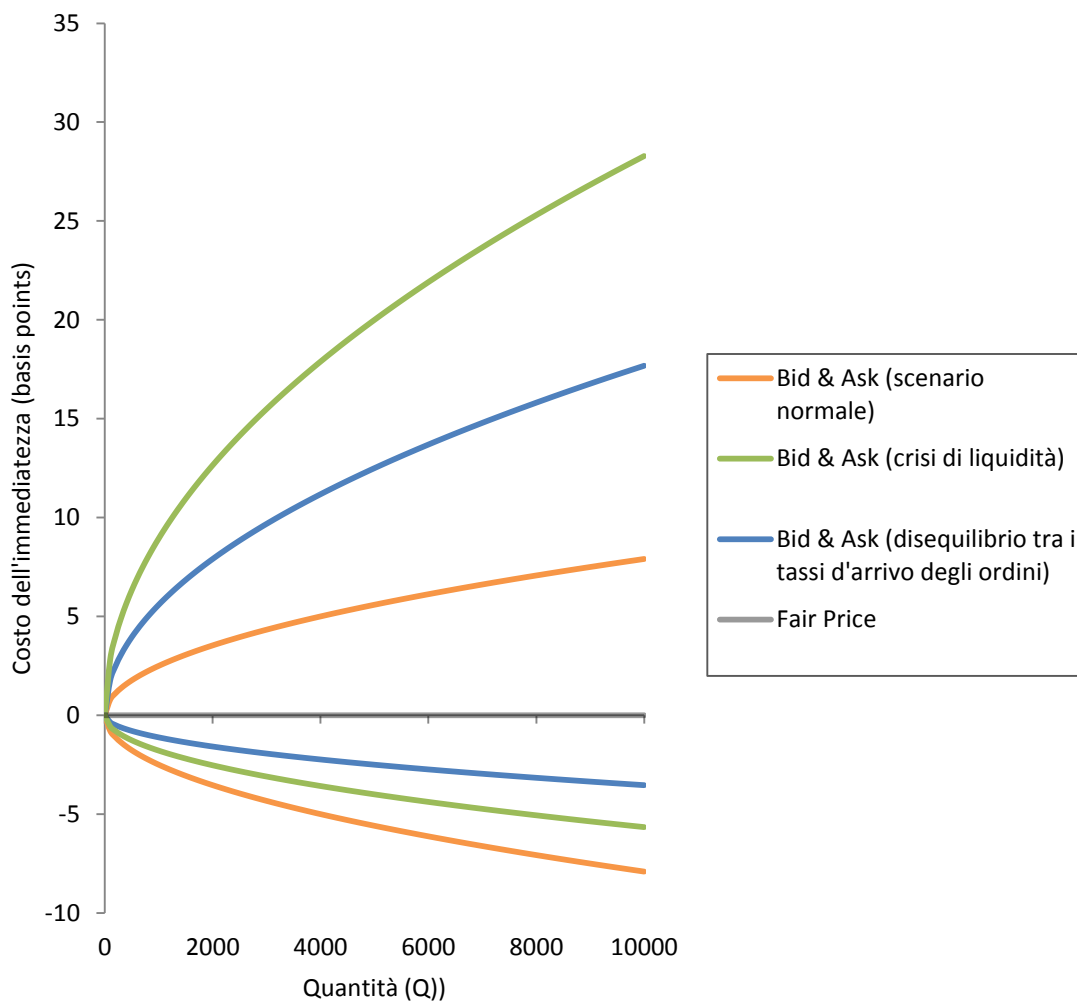
Finora abbiamo descritto cosa accade alle quotazioni *bid* ed *ask* quando ci sono delle modifiche al tasso al quale arrivano gli ordini di segno opposto ipotizzando che esso sia uguale sia per gli acquisti che per le vendite. È interessante analizzare cosa accade quando tali modifiche avvengono in modo asimmetrico. Cosa accade, per esempio, quando il tasso d'arrivo degli ordini d'acquisto cresce e quello degli ordini di vendita diminuisce? Quando si verifica questa situazione è come se diminuisse il tempo atteso affinché l'opzione scritta dal venditore sia esercitata mentre aumentasse quello dell'opzione scritta dal compratore. Un *trader* che voglia acquistare riconosce che si necessiterà di più tempo per portare a termine l'operazione attraverso transazioni con *trader* disposti a vendere dunque, sarà pronto a riconoscere un premio maggiore al *market maker*. Viceversa chi voglia vendere riconosce che sarà più facile portare a termine l'operazione attraverso transazioni con *trader* disposti ad acquistare dunque, sarà pronto a riconoscere uno sconto minore al *market maker*. Ciò porta ad avere sia una quotazione *bid* che una *ask* più alta rispetto a quelle che si avrebbero in una situazione di normalità (il tasso d'arrivo degli ordini d'acquisto è uguale a quello degli ordini di vendita). In un tale scenario la media tra i prezzi *bid* ed *ask* (*midprice*) risulterà essere uno stimatore distorto del *fair price*. Lo scenario descrive bene una situazione in cui la liquidità sul lato *ask* del *book* comincia a mancare e mostra come ciò sia dovuto ad un disequilibrio tra i tassi d'arrivo degli ordini. Si assiste ad una vera e propria crisi di liquidità quando, oltre ad avere un disequilibrio tra i tassi d'arrivo degli ordini, assistiamo anche ad un aumento della volatilità.

**Figura 10. Costo dell'immediatezza in funzione del tasso di arrivo degli ordini di segno opposto.** La figura mostra il costo per l'immediatezza espresso come percentuale del *fair price* del titolo in funzione del tasso al quale arrivano gli ordini di segno opposto ( $\lambda^i$ ). I parametri utilizzati per ottenere tale grafico sono:  $r = 2\%$  ;  $\sigma = 25\%$ . L'asse delle X rappresenta il logaritmo in base 10 di  $\lambda^i$ .

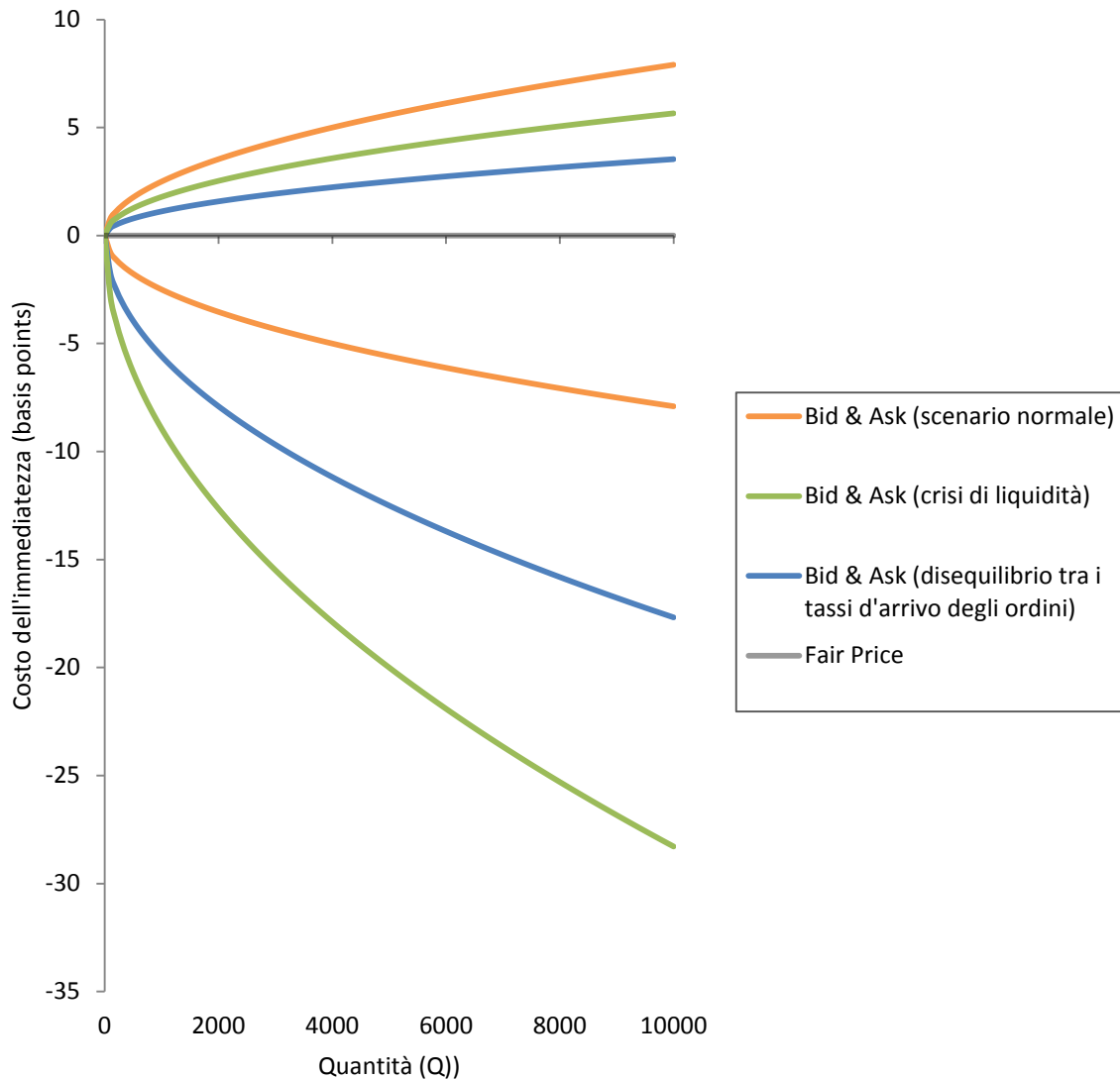


In questo caso, considerando lo scenario prima descritto, la situazione per il compratore peggiorerà ulteriormente inducendolo a dover accettare una quotazione *ask* ben lontana da quella che si avrebbe in una situazione di normalità. Il venditore vedrebbe la quotazione *bid* diminuire rispetto al caso in cui vi sia soltanto uno squilibrio tra i tassi d'arrivo degli ordini, tuttavia, la quotazione resta comunque favorevole rispetto allo scenario di normalità. La Figura 11 mostra le modifiche che intervengono ai prezzi *bid* ed *ask*, in funzione della quantità, quando si ha una crisi di liquidità sul lato *ask* del *book*. Analogamente possiamo ripetere quanto appena descritto per il lato *ask* anche per il lato *bid* del *book* (si veda la Figura 12).

**Figura 11. Costo dell'immediatezza durante una crisi di liquidità sul lato ask del book.** La figura mostra il costo dell'immediatezza in funzione della quantità. Nello scenario normale  $\lambda^i$  è stato posto pari a 10, il tasso privo di rischio è stato posto pari al 2% e la volatilità del sottostante pari al 25%. Nello scenario in cui si ha solo un disequilibrio tra i tassi d'arrivo degli ordini, la volatilità è stata lasciata invariata,  $\lambda^s$  è stato fatto aumentare di 5 volte mentre  $\lambda^b$  è stato fatto diminuire anch'esso di 5 volte. Nel caso della crisi di liquidità, le variazioni sui tassi  $\lambda^i$  sono le stesse dello scenario con disequilibrio tra gli ordini, la volatilità è stata fatta aumentare ad un livello del 40%. Questa situazione descrive una crisi di liquidità ma solo per coloro che voglio acquistare, i venditori riusciranno ad ottenere prezzi migliori rispetto allo scenario di normalità.



**Figura 12. Costo dell'immediatezza durante una crisi di liquidità sul lato *bid* del *book*.** La figura mostra il costo dell'immediatezza in funzione della quantità. Nello scenario normale  $\lambda^i$  è stato posto pari a 10, il tasso privo di rischio è stato posto pari al 2% e la volatilità del sottostante pari al 25%. Nello scenario in cui si ha solo un disequilibrio tra i tassi d'arrivo degli ordini, la volatilità è stata lasciata invariata,  $\lambda^S$  è stato fatto diminuire di 5 volte mentre  $\lambda^B$  è stato fatto aumentare anch'esso di 5 volte. Nel caso della crisi di liquidità, le variazioni sui tassi  $\lambda^i$  sono le stesse dello scenario con disequilibrio tra gli ordini, la volatilità è stata fatta aumentare ad un livello del 40%. Questa situazione descrive una crisi di liquidità ma solo per coloro che vogliono vendere, i compratori riusciranno ad ottenere prezzi migliori rispetto allo scenario di normalità.



## Un algoritmo per il Rotman Interactive Trader

Dopo aver descritto il modello che permette di ricavare i prezzi *bid* ed *ask*, ci dedichiamo alla descrizione di un algoritmo che svolga il ruolo di *market maker* utilizzando il software RIT descritto nella sezione precedente.

Dobbiamo dunque procedere ad una descrizione dell'*environment* in cui il nostro algoritmo si troverà ad operare. Il Financial Research and Trading Lab ha preparato un case che incentivi gli studenti allo sviluppo di strategie di *High Frequency Trading* pertanto l'*environment* è caratterizzato da un tasso al quale arrivano gli ordini di mercato (*market order*), sia d'acquisto che di vendita (calcolati rispettivamente come titoli acquistati per secondo e titoli venduti per secondo) molto alto. Questo comporta, per quanto analizzato nel nostro modello, che il *bid-ask spread* sarà pari molto spesso, in assenza di crisi di liquidità, al tick minimo di negoziazione<sup>14</sup>. Vi è un incentivo a immettere *limit order* piuttosto che *market order* perchè viene addebitata una commissione per i *market order* mentre per i *limit order* è addirittura presente uno sconto. Lo sconto è giustificato dal fatto che i *limit order* aggiungono liquidità al mercato rendendolo più efficiente.

Altro elemento importante è la *liquidity*. Essa varia a seconda del titolo ed in qualche modo è legata al tasso al quale arrivano i *market order*. Da notare, inoltre, che laddove la liquidità è più alta, la volatilità è minore e ciò è coerente con l'intuizione economica. La liquidità è un elemento essenziale per la determinazione del *bid-ask spread*, quando essa diminuisce lo *spread* dovrebbe aumentare e viceversa. L'algoritmo descritto in questo paragrafo inferisce la liquidità misurando il numero di *market order* che giungono sul mercato per unità di tempo. Nell'Appendice 2.1 si trova una macro che può essere utilizzata in Excel per la stima di tale numero. Inoltre, dal momento che la macro è in grado di distinguere tra il numero di *buy market order* ( $\lambda^B$ ) e quello di *sell market order* ( $\lambda^S$ ), l'algoritmo sarà anche in grado di distinguere situazioni di illiquidità da uno solo dei due lati del *book*. In tal modo, se la crisi di liquidità si verifica sul lato *bid* del *book* (tutti vogliono vendere ed il prezzo

---

<sup>14</sup> Non è possibile avere uno *spread* nullo perché due ordini, uno in acquisto ed uno in vendita, con lo stesso prezzo e quantità sarebbero eseguiti l'uno contro l'altro. Pertanto, il *bid-ask spread* minimo sarà pari al minimo movimento che il prezzo del titolo può avere (*minimum tick*). Sul software RIT il *tick* è pari a 0.01.

scende drasticamente), si osserverà un valore di  $\lambda^B$  basso che indurrà l'algoritmo ad abbassare la sua quotazione *bid*. Viceversa, se la crisi di liquidità si verifica sul lato *ask* del *book* (tutti vogliono acquistare ed il prezzo aumenta drasticamente), si osserverà un valore di  $\lambda^S$  basso che indurrà l'algoritmo ad alzare la sua quotazione *ask*. L'orizzonte temporale espresso in secondi sul quale effettuare tale calcolo ( $n$ ) possiamo definirlo liberamente ed è un elemento fondamentale in sede di *fine tuning* del nostro algoritmo.

A differenza di quanto ipotizzato nel modello descritto al paragrafo precedente, in questo *case* il *market maker* non ha la possibilità di coprirsi istantaneamente nell'*interdealer market*. Per tale motivo, come evidenziato da altri autori, la sua posizione sul titolo avrà un'influenza sul *bid-ask spread*. In particolare, se la sua posizione è lunga rispetto a quella considerata ottimale, allora egli dovrebbe immettere una quotazione *bid* (*ask*) più bassa (alta) di quella che sarebbe stata quotata nel caso in cui la sua posizione fosse stata pari a quella ottimale. Operando nel RIT, non abbiamo informazioni circa il futuro andamento del prezzo perché esso è assunto essere un moto geometrico browniano senza *drift*. La posizione ottimale su ogni titolo è pari a zero pertanto abbiamo stabilito che ogni posizione diversa da zero comporti per il *market maker* un costo. Tale costo è giustificato dal fatto che egli sarà esposto al rischio connesso a movimenti avversi del prezzo del titolo. Inoltre, se è vero che non abbiamo elementi per determinare il futuro andamento del titolo, possiamo inferire alcune informazioni dal *book*. Più in particolare, associate alle quotazioni *best bid* e *best ask* abbiamo anche le rispettive quantità, *best bid size* e *best ask size*. L'arrivo dei *market order* va ad erodere tali *size* e prima o poi accadrà uno dei seguenti due eventi:

- il *best ask size* viene colpito per intero dai *market order* pertanto il prezzo *best ask* aumenta;
- il *best bid size* viene colpito per intero dai *market order* pertanto il prezzo *best bid* diminuisce.

Il cambiamento del prezzo può dunque essere visto come una sorta di "gara" tra i *market order*. Se i *buy market order* esauriscono la *best ask size* prima che i *sell market order* esauriscano la *best bid size*, avremo un aumento del prezzo. Viceversa, se i *sell market order* esauriscono la *best bid size* prima che i *buy market order* esauriscano la *best ask size*, avremo

una diminuzione del prezzo. Avellaneda et al.<sup>15</sup> utilizzano la seguente formula per la stima delle probabilità di rialzo basate sul meccanismo di “gara” appena descritto:

$$p_{up} = \frac{best\ bid\ size}{(best\ bid\ size + best\ ask\ size)} \quad 2.45$$

dove  $p_{up}$  indica la probabilità di rialzo. La probabilità di ribasso ( $p_{down}$ ) sarà:

$$p_{down} = \frac{best\ ask\ size}{(best\ bid\ size + best\ ask\ size)} \quad 2.46$$

Potremmo modificare ulteriormente le nostre quotazioni *bid* ed *ask* per considerare le probabilità calcolate nelle equazioni 2.45 e 2.46 dal momento che fungono da *proxy* per il futuro andamento del titolo.

Dopo aver descritto brevemente le linee guida che ci hanno condotto nell’elaborazione del nostro algoritmo, passiamo ad una descrizione dettagliata dello stesso.

Innanzitutto è necessario calcolare il tasso al quale arrivano i *market order* sia in acquisto che in vendita (in Appendice 2.1 si trova una macro che permette tale calcolo). Assumiamo inoltre che il *mid-price* corrisponda al *fair price* del titolo. Conoscendo anche la volatilità (il *case* sviluppato dal Finacial Research and Trading Lab fornisce tale dato ma in caso contrario lo si potrebbe stimare con l’uso di modelli GARCH) possiamo applicare le equazioni 2.26 e 2.41. I prezzi ottenuti li chiameremo, rispettivamente, *gross bid* e *gross ask*. Essi non sono i prezzi *bid* ed *ask* effettivi perché ancora non abbiamo apportato le modifiche dovute alla posizione del *market maker* ed alle probabilità di rialzo e di ribasso così come calcolate nelle equazioni 2.45 e 2.46. Per apportare tali modifiche utilizzeremo la seguente notazione:

- *Pos* = posizione del *market maker* sul titolo;
- *Bid spread* = *spread* che va sottratto al *gross bid* per ottenere la quotazione *bid* effettiva (*bid*);
- *Ask spread* = *spread* che va aggiunto al *gross ask* per ottenere la quotazione *ask* effettiva (*ask*).

---

<sup>15</sup> Avellaneda, M., Reed, J. & Stoikov, S., 2011. Forecasting Prices from Level-I Quotes in the Presence of Hidden Liquidity. *Algorithmic Finance*, 29 June, 1(1).

Il *bid spread* deve essere una funzione crescente della posizione che il *market maker* ha sul titolo ( $Pos$ ) mentre l'*ask spread* deve essere una funzione decrescente in  $Pos$ . Da notare che man mano che la posizione del *market maker* si allontana da quella ottimale ( $Pos = 0$ ), egli si espone a rischi sempre maggiori, è auspicabile dunque che il *bid spread* sia crescente in modo più che proporzionale rispetto alla variabile  $Pos$  mentre l'*ask spread* sia decrescente in modo meno che proporzionale rispetto alla medesima variabile.

Le altre due variabili che influenzano il *bid spread* e l'*ask spread* sono, rispettivamente,  $p_{down}$  e  $p_{up}$ . In una situazione in cui il *best bid size* e il *best ask size* sono uguali, queste due probabilità sono uguali. Quando  $p_{down}$  è maggiore di  $p_{up}$ , la probabilità che il titolo si muova al ribasso è maggiore di quella che il titolo subisca un rialzo, allora vorremmo che la quotazione *bid* fosse più bassa mentre quella *ask* dovrebbe restare inalterata. Segue che, quando  $p_{up}$  è maggiore di  $p_{down}$ , la probabilità che il titolo si muova al rialzo è maggiore di quella che il titolo subisca un ribasso, preferiremmo dunque avere una quotazione *ask* più alta e lasciare inalterata quella *bid*.

Per quanto esposto, la formula per il calcolo della quotazione *bid* sarà espressa come:

$$bid\ spread = \begin{cases} \max(0, e^{\alpha p_{down} + \beta Pos} - 1) & \text{se } p_{down} > p_{up} \\ \max(0, e^{\beta Pos} - 1) & \text{se } p_{down} \leq p_{up} \end{cases} \quad 2.47$$

mentre quella della quotazione *ask*:

$$ask\ spread = \begin{cases} \max(0, e^{\alpha p_{up} - \beta Pos} - 1) & \text{se } p_{down} < p_{up} \\ \max(0, e^{\beta Pos} - 1) & \text{se } p_{down} \geq p_{up} \end{cases} \quad 2.48$$

$a$  è un parametro che va settato in sede di *fine tuning* dell'algoritmo in modo da renderlo più o meno reattivo a cambiamenti delle probabilità di rialzo o ribasso.

$\beta$  è un parametro che dipende dall'avversione al rischio del *market maker* ed anch'esso va settato in sede di *fine tuning*.

Il *bid spread* e l'*ask spread* definiti dalle equazioni 2.47 e 2.48 permettono di modificare lo *spread* secondo quanto spiegato finora. In particolare, le variabili che influenzano il *bid-ask spread* e che sono osservabili sul mercato sono quattro:

- Il numero di *buy market order* che arrivano per unità di tempo sul mercato;
- Il numero di *sell market order* che arrivano per unità di tempo sul mercato;



## Capitolo 2 - Market Making & Algorithmic Trading

- La probabilità di rialzo (ribasso) del titolo calcolata utilizzando la 2.46 (2.47);
- La posizione che il *market maker* ha sul titolo (*Position*).

I due parametri che possiamo modificare per adattare l'algoritmo alle esigenze del mercato in cui ci troviamo ad agire sono  $a$  e  $\beta$ . Dopo aver calcolato *bid spread* e *ask spread*, il nostro algoritmo deve immettere due *limit order* nel *book*:

- un *limit order* d'acquisto il cui prezzo sarà pari al *gross bid* meno il *bid spread*;
- un *limit order* di vendita il cui prezzo sarà pari al *gross ask* più l'*ask spread*.

Così facendo, le quotazioni *bid* ed *ask* saranno le seguenti:

$$\text{quotazione bid} = \text{gross bid} - \text{bid spread}$$

$$\text{quotazione ask} = \text{gross ask} + \text{ask spread}$$

Entrambe le quotazioni sono composte da due elementi:

- una quotazione *gross* (*gross bid* o *gross ask*) che ci permette di ereditare le proprietà descritte nel paragrafo precedente in merito a modifiche della volatilità e della liquidità (numero di *market order*/unità di tempo);
- uno *spread* (*bid spread* o *ask spread*) che ci permette non solo di superare l'ipotesi per la quale il *market maker* ha la possibilità di coprirsi immediatamente in un interdealer market e che è alla base del modello descritto nel paragrafo precedente ma anche di adattare il nostro algoritmo all'*environment* in cui si trova ad operare modificando i parametri  $(\alpha, \beta, n)$  in sede di *fine tuning*.

Nella Tabella 1 mostriamo le modifiche che si avrebbero alle quotazioni *bid* ed *ask* se si dovesse verificare un cambiamento ai tassi ai quali arrivano i *market order* ( $\lambda^B$  e  $\lambda^S$ ). La prima riga mostra le quotazioni *bid* ed *ask* che si avrebbero in un *environment* in cui non vi è dipartità tra i tassi ( $\lambda^B = \lambda^S$ ).

La seconda riga mostra gli effetti che si avrebbero in seguito ad un aumento di  $\lambda^S$  ed una diminuzione di  $\lambda^B$ , ossia in una situazione in cui aumenta il numero di *sell market order* e diminuisce il numero di *buy market order*. Ci si attende una diminuzione del prezzo ed il nostro algoritmo fa diminuire la quotazione *bid* e lascia inalterata quella *ask*.

La terza riga mostra gli effetti che si avrebbero in seguito ad un aumento di  $\lambda^B$  ed una diminuzione di  $\lambda^S$ , ossia in una situazione in cui aumenta il numero di *buy market order* e

diminuisce il numero di *sell market order*. Ci si attende una diminuzione del prezzo ed il nostro algoritmo fa diminuire la quotazione *bid* e lascia inalterata quella *ask*.

**Tabella 1.** Modifiche alle quotazioni *bid* ed *ask* in seguito ad una variazione di  $\lambda^B$  e  $\lambda^S$ .

	$\lambda^B$	$\lambda^S$	$\alpha$	$\beta$	$p_{up}$	$p_{down}$	Pos	Gross <i>bid</i>	Gross <i>ask</i>	<i>Bid</i> <i>spread</i>	<i>Ask</i> <i>spread</i>	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>
1	1000	1000	2,50%	3,00%	50%	50%	0	19,99	20,00	0,00	0,00	19,99	20,00
2	200	2000	2,50%	3,00%	50%	50%	0	19,98	20,00	0,00	0,00	19,98	20,00
3	2000	200	2,50%	3,00%	50%	50%	0	19,99	20,01	0,00	0,00	19,99	20,01

Nella Tabella 2 mostriamo le modifiche che si avrebbero alle quotazioni *bid* ed *ask* se si dovesse verificare una variazione alle probabilità di rialzo o ribasso ( $p_{up}$  e  $p_{down}$ ) calcolate con le equazioni 2.47 e 2.48. La prima riga mostra le quotazioni *bid* ed *ask* che si avrebbero quando  $p_{up} = p_{down}$ . La seconda riga mostra che, quando  $p_{down} > p_{up}$ , l'algoritmo riconosce una situazione in cui il prezzo potrà diminuire ed aggiusta al ribasso la quotazione *bid*. Nella terza riga si ha la situazione inversa, quando  $p_{up} > p_{down}$  l'algoritmo rivede al rialzo la propria quotazione *ask* in risposta ad un possibile aumento del prezzo del titolo. Nella quarta e quinta riga abbiamo utilizzato gli stessi parametri descritti nella riga due ma abbiamo modificato il valore di  $\alpha$  per mostrare come sia possibile effettuare il *fine tuning* dell'algoritmo a seconda dell'*enviroment* in cui ci si trova ad agire. Nella riga quattro il valore di  $\alpha$  è stato diminuito e come conseguenza la quotazione *bid* è diminuita ma con una intensità minore. Nella quinta riga il valore di  $\alpha$  è stato aumentato e l'algoritmo ha rivisto al ribasso la quotazione *bid* con una intensità maggiore.

Nella Tabella 3 mostriamo le modifiche che si avrebbero alle quotazioni *bid* ed *ask* se si dovesse verificare una variazione della posizione del *market maker* sul titolo. Nella riga 2 si nota che se il *market maker* è lungo sul titolo egli abbasserà il prezzo al quale è disposto ad acquistare (quotazione *bid*) per deviare ulteriormente dalla sua posizione neutra vorrà uno sconto. Simmetricamente, la riga 3 mostra che se il *market maker* è corto sul titolo egli alzerà la quotazione *ask* perchè per vendere altri titoli vorrà un premio. Dalla riga 4 in poi mostriamo come variano le quotazione *bid* ed *ask* alle modifiche di  $\beta$ . Se  $\beta$  aumenta e siamo lunghi (corti), il *bid* (*ask*) *spread* aumenta portando il *market maker* a fissare una quotazione *bid* (*ask*) più bassa (alta) rispetto a quella fissata nella riga 2. Viceversa, se  $\beta$  diminuisce e

## Capitolo 2 – Market Making & Algorithmic Trading

siamo lunghi (corti), il *bid (ask) spread* diminuisce e con esso la quotazione *bid (ask)* che risulterà più alta (bassa) rispetto a quella fissata nella riga 2.

**Tabella 2.** Modifiche alle quotazioni *bid* ed *ask* in seguito ad una variazione di  $p_{up}$  e  $p_{down}$ .

	$\lambda^B$	$\lambda^S$	$\alpha$	$\beta$	$p_{up}$	$p_{down}$	Pos	Gross bid	Gross ask	Bid spread	Ask spread	Bid	Ask
1	1000	1000	2,50%	3,00%	50%	50%	0	19,99	20,00	0,00	0,00	19,99	20,00
2	1000	1000	2,50%	3,00%	20%	80%	0	19,99	20,00	0,02	0,00	19,97	20,00
3	1000	1000	2,50%	3,00%	80%	20%	0	19,99	20,00	0,00	0,02	19,99	20,02
4	1000	1000	1,50%	3,00%	20%	80%	0	19,99	20,00	0,01	0,00	19,98	20,00
5	1000	1000	4,00%	3,00%	20%	80%	0	19,99	20,00	0,03	0,00	19,96	20,00

**Tabella 3.** Modifiche alle quotazioni *bid* ed *ask* in seguito ad una variazione della posizione del *market maker* sul titolo.

	$\lambda^B$	$\lambda^S$	$\alpha$	$\beta$	$p_{up}$	$p_{down}$	Pos	Gross bid	Gross ask	Bid spread	Ask spread	Bid	Ask
1	1000	1000	2,50%	3,00%	50%	50%	0	19,99	20,00	0,00	0,00	19,99	20,00
2	1000	1000	2,50%	3,00%	50%	50%	4000	19,99	20,00	0,01	0,00	19,98	20,00
3	1000	10 00	2,50%	3,00%	50%	50%	-4000	19,99	20,00	0,00	0,01	19,99	20,01
4	1000	1000	2,50%	5,00%	50%	50%	4000	19,99	20,00	0,02	0,00	19,97	20,00
5	1000	1000	2,50%	1,50%	50%	50%	4000	19,99	20,00	0,00	0,00	19,99	20,00
6	1000	1000	2,50%	5,00%	50%	50%	-4000	19,99	20,00	0,00	0,02	19,99	20,02
7	1000	1000	2,50%	1,50%	50%	50%	-4000	19,99	20,00	0,00	0,00	19,99	20,00

La macro contenente le istruzioni per l'avvio dell'algoritmo in Visual Basic for Application è contenuta nell'Appendice 2.2.

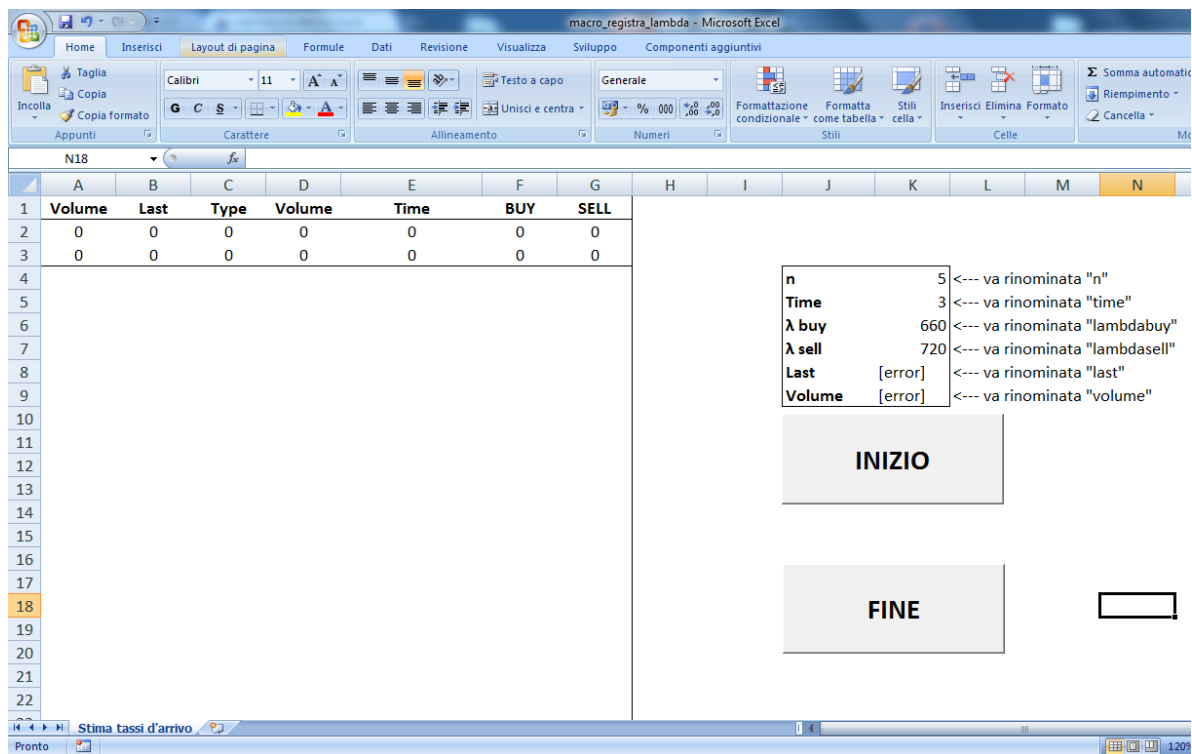
## Appendice 2.1

Quest'appendice contiene la descrizione di una macro che permette il calcolo del tasso d'arrivo di ordini di segno opposto definito come numero di *market orders* per unità di tempo.

Definiamo il numero di *buy market order* come il numero di titoli acquistati per secondo (*buy/sec*). Allo stesso modo, definiamo il numero *sell market order* come numero di titoli venduti per secondo (*sell/sec*). La macro che segue permette di calcolare tali tassi utilizzando gli ultimi  $n$  secondi. La variabile  $n$  sarà modificata a seconda dell'*enviroment* in cui ci troviamo ad agire. Se siamo in un contesto di *High Frequency Trading*,  $n$  sarà un numero molto basso (nelle nostre simulazioni abbiamo utilizzato  $n=10$ ).

Affinché la macro funzioni al meglio, la schermata del primo foglio di Excel dovrebbe essere impostata come mostra la Figura 13.

Figura 13. Schermata da utilizzare affinché la macro funzioni correttamente.



## Appendice 2.1

Si noti come sia necessario rinominare alcune celle e inserire due pulsanti per permettere l'avvio e lo stop della macro. Di seguito riportiamo il codice che va inserito in un nuovo modulo (alt+F11 → inserisci → modulo):

**Dim** interruttore As Boolean

Sub start()

'questa macro è necessaria per avviare la registrazione

'va collegata al pulsante "inizio"

interruttore = True

Foglio1.Range("time") = 0

Call registra

End Sub

Sub fine()

'questa macro è necessaria per stoppare la registrazione

'va collegata al pulsante "fine"

interruttore = False

End Sub

Sub registra()

'definiamo le variabili che saranno necessarie per la registrazione

**Dim** ultimariga As **Integer**

**Dim** ordertype As **Integer**

**Dim** ordervolume As **Long**

**Dim** i, n, lagtemporale As **Integer**

**Dim** sommabuy, sommasell As **Long**

'stabiliamo che il valore iniziale di alcune variabili

n = Foglio1.Range("n")

i = 0

sommabuy = 0

## Appendice 2.1

sommasell = 0

ultimariga = Foglio1.Range("A2").End(xlDown).Row

'la riga successiva serve a monitorare i secondi passati dall'avvio della sub

Foglio1.Range("time") = Foglio1.Range("time") + 1

If interruttore = True Then

'quando la cella "volume" si modifica, allora avviene la registrazione

If Foglio1.Cells(ultimariga, 1) <> Foglio1.Range("last") Then

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 1) = Foglio1.Range("volume")

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 2) = Foglio1.Range("last")

'calcoliamo il volume dell'ultimo ordine

ordervolume = Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 1) - Foglio1.Cells(ultimariga, 1)

'stabiliamo se si tratta di un acquisto...

If Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 2) > Foglio1.Cells(ultimariga, 2) Then

ordertype = 1

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 6) = ordertype \* ordervolume

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 7) = 0

'...o di una vendita...

Elseif Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 2) < Foglio1.Cells(ultimariga, 2) Then

ordertype = -1

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 7) = -ordertype \* ordervolume

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 6) = 0

'se si modifica la cella "volume" ma il "last resta invariato,

'non siamo in grado di stabilire se si è trattato di un acquisto o di una vendita

Elseif Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 2) = Foglio1.Cells(ultimariga, 2) Then

ordertype = 0

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 7) = ordertype \* ordervolume

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 6) = ordertype \* ordervolume

End If

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 3) = ordertype

Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 4) = ordervolume

## Appendice 2.1

```
Foglio1.Cells(ultimariga + 1, 5) = Foglio1.Range("time")
```

```
End If
```

```
If Foglio1.Cells(n + 4, 1) <> "" Then
```

```
'calcoliamo i secondi che sono passati tra l'ultima transazione e la n-ultima
```

```
lagtemporale = Foglio1.Cells(ultimariga, 5) - Foglio1.Cells(ultimariga - 4, 5)
```

```
'le righe seguenti effettuano il calcolo della media
```

```
Do While i < n
```

```
  i = i + 1
```

```
  sommabuy = sommabuy + Foglio1.Cells(ultimariga - n + i, 6)
```

```
Loop
```

```
Foglio1.Range("lambdabuy") = sommabuy / n
```

```
i = 0
```

```
Do While i < n
```

```
  i = i + 1
```

```
  sommasell = sommasell + Foglio1.Cells(ultimariga - n + i, 7)
```

```
Loop
```

```
Foglio1.Range("lambdasell") = sommasell / n
```

```
End If
```

```
'le successive due righe di codice sono necessarie per effettuare
```

```
'la registrazione a intervalli di un secondo
```

```
dtime = Now + TimeValue("00:00:01")
```

```
Application.OnTime dtime, "registra"
```

```
End If
```

```
End Sub
```

## Appendice 2.2

Questa appendice contiene le istruzioni per costruire un semplice algoritmo che adotti una strategia di *market making*. L'algoritmo è stato sviluppato in Visual Basic for Application ed utilizza i comandi API compatibili con il software RIT sul quale ne è stata testata l'efficienza.

Al fine di far funzionare il file in modo corretto è necessario inserire un nuovo modulo all'interno dell'editor di VBA ed inserirvi il codice mostrato nell' Appendice 2.1 necessario per il calcolo di  $\lambda^B$  e  $\lambda^S$ . È necessario poi creare un foglio come quello mostrato in Figura 14. Alcune celle devono avere un nome particolare in modo che il nostro codice VBA le riconosca, tali nomi sono stati trascritti a margine.

Figura 14. Schermata del foglio "ALGO".

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data tables and parameters:

Parametri	
Start Time	280 <----- STARTTIME
Stop Time	25 <----- STOPTIME
default size	1000 <----- SIZEDEFAULT
volatilità	25.00%
$\alpha$	6.00%
$\beta$	10.00%

Variabili endogene	
bid spread	0.03 <----- BIDSPREAD
ask spread	0.02 <----- ASKSPREAD
$\lambda$ buy	1000.00 <----- LAMBDABUY
$\lambda$ sell	1000.00 <----- LAMBDASELL
Gross bid	20.02 <----- GROSSBID
Gross ask	20.03 <----- GROSSASK

Algo Information	
ALGO Function	ok

Informazioni di mercato											
Top of Market											
Ticker	BSZ	BID	ASK	ASZ	Mid Price	COST	POSITION	FEEs	p up	p down	Open Orders
ALGO	49700	20.02	20.03	51600	20.025	0	0	0	49.06%	50.94%	

Quotazioni Algo			
BSZ	BID	ASK	ASZ
1000	19.99	20.05	1000

Time
298



## Appendice 2.2

Nel foglio "Open Order" abbiamo utilizzato una funzione per il calcolo del numero di *limit order* non ancora eseguiti. Tale numero è stato inserito in una cella con il nome di "ALGOOPEN".

Dopo queste operazioni preliminari sarà sufficiente immettere in un modulo di VBA il seguente codice:

'le successive due righe sono necessarie per creare una variabile che ci permetta di stoppare il calcolo automatico di excel per un numero di millisecondi specificato

Option Explicit

Declare Sub Sleep Lib "kernel32.dll" (ByVal dwMilliseconds As Long)

'definizione della funzione "algo" e degli argomenti che la compongono

Function algo(time, starttime, stoptime, ticker, size, probup, probdown, grossbid, grossask, bidsread, asksread, position)

'comandi API. I comandi che seguono sono necessari per attivare le API del software RIT

Dim API As RIT2.API

Set API = New RIT2.API

'Definiamo una variabili necessaria per l'immissione degli ordini attraverso il nostro algoritmo

Dim QueueNum As Long

'l'algoritmo funzionerà soltanto in una finestra di tempo compresa tra il valore definito nella cella STARTTIME e quello definito nella cella STOPTIME

If time < starttime And time > stoptime Then

    'L'algoritmo controlla che vi siano al massimo due ordini ancora non eseguiti

    If Foglio1.Range("ALGOOPEN") > 2 Then

        'se ve ne sono più di 2, li cancelliamo...

        API.cancelorderexpr ("Price > 0" And ticker = "ALGO")

        Sleep (100)

        API.clearqueuedorder

    Else

        '...e aggiorniamo le nostre quotazioni

        QueueNum = API.AddQueuedOrder(ticker, size, grossbid - bidsread, API.BUY, API.LMT)

        Sleep (110)

## Appendice 2.2

```
        QueueNum = API.AddQueuedOrder(ticker, size, grossask + askspread, API.SELL, API.LMT)
    End If
End If
End Function
```

Una volta riportato il codice nel modulo di VBA, apparirà tra le funzioni di Excel “algo” e non ci resterà che inserirla in una qualsiasi cella, fornirle gli argomenti descritti nel codice riportato sopra e, una volta lanciato il software RIT il nostro algoritmo svolgerà la sua funzione di *market maker*. Sarà molto importante effettuare il *fine tuning* dell’algoritmo ossia provarlo in condizioni di liquidità diverse ed analizzare come si comporta nelle diverse situazioni al fine di stabilire i parametri ottimali.

### Capitolo 3 – Modelli per il rischio di credito

La valutazione del rischio di credito suscita, da sempre, un grande interesse da parte sia delle banche che delle altre istituzioni finanziarie. In questo lavoro ci soffermeremo sui “modelli strutturali” per il rischio di credito. Essi sono interessanti perché permettono sia la stima delle probabilità di default sia il *pricing* del debito e dell'*equity* in un unico modello basato su dati di mercato (prezzo dei titoli azionari, opzioni, etc.).

Nel paragrafo 1 mostriamo uno dei modelli più noti nonché il primo ad utilizzare la teoria delle opzioni per la stima del rischio di credito è il modello di Merton<sup>16</sup>. Esso assume che una società abbia un certo ammontare di debito sotto forma di zero-coupon bond con scadenza al tempo  $T$ . La società fallisce se il valore delle sue attività è minore del valore nominale del debito al tempo  $T$ . L'*equity* può essere visto come un'opzione call europea scritta sulle attività della società e prezzo d'esercizio pari al valore facciale del debito. Il modello può essere utilizzato per stimare o le probabilità neutrali verso il rischio che una società fallisca o il *credit spread* sul debito. Per poter applicare tale modello è necessario conoscere il valore corrente delle attività, la volatilità delle attività, l'ammontare del debito e la sua scadenza. Il modello di Merton è stato utilizzato da Kealhofer e Vasicek che l'hanno implementato e con McQuown hanno costituito nel 1989 la KMV Corporation (acquisita in seguito da Moody's). KMV utilizzava il modello di Merton per attribuire ad ogni società, sulla base della “*distance to default*” ( $DD$ ) e su un database di dati di società fallite, una variabile detta “*expected default frequency*” ( $EDF$ ).

Nel paragrafo 2 mostriamo l'utilizzo di un modello per il rischio di credito *à la Leland*. Tale modello ipotizza che il debito sia perpetuo dunque non dobbiamo fare alcuna ipotesi circa la sua scadenza (al contrario di quanto necessario con il modello di Merton). Il modello è stato testato utilizzando i dati relativi a 17 banche ed i risultati sono stati confrontati con quelli pubblicati dal Risk Management Institute della University of Singapore.

---

<sup>16</sup> Merton, R., 1974. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. Volume 28, pp. 449-470.

## Il modello di Merton e quello sviluppato da KMV

### Il modello di Merton

Merton ha proposto nel 1974 un modello che permette di valutare il rischio di credito di una società attraverso l'analisi della struttura del capitale. In questo modello il valore delle attività è assunto seguire un moto geometrico browniano con volatilità costante pertanto l'equazione che ne descrive il moto sarà la seguente:

$$dA = \mu_A A dt + \sigma_A A dW$$

con  $\mu_A$  e  $\sigma_A$  che rappresentano, rispettivamente, la media e la volatilità del tasso di rendimento istantaneo delle attività della società,  $dW$  è un processo di Wiener standard. Il valore delle attività al tempo  $t$  delle attività sarà:

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A^2 \sqrt{t} W_t \right\}$$

con  $W_t \sim N(0, t)$ .  $A_t$  ha una distribuzione log-normale con valore atteso al tempo  $t$  pari a:

$$E(A_t) = A_0 \exp(\mu_A t)$$

La società ha due sole classi di passività: *equity* e debito. L'*equity* non riceve dividendi ed il debito è costituito da uno zero coupon bond con valore facciale pari a  $D$  con scadenza in  $T$ . Se in  $T$  il valore delle attività supera il valore nozionale del debito,  $D$ , i creditori verranno rimborsati e gli azionisti ricevono il valore residuo delle attività. Se il valore delle attività è minore del valore nozionale del debito, la società fallisce ed i creditori riceveranno un pagamento pari al valore delle attività mentre gli azionisti non riceveranno nulla. Formalizziamo meglio quanto esposto:

Definiamo  $E$  come il valore dell'*equity* della società e  $A$  come il valore delle attività. Siano  $E_0$  e  $A_0$ , rispettivamente, i valori di  $E$  e  $A$  al tempo zero e siano  $E_T$  e  $A_T$  i valori al tempo  $T$ . Il pagamento a favore degli azionisti al tempo  $T$  sarà espresso dalla seguente equazione:

$$E_T = \max[A_T - D, 0]$$

Tale equazione mostra che l'*equity* è un'opzione call europea scritta sulle attività della società ( $A$ ) ed avente un prezzo d'esercizio pari al valore facciale del debito ( $D$ ). Il valore corrente dell'*equity*, utilizzando la formula di Black-Scholes, sarà pari a:

$$E_0 = A_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A_0 e^{rT}}{D}\right)}{\sigma_A \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma_A \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

$r$  indica il tasso d'interesse privo di rischio,  $\sigma_A$  indica la volatilità della attività della società. Sia  $r$  che  $\sigma_A$  sono assunti essere costanti. Definiamo  $D^* = D e^{-rT}$  come il valore attuale del debito e sia  $L = D^*/A_0$  una misura del *Leverage* utilizzato dalla società. Il valore dell'*equity* può essere riscritto come segue:

$$E_0 = A_0 [N(d_1) - LN(d_2)] \tag{3.1}$$

dove

$$d_1 = \frac{-\ln(L)}{\sigma_A \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma_A \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}.$$

Se tutte le passività della società fossero quotate e *marked to market* giornalmente, allora la stima del valore delle attività della società sarebbe molto semplice. Essa sarebbe, banalmente, pari alla somma del valore di mercato di ciascuna passività della società. Anche la volatilità delle attività sarebbe molto facile da calcolare, sarebbe sufficiente calcolare la volatilità dei tassi di rendimento dalla serie storica dei valori delle attività.

Nella realtà, tuttavia, soltanto il valore dell'*equity* delle società quotate è *marked to market* giornalmente pertanto possiamo stimare il valore delle attività nonché la loro volatilità

sfruttando un risultato presentato da Jones, Mason e Rosenfeld<sup>17</sup>. Sotto l'ipotesi che l'*equity* segua un moto geometrico browniano, esso avrà la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dE = \mu_E E dt + \sigma_E E dW \quad 3.2$$

con  $\mu_E$  che rappresenta il drift del processo (tasso di rendimento dell'*equity*),  $\sigma_E$  è la volatilità istantanea dell'*equity* e  $dW$  è un processo di Wiener standard. Utilizzando il Lemma di Ito, possiamo riscrivere il moto dell'*equity* come segue:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial A} dA + \frac{\partial E}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} (dA)^2 + \dots$$

e facendo delle semplificazioni:

$$dE = \left( \frac{1}{2} \sigma_A^2 A^2 \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} + \mu_A A \frac{\partial E}{\partial A} + \frac{\partial E}{\partial t} \right) dt + \sigma_A A \frac{\partial E}{\partial A} dW \quad 3.3$$

Eguagliando i termini diffusivi delle equazioni 3.2 3.2 e 3.3 otteniamo:

$$E_0 \sigma_E = \frac{\partial E}{\partial A} A_0 \sigma_A \quad 3.4$$

Utilizzando l'equazione 3.4 3.4 possiamo ottenere:

$$\sigma_E = \frac{\sigma_A N(d_1)}{N(d_1) - LN(d_2)} \quad 3.5$$

Le equazioni 3.3 e 3.5 permettono di calcolare  $A_0$  e  $\sigma_A$  a partire da  $E_0$ ,  $\sigma_E$ ,  $L$  e  $T$ . La probabilità neutrale verso il rischio,  $P$ , che la società fallisca al tempo  $T$  è uguale alla probabilità che gli azionisti non eserciteranno la loro opzione call che gli consente di acquistare le attività della società ( $A$ ) ad un prezzo pari al valore facciale del debito ( $D$ ) al tempo  $T$ . Tale probabilità è pari a:

$$P = N(-d_2) \quad 3.6$$

---

<sup>17</sup> Jones, E. P., Mason, S. & Rosenfeld, E., 1984. Contingent claims analysis of corporate capital structure: an empirical investigation. *Journal of Finance*, Volume 39, pp. 611-625.

## Capitolo 3 - Modelli per il rischio di credito

Tale probabilità dipende dal *Leverage*,  $L$ , dalla volatilità delle attività della società,  $\sigma_A$ , e dalla scadenza del debito,  $T$ .

Il modello di Merton può essere utilizzato anche per spiegare i tassi di rendimento su titoli di debito rischiosi. Indicando con  $B_0$  il valore del debito al tempo zero e ricordando che il valore delle attività è pari al totale delle passività (che per ipotesi sono solo debito ed *equity*) abbiamo che:

$$B_0 = A_0 - E_0$$

Utilizzando l'equazione 3.1,  $B_0$  può essere espresso nel seguente modo:

$$B_0 = A_0[N(-d_1) + LN(d_2)] \quad 3.7$$

Il tasso di rendimento implicito ( $y$ ) potrà essere calcolato invertendo la seguente equazione:

$$B_0 = De^{-yT} = D^*e^{(r-y)T} \quad 3.8$$

Sostituendo l'equazione 3.8 nella 3.7 e ricordando che  $A_0 = D^*/L$  possiamo esprimere il tasso di rendimento implicito come segue:

$$y = r - \frac{\ln\left(N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L}\right)}{T} \quad 3.9$$

Pertanto il *credit spread* ( $s$ ) implicito nel modello di Merton sarà:

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L}\right)}{T} \quad 3.10$$

Tale *credit spread* dipende soltanto dal *Leverage* ( $L$ ), dalla volatilità delle attività della società,  $\sigma_A$  e dalla scadenza del debito,  $T$ .

### Il modello sviluppato da KMV

Il modello di Merton è stato implementato da vari studiosi data la possibilità di applicarlo con relativa facilità ai dati. KMV Corporation ha sviluppato un modello basato su quello di Merton per il calcolo sia della probabilità d'insolvenza che della Expected Default Frequency (*EDF*). Come mostrato dall'equazione 3.6, la probabilità di default è funzione

del *Leverage*, della volatilità delle attività della società e della scadenza del debito. La *EDF* è unica per ogni società e può essere utilizzata per calcolare il rating che la società avrebbe se si utilizzasse un particolare *rating system* (Standard & Poor's, Moody's Fitch o qualsiasi altro). La *EDF* ha delle proprietà interessanti perché permette un ordinamento cardinale (*cardinal ranking*) delle società con riferimento al loro rischio di credito. Diversamente, le agenzie di rating seguono un *ordinal ranking* basato sulle lettere (AAA, AA, A, BBB, etc.). Analizziamo il modello sviluppato da KMV in modo più approfondito.

Per calcolare le probabilità d'insolvenza reali è necessario seguire i seguenti tre passaggi:

- stimare il valore di mercato delle attività aziendali e la loro volatilità;
- calcolare la *distance to default*, che fornisce una misura del rischio d'insolvenza cui è esposta la società;
- trasformare la *distance to default* in probabilità d'insolvenza reali (non neutrali verso il rischio) attraverso l'utilizzo di un database contenente i dati di società fallite.

Per la stima del valore di mercato delle attività aziendali e della loro volatilità è sufficiente risolvere numericamente le equazioni 3.1 e 3.3.

Nel modello di Merton, una società dichiara il fallimento (*default o bankruptcy*<sup>18</sup>) quando il valore delle attività è minore del valore delle passività. KMV, analizzando un database molto ampio di società fallite, ha notato che il fallimento della società è dichiarato quando il valore delle sue attività raggiunge un valore compreso tra il valore totale delle passività ed il valore del debito a breve scadenza. Pertanto, la coda della distribuzione del valore delle attività al di sotto del debito non fornisce una misura accurata della probabilità reale di default. Altri fattori che possono minare l'accuratezza del calcolo della probabilità reale di default sono costituiti dal fatto che la distribuzione dei rendimenti delle attività possa non essere normale e che siano state fatte ipotesi semplificatrici sulla struttura del capitale della società. Inoltre, potrebbero essere in atto le linee di credito che, in caso di crisi

---

<sup>18</sup> La giurisdizione americana distingue tra *default* e *bankruptcy*. La *bankruptcy* è quella situazione in cui la società è liquidata ed il ricavato dalla vendita/dismissione delle attività aziendali è distribuito tra i debitori in base al grado di *seniority*. Diversamente, il *default* avviene quando la società non ottempera al pagamento di una cedola o del valore facciale di un'obbligazione. Le clausole *cross-default*, presenti in quasi tutti gli strumenti di debito, fanno sì che quando la società salta un pagamento su un'obbligazione, essa è dichiarata in default anche su tutte le altre.



aziendale, potrebbero far aumentare le passività laddove il *management* utilizzi la liquidità proveniente da tali fonti per onorare i pagamenti promessi.

Per tali motivi KMV prevede una fase intermedia che precede quella del calcolo della probabilità reale di default. Essa consiste nel calcolo di una variabile, la *distance to default* (*DD*) che rappresenta il numero di deviazioni standard tra la media della distribuzione del valore delle attività ed un “valore critico” (*default point*). In altri termini, la *DD* può essere vista come la distanza, espressa in deviazioni standard, che esiste tra il valore atteso del valore delle attività ad 1 anno ed il *default point*. Il *default point* è uguale al valore alla pari della somma del debito a breve termine più metà di quello a lunga scadenza. Possiamo esprimere più formalmente quanto appena descritto nel seguente modo.

Poniamo:

$DB$  = debito a breve scadenza

$DL$  = debito a lunga scadenza

$$DPT = \text{default point} = DB + \frac{1}{2}DL$$

$$DD = \text{distance to default} = \frac{E(A) - DPT}{\sigma_A}$$

con  $E(A)$  che rappresenta il valore atteso del valore delle attività

Data l'ipotesi di log-normalità del valore delle attività aziendali, la *DD* al tempo zero espressa in unità di deviazioni standard del tasso di rendimento delle attività sarà pari a

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{DPT_T}\right) + (\mu_A - 0.5 \sigma_A^2)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad 3.11$$

dove  $A_0$  rappresenta il valore attuale delle attività aziendali,  $DPT_T$  rappresenta il *default point* al tempo  $T$ ,  $\mu_A$  e  $\sigma_A$  sono, rispettivamente, la media e la volatilità annuale del tasso di rendimento istantaneo delle attività della società. In un mondo neutrale verso il rischio, la probabilità di default sarebbe così calcolata:

$$P_t = Pr(A_T < DPT_T)$$

$$P_t = Pr \left( A_t \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (T - t) + \sigma_A \sqrt{T} W_{T-t} \right\} < DPT_T \right)$$

$$P_t = Pr \left( W_{T-t} < \frac{\ln \left( \frac{DPT_T}{A_t} \right) - \left( r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma_A} \right)$$

$$P_t = Pr \left( Z < - \frac{\ln \left( \frac{A_t}{DPT_T} \right) + \left( r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma_A \sqrt{T - t}} \right)$$

Ebbene notare che  $Z \sim N(0,1)$  mentre  $W_{T-t} \sim N(0, T - t)$ . Inoltre, per l'equazione 3.11 si ha:

$$P_t = Pr(Z < -DD)$$

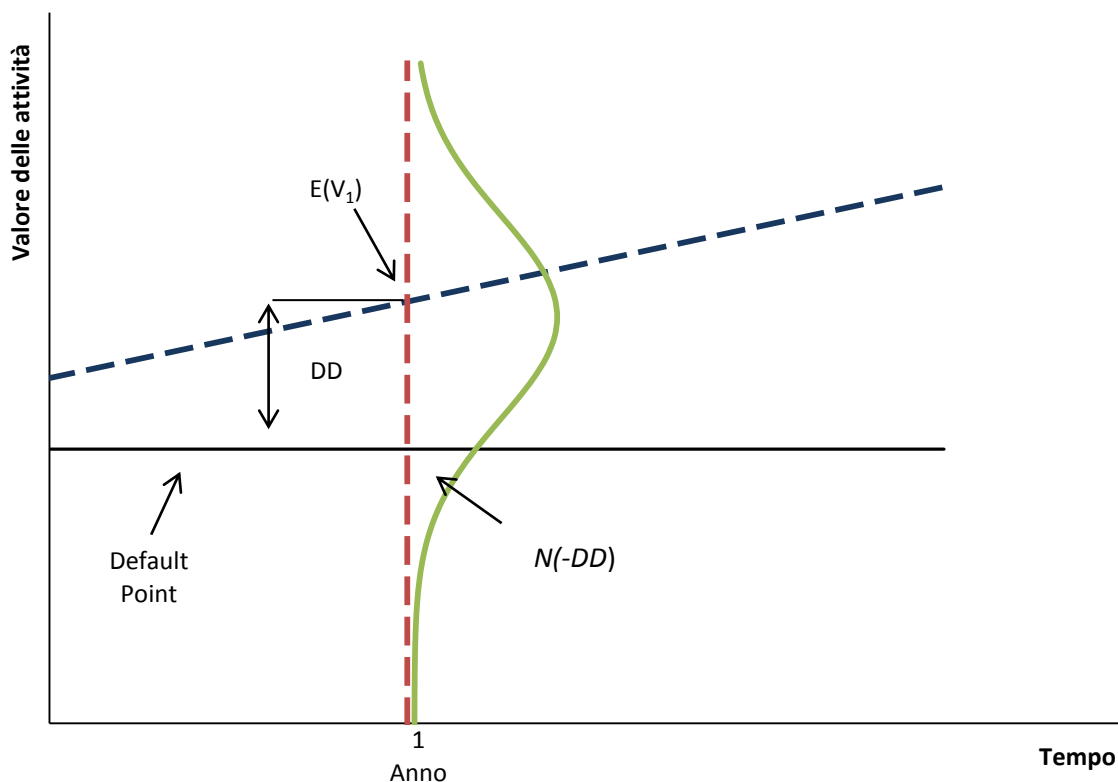
$$P_t = N(-DD) \tag{3.12}$$

Per quanto mostrato con l'equazione 3.12, segue che la coda al di sotto del *default point* ha una probabilità pari a  $N(-DD)$  come mostra la Figura 15.

L'ultima fase consiste nel trasformare le *DD* in probabilità reali di default per un dato orizzonte temporale. KMV chiama queste probabilità *Expected Default Frequencies (EDF)*. Sulla base delle informazioni di un database contenente le informazioni di migliaia società, KMV ha potuto stimare, per ogni orizzonte temporale, la proporzione di società fallite data la *DD*. Esempio: considerate tutte le società con una *DD* pari a 3, KMV ha calcolato la percentuale di società che falliscono entro un anno e tale proporzione (ipotizziamo sia di 30 b.p.) rappresenta la *EDF*. Si veda la Figura 16.

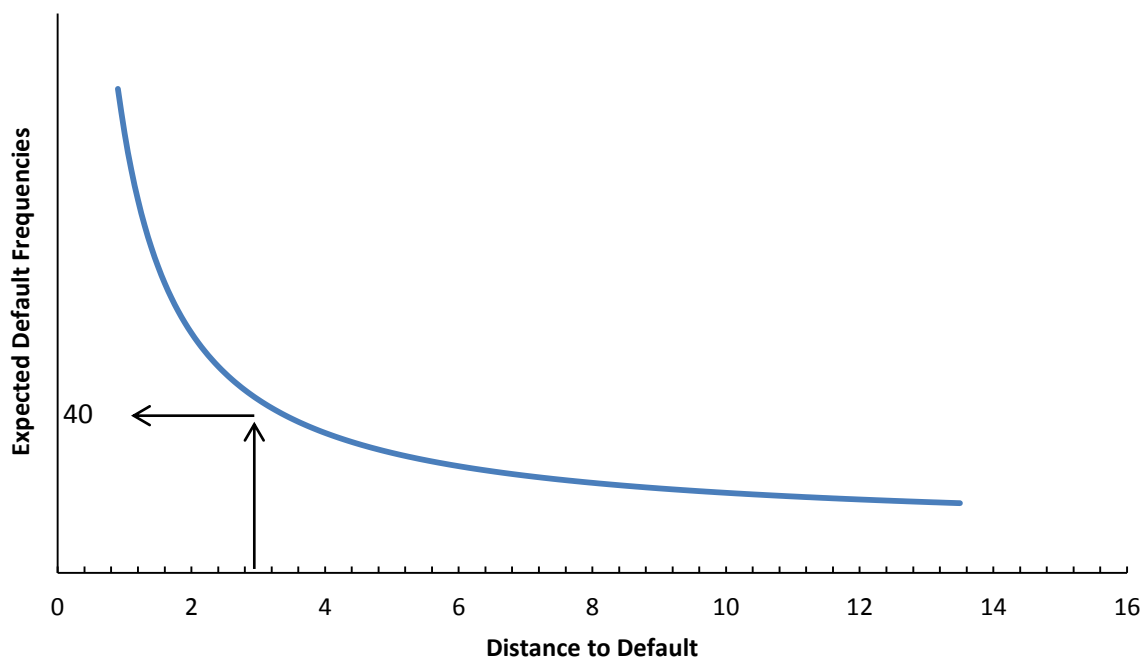
La *EDF* si è mostrata un utile indicatore della qualità creditizia delle società. Infatti, quando la situazione finanziaria di una società peggiora, la *EDF* tende ad aumentare. KMV ha analizzato i dati di circa 2000 società americane che sono fallite tra gli anni '80 e '90 ed ha mostrato come in tutti i casi si verificasse un aumento repentino della *EDF* nei due precedenti il fallimento. Dalle analisi di KMV sembra che le variazioni della *EDF* anticipino di circa 1 anno il *downgrading* effettuato dalle società di rating (Standard & Poor's, Moody's etc.).

**Figura 15. Distance to default (DD).** La figura mostra la distribuzione di probabilità di  $V_1$  (linea verde), la *distance to default* e la probabilità che, secondo il modello, la società fallisca per un dato orizzonte temporale [  $N(-DD)$  ].



Inoltre, all'interno delle classi di rating prodotte dalle agenzie, le probabilità di default delle diverse società sono concentrate intorno alla mediana. Tuttavia, la media delle probabilità d'insolvenza per ogni classe di rating risulta essere maggiore della mediana relativa alla medesima classe. Ciò accade perché, in ogni classe di rating, vi è un gruppo di società che hanno probabilità di default molto più alte rispetto alle altre società a causa dell'incremento approssimativamente esponenziale dei tassi di default all'aumentare del rischio di credito delle società. Queste sono società che avrebbero dovuto essere declassate ma, per il momento, ancora non lo sono state. Vi sono anche società che avrebbero dovuto subire un *upgrading*. La Tabella 4 mostra quanto abbiamo appena descritto.

Figura 16. Trasformazione delle *distance to default* in *expected default frequencies*.



Da quanto è stato descritto in precedenza possiamo trarre tre conclusioni:

1. dal momento che le agenzie modificano i rating con ritardo rispetto all'effettivo peggioramento della qualità creditizia, la probabilità di restare nella medesima classe di rating calcolata in base ai dati storici risulta sovrastimata;
2. la media delle probabilità di default, all'interno della stessa classe di rating, è superiore rispetto a quella mostrata dalle società le cui probabilità sono molto vicine alla mediana;
3. dal momento che la probabilità di restare nella medesima classe e quella di default sono sovrastimate, le probabilità di transizione (*upgrading* o *downgrading*) sono sottostimate.

A causa di queste tre distorsioni, la matrice delle transizioni costruita dalle agenzie di rating presenta una concentrazione di probabilità lungo la diagonale principale che è, forse, eccessiva. Si veda la Tabella 5.

**Tabella 4. Variazioni della EDF all'interno delle diverse classi di rating.** La figura mostra che, per ogni classe, la mediana è sempre minore della media. Ciò mostra la presenza di società che avrebbero già dovuto subire un declassamento. Fonte: Moody's KMV.

Quantiles	10	25	50	75	90	Media
AAA	0.02	0.02	0.02	0.02	0.10	0.04
AA	0.02	0.02	0.02	0.04	0.10	0.06
A	0.02	0.03	0.08	0.13	0.28	0.14
BBB	0.05	0.09	0.15	0.33	0.71	0.30
BB	0.12	0.22	0.62	1.30	2.53	1.09
B	0.44	0.87	2.15	3.80	7.11	3.30
CCC	1.43	2.09	4.07	12.24	18.82	7.21

KMV ha prodotto una matrice delle transizioni basata sul modello di Merton raggruppando le società sulla base delle probabilità di default. Le società con EDF minore di 2 b.p. ottengono rating AAA, quelle con EDF compresa tra 3 e 6 b.p. hanno un rating pari a AA, quelle con EDF tra 7 e 15 b.p. ottengono un rating pari ad A e così via. Disponendo della serie storica delle EDF per tutte le diverse società è stato possibile creare una nuova matrice delle transizioni (Tabella 6) che ha una concentrazione di probabilità lungo la diagonale principale molto minore di quella mostrata dalla Tabella 5.

**Tabella 5. Matrice delle transizioni dei rating (valori espressi in percentuale).** Fonte: Standard & Poor's.

Rating	Rating alla fine dell'anno							Default
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.022	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Le due matrici di transizione confermano le intuizioni teoriche. Quella costruita da Moody's KMV presenta una distribuzione della massa di probabilità in modo più uniforme tra le varie classi di rating. Le probabilità di "migrazione" del credito sono molto superiori rispetto a quelle riscontrate da Standard & Poor's così come sono

maggiori le probabilità di default per le società con rating elevati. Tendenza inversa per le società con rating bassi (CCC e B), le stime di Moody's KMV mostrano, per queste società, probabilità di default minori rispetto a quelle stimate dalle agenzie di rating.

**Tabella 6.** Matrice delle transizioni costruita da Moody's KMV (valori espressi in percentuale).

Rating	Rating alla fine dell'anno (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	66.26	22.22	7.37	2.45	0.86	0.67	0.14	0.02
AA	21.66	43.04	25.83	6.56	1.99	0.68	0.20	0.04
A	2.76	20.34	44.19	22.94	7.42	1.97	0.28	0.10
BBB	0.30	2.80	22.63	42.54	23.52	6.95	1.00	0.26
BB	0.08	0.24	3.69	22.93	44.41	24.53	3.41	0.71
B	0.01	0.05	0.39	3.48	20.47	53.00	20.58	2.01
CCC	0.00	0.01	0.09	0.26	1.79	17.77	69.94	10.13

### Credit Risk Case per il software RIT

Il software RIT è stato sviluppato con la finalità di consentire la diffusione dell'*experiential learning*. Questa metodologia d'insegnamento, ampiamente utilizzata oltreoceano, ha lo scopo di integrare la teoria con la pratica. Oltre allo studio teorico del problema gli studenti sono incentivati a risolvere *cases* empirici ed il RIT<sup>19</sup> è il software utilizzato da numerose università nordamericane (University of Toronto, Massachusetts Institute of Technology, HEC University of Montreal, etc.) per le simulazioni di tali *case* empirici. Tale software è stato costruito per consentire agli studenti di applicare le loro conoscenze teoriche in contesti governati dall'incertezza. Per esempio, sono disponibili *cases* sviluppati dal FRTL<sup>20</sup> in cui gli studenti imparano come funzionano i mercati, come scambiare titoli finanziari sui mercati, come identificare e quantificare determinate tipologie di rischio. Il RIT può esser visto come un simulatore di volo, si carica un determinato scenario e gli studenti attraverso la simulazione hanno la possibilità di provare in modo diretto le

<sup>19</sup> Rotman Interactive Trader è un software sviluppato dalla Rotman School of Management, University of Toronto.

<sup>20</sup> Financial Research and Trading Lab (FRTL) della Rotman School of Management, University of Toronto.

implicazioni di quel determinato scenario e sono spronati a sviluppare strategie che permettano di ottimizzare la propria performance. Gli scenari sono ripetuti in modo iterativo e possono essere generati in modo casuale oppure possono essere predeterminati dal docente a seconda dello scopo. Per esempio, se si vuole simulare una situazione di *crash* sui mercati finanziari è sufficiente caricare quel particolare scenario. Gli studenti sono così incentivati ad analizzare la reazione del mercato e degli altri colleghi ad una tale situazione e devono sforzarsi nella ricerca di strategie che permettano di migliorare le proprie performance.

Il RIT fornisce anche la possibilità di utilizzare modelli Excel da “collegare” in tempo reale con il mercato simulato in modo da illustrare agli studenti come la teoria possa essere trasformata in varie strategie. Per esempio, il foglio Excel può essere utilizzato per calcolare i prezzi attesi e/o gli *hedge ratio* necessari per seguire una determinata strategia di *risk management*. Oppure, calcolare le greche di un portafoglio di opzioni per valutare l’esposizione ai diversi fattori di rischio. Gli studenti, seguendo tale approccio, imparano come trasferire nella pratica le formule apprese dai libri di testo.

Ogni *case* deve essere progettato e programmato seguendo le istruzioni fornite dal FRTL. In questo paragrafo mostreremo un *case* che si basa sul modello di Merton descritto nel paragrafo precedente e stimola gli studenti all’analisi delle informazioni che possano avere un impatto sulla struttura finanziaria della società. Tale *case* può essere utilizzato per fini didattici in corsi di *Risk Management* ma può anche essere utile per la valutazione delle capacità degli studenti di costruire un semplice modello Excel che permetta una corretta stima dei movimenti dei prezzi in seguito all’arrivo di news dal mercato. Inoltre, qualora non si sia interessati alla costruzione del modello, abbiamo costruito un foglio Excel che può essere utilizzato per aiutare i *trader* durante la simulazione.

Il *case package* è, pertanto, costituito da tre file:

1. un file pdf che descrive il case, *case brief*;
2. un file Excel che dovrà essere caricato dal docente sul server, *case server*;
3. un file Excel che può essere utilizzato dai *trader* durante la simulazione, *trader’s guide*.

Cominciamo dalla descrizione del *case brief*. In questo *case* i *trader* sono impegnati nella negoziazione di quattro titoli (Apple, General Electric, Shell e UBS). Nella nostra simulazione immaginiamo che se il titolo UBS fosse privo di rischio il suo prezzo dovrebbe essere pari ad un valore che definiamo  $P_{UBS}^{risk\ free}$ . Sappiamo però che un'azione non è mai priva di rischio ed immaginiamo che il suo andamento sia governato dal seguente moto:

$$P_{UBS} = P_{UBS}^{risk\ free} \cdot (1 - \alpha \cdot s_{UBS})$$

dove:

- $P_{UBS}$  rappresenta il prezzo dell'azione UBS considerando il suo rischio di credito;
- $s_{UBS}$  è il *credit spread* calcolato secondo il modello di Merton

$$s_{UBS} = - \frac{\ln \left( N(d_2) + \frac{A_{UBS} \cdot N(-d_1)}{D_{UBS}} \right)}{T_{UBS}}$$

$A_{UBS}$  rappresenta il totale delle attività di UBS;

$D_{UBS}$  rappresenta il totale del debito;

$T_{UBS}$  la scadenza del debito espressa in anni;

$$d_1 = \frac{-\ln(L)}{\sigma_A \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma_A \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

$\sigma_A$  rappresenta la volatilità delle attività aziendali;

- $\alpha$  è un parametro che misura l'avversione al rischio degli investitori, incrementi di tale parametro faranno diminuire il prezzo delle azioni a parità di *credit spread*.

Quanto descritto per il titolo UBS vale anche per gli altri tre titoli.

Durante la simulazione saranno rese note a tutti i *trader* delle informazioni che modificheranno i livelli iniziali del valore delle attività, della volatilità delle stesse attività, del debito e della sua scadenza ed anche del parametro  $\alpha$ . I *trader* dovranno essere in grado di interpretare tali notizie inserirle in un modello che fornisca delle stime sul futuro andamento del prezzo. Essi avranno anche una dotazione limitata di risorse e dovranno scegliere la composizione ottimale del proprio portafoglio, in base al set informativo in loro possesso.



Passiamo alla descrizione del *case server*. Esso è composto da vari fogli Excel ognuno con una funzione specifica. Nel foglio “General” sono contenute le istruzioni generali del case, numero di periodi per simulazione, durata in secondi e così via. In particolare, il *Credit Risk Case* è caratterizzato da un foglio “General” come quello mostrato in Figura 17. Il numero di periodi (*Periods*) è stato posto pari ad 1, il numero di secondi necessari per ogni simulazione (*TicksPerPeriod*) è 600. La variabile *TicksPerYear* è pari a 7200, ciò implica che la nostra simulazione di 600 secondi sta in realtà replicando quello che accade in un mese di trading.

La variabile *StopLossTradingLimit* permette di limitare le perdite di un singolo *trader* al valore specificato in quella determinata cella. Quando le perdite superano tale limite, il *trader* è automaticamente impossibilitato ad eseguire altre transazioni. Tale variabile è utile per evitare che due persone si organizzino per alterare il mercato.

La variabile *IsEnforceTradingLimits* consente di limitare la posizione che ogni *trader* può assumere. Attivandola (cella posta sul valore 1) non si potrà sorpassare il limite imposto (la modalità di definizione del limite verrà spiegata più avanti). Nel nostro *case* abbiamo deciso di attivare il limite perché vogliamo che i *trader* debbano costruire il proprio portafoglio in una situazione di risorse limitate.

La variabile *IsAnonymousTrading* è settata sul valore 0 perché non vogliamo che i *trader* negozino in forma anonima. In altri termini, ogniqualvolta un *trader* immette un ordine al limite nel *book*, il suo nome è visibile da tutti gli altri partecipanti.

La variabile *IsRTDEnabled* ha un valore pari a 1 perché vogliamo che i dati del mercato simulato siano importabili in Excel utilizzando la funzione “datitemporeale”<sup>21</sup>.

Tutte le variabili che iniziano con “UI\_” (“UI\_PORTFOLIO”, “UI\_BUYSELL\_ENTRY”, etc.) servono a permettere ai *trader* di accedere alle finestre del software denominate dalla parola che segue “UI\_” (PORTFOLIO, BUYSELL ENTRY, etc.). Noi abbiamo deciso di non rendere attive le finestre che si occupano della gestione degli *asset* e dei trasporti dal momento che tali finestre sono necessarie soltanto quando si utilizza un *case* che si occupa di *Commodities Trading*.

---

<sup>21</sup> Utilizzando Microsoft Office in versione inglese, l’equivalente della funzione “datitemporeale” è “RTD”.

Figura 17. Screenshot del foglio “General”.

	A	B	C	D	E
1	Variable	Notes	Value		
2	GameName		Credit Risk Case based on Merton's Model		
3	Periods	>0	1	Number of Trading Periods in the Case.	
4	TicksPerPeriod	seconds	600		
5	TicksPerYear	seconds	7200	Number of Seconds that's represented in a year. This is required to give the game time-scale. i.e. 600 second period, 2400 second year, means 1 trading period is 1/4 of a year (3 months). This is relevant for interest payments, shipping times, etc.)	
6	MarkToMarketsPerPeriod	#/period	1	Number of times in a period that mark to market settlements are handled.	
7	OrderBookLimit	%	100	% of net gross trading limit that applies to the security you are trading	
8	StopLossTradingLimit	\$	3000000	If a trader's P/L exceeds this value, they can no longer submit trades, use assets, etc	
9	IsSecuredLogin	0 1	0	Enable/Disable users from connecting to the server without a pre-existing account.	
10	IsEnforceTradingLimits	0 1	1	Prevents traders from exceeding their trading limits. 0 allows them to exceed it but will have a pop-up on the sever application if a limit is exceeded.	
11	IsAnonymousTrading	0 1	0	All trades in the order book are shown as ANON.	
12	IsRTDEnabled	0 1	1	Allow RTD Links	
13	UI_PORTFOLIO	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
14	UI_BUYSELL_ENTRY	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
15	UI_SPREAD_ENTRY	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
16	UI_TRANSPORTATION_ARBITRAGE_ENTRY	0 1	0	Allow the user to access this window/module	
17	UI_OTC_ENTRY	0 1	0	Allow the user to access this window/module	
18	UI_BOOK_TRADER	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
19	UI_LADDER_TRADER	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
20	UI_TRADE_BLOTTER	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
21	UI_ASSETS	0 1	0	Allow the user to access this window/module	
22	UI_TRANSACTION_LOG	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
23	UI_NEWS	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
24	UI_CHARTING	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
25	UI_TRADER_INFO	0 1	1	Allow the user to access this window/module	
26	UI_CHAT	0 1	0	Allow the user to access this window/module	
27	DefaultWorkSpace	string		FEATURE NOT IMPLEMENTED YET - Name of the template to load by default. If blank, it will load no workspace. Allowed "Starter, Intermediate, Advanced"	
28					

Nel foglio “Securities” sono contenute tutte le informazioni relative ai titoli. La Figura 18 contiene uno screenshot di tale foglio.

Oltre alla definizione dei nomi dei titoli (*Ticker*) e della loro tipologia (*Type*) è necessario specificare se tali titoli possano essere negoziati o meno. Nel nostro *case* essi devono essere negoziati e abbiamo posto il valore della variabile *IsTradeable* pari a VERO per ogni titolo (avremmo anche potuto inserire 1 perché in Excel VERO=1 e FALSO=0).

*IsFollowPath* è una variabile molto particolare. Ponendola pari a 1 possiamo simulare un mercato in cui la liquidità è infinita e ciò può essere utile a scopi didattici quando si utilizzano le opzioni e ci si vuole concentrare sulle strategie da adottare con le stesse piuttosto che sulla loro liquidità. Ponendo questa variabile pari a 0 il software simula un

### Capitolo 3 – Modelli per il rischio di credito

mercato vero pertanto potranno sorgere situazioni di illiquidità a seconda dei parametri che specificheremo di seguito.

*StartPeriod* e *StopPeriod* servono, rispettivamente, ad indicare al software il periodo a partire dal quale il titolo inizia ad essere negoziato oppure cessa di essere negoziato.

*StartPrice* indica il prezzo di partenza del titolo. *MinPrice* e *MaxPrice* indicano, rispettivamente, il prezzo minimo e quello massimo che saranno accettati per i *limit order*. Tutti gli ordini al di sotto del *MinPrice* saranno considerati nulli e non verranno presi in considerazione dal software. Stessa cosa accade per gli ordini che stanno al di sopra del *MaxPrice*.

*IsShortAllowed* è stata posta pari ad 1 perché vogliamo che sia possibile effettuare le vendite allo scoperto. Se così non fosse vi sarebbe un'asimmetria tra le news positive, che sarebbero sfruttabili dai *trader*, e quelle negative, che invece non potrebbero essere utilizzate dai *trader* per fini speculativi.

*TradingFee* indica le commissioni che devono essere pagate per l'utilizzo dei *market order*. Esse possono essere calcolate in diversi modi (per unità, per transazione o per percentuale) modificando la variabile *TradingFeeType*.

Tutte le variabili che iniziano con "CT\_" si riferiscono alle azioni dei *Computerized ANON Trader* che aggiungono liquidità al mercato e indirizzano i prezzi verso il *path* definito dal modello (che spiegheremo meglio più avanti in questo lavoro). *CT\_IsEnabled* permette di scegliere tra un mercato in cui vi siano *Computerized ANON Trader* ed uno in cui non vi sono. *CT\_Frequency* indica il numero di ordini che gli *ANON Trader* eseguono in un minuto. Tanto più alto è questo valore tanto più vi sarà liquidità sul mercato. *CT\_Spread* indica lo *spread* che sarà utilizzato dagli *ANON Trader* mentre *CT\_Size* è espressa in dollari ed indica il valore medio degli ordini immessi dagli *ANON Trader*. Il valore di ogni ordine è pari al prezzo moltiplicato per la quantità pertanto possiamo ricavare il numero medio di titoli che verranno comprati/venduti dagli *ANON Trader* semplicemente dividendo per il prezzo corrente dell'azione.

Figura 18. Screenshot del foglio “Securities”.

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Variables</b>	<b>Notes</b>	<b>Values &gt;</b>			
2	<b>Ticker</b>		APPLE	GE	SHELL	UBS
3	<b>Description</b>	String				
4	<b>Type</b>	SPOT FUTURE INDEX OPTION	STOCK	STOCK	STOCK	STOCK
5	<b>UnitMultiplier</b>	Integer	1	1	1	1
6	<b>DisplayUnit</b>	String	Share	Share	Share	Share
7	<b>IsTradeable</b>	0 1	VERO	VERO	VERO	VERO
8	<b>IsFollowPath</b>	0 1 (Bid/Ask will follow path exactly +/- spread)	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
9	<b>StartPeriod</b>	Must be greater than 0	1	1	1	1
10	<b>StopPeriod</b>	Must be equal to or less than the # of periods.	1	1	1	1
11	<b>StartPrice</b>	Real number expressed as \$	\$70.59	\$59.67	\$58.22	\$31.49
12	<b>MinPrice</b>	Real Number, can be negative	0	0	0	0
13	<b>MaxPrice</b>	Real Number, can be negative	200	200	200	200
14	<b>QuotedDecimals</b>	integer	2	2	2	2
15	<b>IsShortAllowed</b>	0 1	1	1	1	1
16	<b>TradingFee</b>	number	0.02	0.02	0.02	0.01
17	<b>TradingFee Type</b>	PER_UNIT   PER_TRADE   PERCENTAGE	PER_UNIT	PER_UNIT	PER_UNIT	PER_UNIT
18	<b>DistressedSettlement</b>	If futures deliver and trader doesn't have product.				
19	<b>MaxTradeSize</b>	integer	25000	25000	25000	25000
20	<b>RiskType</b>	String linked to the TradingLimits Page	Limit-CR	Limit-CR	Limit-CR	Limit-CR
21	<b>RiskUnit</b>	Integer	1	1	1	1
22	<b>CT_IsEnabled</b>	0 1 - Turns on Computerized ANON traders	1	1	1	1
23	<b>CT_Frequency</b>	#/minute, represents liquidity	120	120	120	120
24	<b>CT_Spread</b>	\$spread used for ANON Traders and FollowPath	\$0.15	\$0.15	\$0.10	\$0.10
25	<b>CT_Size</b>	\$ per trade only used for ANON traders	1,400,000	1,000,000	1,000,000	700,000
26	<b>CT_IsInitializeBook</b>	0 1 - Do you want orders sent at first tick?	1	1	1	1
27	<b>CT_InitialBookSize</b>	How many orders to submit at first tick?	50	50	50	50
28	<b>CT_Aggressiveness</b>	0 to 10, how aggressive ANON trades to path	40	40	40	35
29	<b>CT_ReversionMultiplier</b>	Multiplier, how aggressive ANON trades to path	20	20	20	20
30	<b>PATH_PathSheet</b>	Name of an Excel Sheet that has the path	\$APPLE	\$GE	\$SHELL	\$UBS
31	<b>PATH_PathStartTick</b>	Integer, what's the first tick to use for trading path	1	1	1	1
32						

*CT\_IsInitializeBook* è una variabile che governa il momento in cui inizia l'attività degli ANON Trader. Quando settata su 1 fa sì che l'order book sia riempito dagli ANON Trader già a partire dal primo secondo di simulazione. Se settata su zero, l'order book apparirà “vuoto” e soltanto quando la simulazione sarà iniziata gli ANON Trader cominceranno a immettere i propri ordini. *CT\_Aggressiveness* e *CT\_ReversionMultiplier* sono due variabili che permettono di calibrare con quale velocità gli ANON Trader eliminano eventuali scostamenti del prezzo dal path pregenerato. Tanto più il valore di queste due variabili è elevato tanto più gli ANON Trader manterranno il prezzo vicino a quello generato dal modello.

In *PATH\_PathSheet* si deve indicare il nome del foglio in cui è contenuto il path generato dal modello. Di questo ci occuperemo più nel dettaglio nel prosieguo di questo lavoro. La

variabile *RiskType* deve essere costituita da una stringa che va collegata al foglio “Trading Limits”. In tale foglio dobbiamo specificare due limiti, il *gross* ed *net limit*, così come due penalizzazioni (*finer*) in caso di superamento di tali limiti. Il *gross limit* è costituito dal numero massimo di posizioni che un trader può assumere ed è calcolato come somma algebrica delle posizioni lunghe più il valore assoluto delle posizioni corte. Il *net limit* è dato invece dalla posizione netta che il trader possiede ed è calcolato come somma algebrica delle posizioni lunghe e quelle corte. È banale che il *net limit* debba essere sempre minore rispetto al *gross limit*. Nel caso in cui nel foglio “General” avessimo dato la possibilità di superare i limiti di posizione, si dovrebbero prevedere delle *finer* che nel foglio devono essere introdotte come numero di dollari per ogni unità che supera il limite. Ipotizziamo che un trader abbia una posizione lunga pari a 100000 unità del titolo ABC ed una posizione corta pari 20000 unità del titolo XYZ. La sua *net position* sarà 80000 unità mentre la sua *gross position* sarà di 120000 unità. Se ipotizziamo che il *net* ed il *gross limit* siano, rispettivamente pari a 100000 e 50000 e che le *finer* siano entrambe pari a 0.1\$ per ogni titolo che supera il limite, il nostro trader subirà la seguente penalizzazione: sarà multato di 3000\$  $[0.1\$ (80000-50000)]$  per aver superato il *net limit*; sarà multato di 2000\$  $[0.1\$ (120000-100000)]$ .

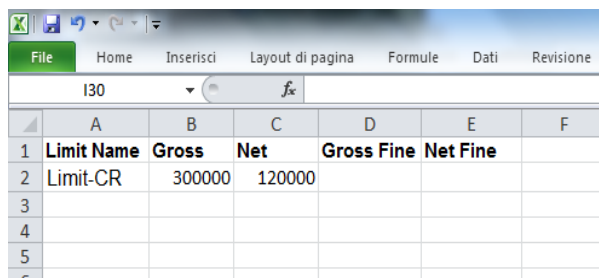
Nel nostro *case* abbiamo chiamato la stringa “Limit-CR” e l’abbiamo riportata poi nel foglio “TradingLimits” come mostra la Figura 19. Il *gross limit* è stato fissato pari a 300000 mentre il *net limit* è stato posto pari a 120000. Le *finer* non sono state immesse poiché nel foglio “General” abbiamo reso impossibile superare i limiti.

Nel foglio “Settlements” devono essere indicati i prezzi finali dei diversi titoli in modo che siano concordi con quanto previsto dal modello, come mostra la Figura 20 . Ciò si ottiene, facilmente, collegando le celle del prezzo finale (*settlement price*) con l’ultima riga dei fogli in cui è mostrato il *path price* dei diversi titoli.

Per quanto concerne le news abbiamo predisposto un foglio Excel per ogni ticker. Al suo interno vi è un database da noi costruito con le il testo da mostrare ai *trader* per le varie news e l’impatto che esse devono avere sulle variabili del modello. Nella Figura 21 mostriamo il foglio “APPLE News”. In esso notiamo come ogni news sia riportata nella colonna “Headline” e alla sua sinistra siano indicati le modifiche ai valori delle variabili

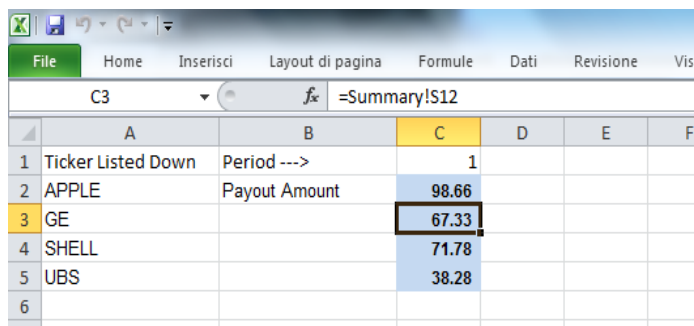
indotte dalla news. Le news possono essere di due tipi: quantitative oppure qualitative. Quando abbiamo una notizia quantitativa, vi è sempre un valore numerico ad essa associato che può essere inputato nel modello. Le notizie qualitative, invece, danno indicazioni su quale potrà essere l'andamento del prezzo ma non specificano alcun valore.

Figura 19. Screenshot del foglio "TradingLimits"



	A	B	C	D	E	F
1	Limit Name	Gross	Net	Gross Fine	Net Fine	
2	Limit-CR	300000	120000			
3						
4						
5						

Figura 20. Screenshot del foglio "Settlements".



	A	B	C	D	E	F
1	Ticker Listed Down	Period --->	1			
2	APPLE	Payout Amount	98.66			
3	GE		67.33			
4	SHELL		71.78			
5	UBS		38.28			
6						

Il nostro modello è stato studiato in modo tale da fornire sempre, dopo una notizia qualitativa anche una quantitativa di modo che alla fine del case il *settlement price* possa essere stimato dai *trader* attraverso un la costruzione di un modello Excel. Per ogni titolo è stato predisposto un data base di 75 news che vanno ad impattare sulle attività, sul debito, sulla volatilità delle attività oppure sulla scadenza del debito. Il file è stato costruito in modo tale che ad ogni *refresh* del foglio Excel il modello sceglie in modo casuale 5 news per ogni titolo, le "mescola" tra loro in modo che non vi sia una sequenza predeterminata per l'arrivo delle news e sceglie anche in modo casuale il momento (*tick*) al quale far

## Capitolo 3 – Modelli per il rischio di credito

arrivare la notizia sul mercato. Di tal modo, ogniqualvolta carichiamo il file sul server non si potrà mai conoscere in anticipo quale sarà il *path price* generato per i diversi titoli.

Nei fogli denominati “\$APPLE”, “\$GE”, “\$SHELL”, “\$UBS” va inserito soltanto il *path* dei vari titoli. Nel costruire tale *path* è stato notato che se ci fossimo limitati a renderlo uguale al valore mostrato dalla seguente formula

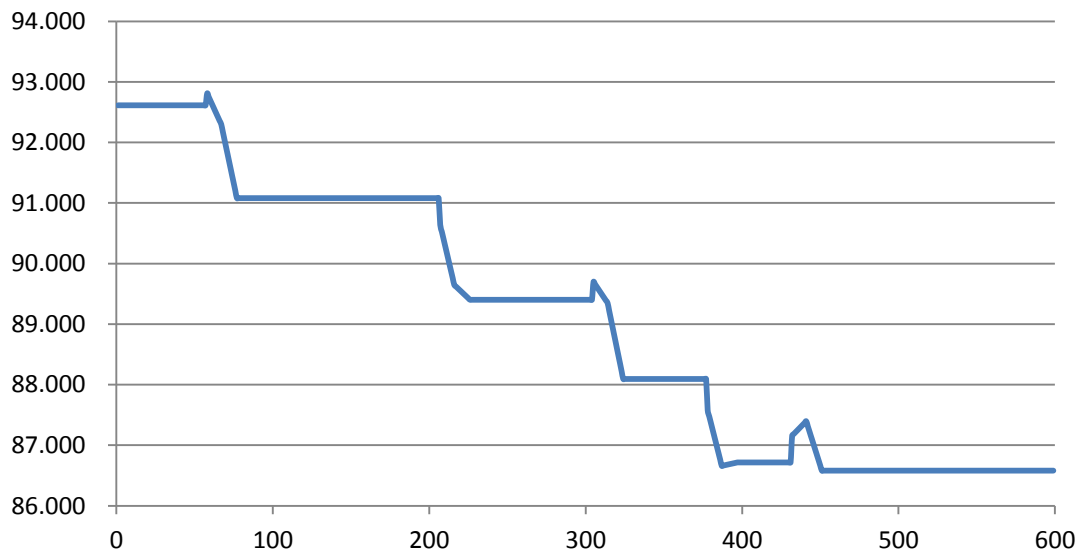
$$P_{UBS} = P_{UBS}^{risk\ free} \cdot (1 - \alpha \cdot S_{UBS})$$

avremmo avuto dei “sentieri” per il prezzo che non corrispondono a ciò che osserviamo nella realtà. Si veda la Figura 22. Abbiamo allora deciso di aggiungere una componente stocastica che faccia oscillare il prezzo intorno al valore “vero” rendendo il movimento del prezzo del titolo molto simile a quello che si osserva nella realtà. Tale componente stocastica ha una media nulla, pertanto, alla fine del *case* essa risulterà ininfluente ed il prezzo osservato nel mercato simulato tornerà ad allinearsi con quello mostrato dal modello. Si veda la Figura 23.

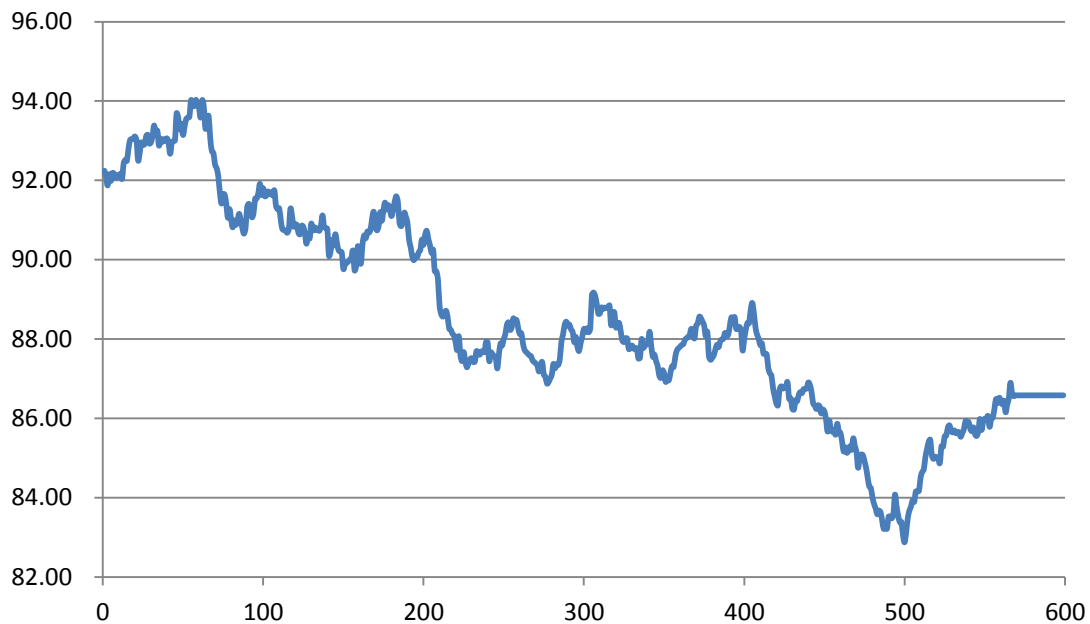
Figura 21. Screenshot del foglio “APPLE News”

APPLE					Headline	
	D	A	Sigma A	T		
1						
2						
3	1	0.000	80.000	0.00%	0.000	GOOGLE IS GOING TO STOP SELLING SMARTPHONE ON THE WEB, ITS GALAXY NEXUS WAS A COMPLETE FAILURE. THEY CANNOT COMPETE WITH IPHONE WHICH, IN THE LAST QUARTER, HAS BROUGHT AN INCREASE OF 80 MLN TO THE TOTAL ASSETS OF APPLE'S COMPANY.
4	2	0.000	-105.000	0.00%	0.000	SMARTPHONES SALES FALL IN 2011, THIS WILL AFFECT ALL COMPANIES WORKING IN THE SECTOR
5	3	0.000	0.000	0.00%	-0.025	JP MORGAN MOVES APPLE TO UNDERVALUED FROM NEUTRAL BECAUSE IN THE LAST WEEK ITS DEBT MATURITY REDUCED BY 9 DAYS
6	4	0.000	0.000	0.00%	0.014	DUE TO FINANCIAL DISTRESS, APPLE CEO IS THINKING OF INCREASING THE MATURITY OF DEBT.
7	5	0.000	0.000	0.00%	0.014	MATURITY OF DEBT HAS INCREASED BY 5 DAYS.
8	6	0.000	-105.000	0.00%	0.000	IPHONES' SALES DECREASED IN 2011, ANALYSTS ESTIMATE THAT THE ASSET VALUE OF THE COMPANY WILL DECREASE BY 105 MLN.
9	7	0.000	120.000	0.00%	0.000	HP SAYS MAY WITHDRAW FROM PC BUSINESS IN EUROPE. ACCORDING TO ANALYSTS, THIS WILL CAUSE AN INCREASE IN THE ASSETS VALUE FOR ALL ITS COMPETITORS BY 120 MLN.
10	8	0.000	0.000	-7.00%	0.000	VOLATILITY OF ASSET VALUE FOR APPLE IS EXPECTED TO DECREASE BY 7%
11	9	0.000	0.000	5.00%	0.000	ECONOMISTS AND ANALYSTS ARE UNCERTAIN ABOUT THE FUTURE DIRECTION OF WORLD ECONOMY, ESPECIALLY FOR TECHNOLOGY INDUSTRY. IT IS EXPECTED THAT ASSET VOLATILITY WILL INCREASE
12	10	0.000	0.000	5.00%	0.000	ASSET VOLATILITY, ACCORDING TO ANALYSTS, HAS INCREASED BY 5% FOR COMPANIES OF TECHNOLOGY SECTOR.
13	11	0.000	0.000	6.00%	0.000	VOLATILITY OF ASSET VALUE FOR APPLE IS EXPECTED TO INCREASE BY 6%
14	12	0.000	130.000	0.00%	0.000	A REPORT FROM GOLDMAN SACHS SHOWS THAT DUE TO THE FACT THAT UNEMPLOYMENT RATE DECREASED TO 4%, CONSUMERS WILL LIKELY BUY TECHNOLOGY PRODUCT (SMARTPHONES, LAPTOP, TABLET, ETC.).
15	13	0.000	130.000	0.00%	0.000	DUE TO THE INCREASE IN CONSUMPTION FOR TECHNOLOGY PRODUCT, APPLE'S ASSETS HAVE INCREASED BY 130MLN.
16	14	0.000	-88.000	0.00%	0.000	APPLE SALES DID NOT MATCH ANALYSTS ESTIMATE. ITS ASSETS VALUE IS EXPECTED TO DECREASE BY 88 MLN.
17	15	0.000	-115.000	0.00%	0.000	T-MOBILE USA AND RIM INTRODUCE A NEW BLACKBERRY STORM THAT THAT HAS A WONDERFUL TOUCH SCREEN. EXPERTS ARE REALLY EXCITED ABOUT IT AND THEY ARE SURE IT WILL BE A STRONG COMPETITOR FOR APPLE'S IPHONE.
18	16	0.000	-115.000	0.00%	0.000	NEW BLACKBERRY STORM'S SALES HAVE BEEN EXTRAORDINARY. ANALYSTS ESTIMATES SAY THAT SAMSUNG ASSETS VALUE DECREASED OF 160 MLN WHILE APPLE ASSET VALUE DECREASED OF 115 MLN.
19	17	0.000	0.000	0.00%	0.019	APPLE CFO SUGGESTED TO INCREASE THE MATURITY OF DEBT BY 7 DAYS. CEO AGREED.
20	18	0.000	0.000	0.00%	-0.022	DUE TO THE IMPROVEMENT IN FINANCIAL STRUCTURE OF ITS COMPANY, APPLE CEO IS THINKING OF DECREASING THE MATURITY OF DEBT.
21	19	0.000	0.000	0.00%	-0.022	MATURITY OF DEBT HAS DECREASED BY 7 DAYS.
22	20	0.000	119.000	0.00%	0.000	IN THE LAST QUARTER, APPLE HAS HAD THE HIGHEST EARNING OF ALL US COMPANIES. ITS ASSETS VALUE INCREASED BY 119 MLN
23	21	0.000	90.000	0.00%	0.000	APPLE HAS SHOWN ITS NEW MAC BOOK PRO WITH A HIGH DEFINITION TOUCH SCREEN. ITS THE FIRST TIME THAT A LAPTOP HAS ALSO A TOUCH SCREEN AND EXPERTS ARE SURE THAT THIS WILL BE THE BEGINNING OF A NEW ERA FOR LAPTOPS.
24	22	0.000	90.000	0.00%	0.000	NEW MAC BOOK PRO MADE APPLE ASSETS VALUE TO INCREASE BY 90 MLN.
25	23	0.000	98.000	0.00%	0.000	APPLE REVENUES FROM ITUNES INCREASED BY 12% IN THE LAST QUARTER. THIS CAN BE TRANSLATED IN AN INCREASE IN THE ASSET VALUE OF 98 MLN.

**Figura 22.** Grafico del *path* del titolo General Electric prima che sia introdotta la componente stocastica.



**Figura 23.** Grafico del *path* del titolo General Electric dopo aver introdotto la componente stocastica.





## Un modello à la Leland per la stima del rischio di credito

Il modello di Merton descritto nel paragrafo precedente assume che la struttura finanziaria di una società sia esogena. In realtà, la struttura finanziaria ottimale dipende dal trade-off tra i benefici derivanti dalla deducibilità fiscale del debito e gli svantaggi derivanti dai costi di bancarotta (commissioni da pagare per avvocati, commercialisti, etc.). Nel 1994, Hayne Leland ha proposto un modello in cui la struttura finanziaria della società è endogena<sup>22</sup>. Il modello è stato molto apprezzato tanto da meritarsi il primo premio Stephen A. Ross in Financial Economics indetto dalla fondazione per gli studi avanzati in Financial Economics (FARFE – Foundation for the Advancement of Research in Financial Economics). In questo paragrafo vogliamo fornire una descrizione di un modello strutturale à la Leland che permetta non solo di analizzare i derivati creditizi (CDS) e quelli azionari (opzioni) ma anche di risolvere il problema inverso, estrapolare informazioni relative al rischio di credito della società dalle quotazioni dei CDS e delle opzioni<sup>23</sup>. Il modello che presentiamo di seguito è stato sviluppato Barone, Gaia in “*An Equity-based Credit Risk Model*” e ad esso si fa riferimento per qualsiasi approfondimento. Tale modello è stato da noi utilizzato per l’analisi empirica che mostreremo nel paragrafo successivo.

Il modello permette la stima del *Leverage* di una società così come risulta dalle quotazioni degli strumenti derivati sui mercati finanziari. Prima di definire il *Leverage* è necessario definire il debito. Sappiamo che nella realtà il debito di una società è costituito da contratti di vario genere (obbligazioni, debiti con le banche, *commercial papers*, etc.). Al fine di permettere la trattabilità analitica del problema, già in Leland (1994), il debito è stato assunto essere pari ad una obbligazione perpetua con tasso d’interesse fisso che abbia la stessa “duration stocastica” del debito reale<sup>24</sup>. Questa assunzione è conveniente perchè è anche una buona *proxy* per il debito a breve scadenza che viene continuamente rinnovato (*perpetual roll-over*). Una delle caratteristiche affascinanti del modello strutturale presentato

---

<sup>22</sup> Leland, H. E., 1994. Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure. *Journal of Finance*, September, 49(4), pp. 1213-1252.

<sup>23</sup> Barone, G., 2011. An Equity-Based Credit Risk Model. *Working Paper*, 9 June.

<sup>24</sup> Si veda (Cox, Ingersoll, & Ross, 1979) per una disamina più approfondita del concetto di duration stocastica. Qui ci limitiamo a notare che essa è pari alla scadenza di uno zero coupon bond che abbia la stessa sensitività ai tassi d’interesse.

di seguito consiste nel fatto che il cosiddetto *default point* è una variabile endogena che viene ottenuto come soluzione ad un problema di massimizzazione degli azionisti della società. È possibile inoltre ottenere stime non solo delle probabilità di default ma anche dei *recovery rate* e dei *credit spread*.

Passiamo ad una descrizione più approfondita del modello. In Goldstein, Ju e Leland (2001) la società è divisa tra azionisti, obbligazionisti, l'autorità fiscale e le parti terze (avvocati, commercialisti, etc.).

L'autorità fiscale è inclusa tra i proprietari della società perché essa ha il diritto di chiedere una percentuale ( $\beta$ ) dei guadagni della società. Vedendo il problema da un altro punto di vista possiamo pensare che l'autorità fiscale possieda una quota pari ad  $\beta$  della società che chiameremo *tax claim*.

Gli azionisti utilizzano il capitale da essi apportato per comprare le attività aziendali il cui valore corrente è  $V_0$  e può essere costituito sia da beni materiali che da beni immateriali come il capitale umano. Gli azionisti emettono inoltre un'obbligazione perpetua con valore nominale  $Z$ , cedola pari a  $C = r Z$  e valore di mercato pari a  $B$ . Essi hanno anche un'opzione put americana perpetua che consente loro di vendere le attività aziendali ad un prezzo pari a  $Z$  agli obbligazionisti in caso di default. Tale opzione è definita *option to default*. Tale opzione è scritta su  $V$ , valore degli *asset* aziendali, ha un prezzo d'esercizio pari a  $Z$  ed ha un valore di mercato è pari a  $P$ . Si ipotizza che quando  $V = V_b$ , gli azionisti esercitano l'opzione, tale ipotesi è necessaria per evitare che il patrimonio netto della società diventi negativo.

Quando gli azionisti esercitano l'opzione, si dovranno sostenere dei costi, ipotizzati pari ad una percentuale  $\alpha$  dell'intera società, per pagare tutte le persone che saranno interessate nella procedura fallimentare (parti terze). Possiamo immaginare che, nel momento in cui avviene il default, le parti terze entrino in possesso di una quota pari ad  $\alpha$  della società.

Infine, gli obbligazionisti comprano un'obbligazione perpetua con valore facciale pari a  $Z$ , cedola pari a  $C$  e valore di mercato pari a  $B$ . L'obbligazione contiene due opzioni: una put americana perpetua venduta agli azionisti ed una *digital option*<sup>25</sup> perpetua venduta alle

---

<sup>25</sup> Le *digital option* sono anche note come *binary option* oppure come *all-or-nothing option*.

parti terze. La *digital option* può essere vista come un titolo venduto alle parti terze che paga una percentuale  $\alpha$  della società in caso di default e la chiameremo di seguito *bankruptcy security*. Gli obbligazionisti riceveranno la cedola fino a che  $V > V_b$  ma quando  $V = V_b$  l'opzione put americana sarà esercitata dagli azionisti ed essi riceveranno le attività aziendali con valore corrente  $V_b$ . Non solo, nello stesso istante, le parti terze eserciteranno la loro *digital option* perpetua chiedendo agli obbligazionisti una parte pari a  $\alpha$  di  $V_b$ .

Il modello assume che azionisti, obbligazionisti, parti terze siano tassati nel momento in cui ricevono, rispettivamente, i dividendi, le cedole e le commissioni. Inoltre tutti sono tassati allo stesso tasso  $\beta$ . Il valore corrente delle azioni, delle obbligazioni, della *bankruptcy security* e della *tax claim* (il diritto alla riscossione delle tasse dell'autorità fiscale) sono pari rispettivamente a  $S_0, B_0, U_0, G_0$ . Le posizioni delle varie parti possono essere riassunte come segue.

Gli azionisti hanno un portafoglio composto da quattro diversi strumenti:

1. sono lunghi sulle attività aziendali che hanno un valore corrente pari a  $V_0$ ;
2. hanno venduto agli obbligazionisti un titolo *risk-free* con valore facciale pari a  $V$ ;
3. hanno acquistato dagli obbligazionisti una *option to default* con valore corrente pari a  $P$ ;
4. sono corti su una *tax claim*, devono pertanto all'autorità fiscale un importo pari a  $G_S = \beta(V_0 - Z + P)$ .

La loro posizione ha un valore corrente pari a:

$$S_0 = (1 - \beta)(V_0 - Z + P) \quad 3.13$$

Gli obbligazionisti hanno un portafoglio composto anch'esso da quattro diversi strumenti:

1. hanno acquistato dagli azionisti un titolo *risk-free* con valore facciale pari a  $V$ ;
2. hanno venduto agli azionisti una *option to default* con valore corrente pari a  $P$ ;
3. hanno venduto alle parti terze una *bankruptcy security* perpetua che ha un valore corrente pari ad  $A$ ;
4. sono corti su una *tax claim* con valore corrente pari a  $G_B = \beta(Z - P - A)$ .

La loro posizione ha un valore corrente pari a:

$$B_0 = (1 - \beta)(Z - P - A) \quad 3.14$$

Le parti terze hanno un portafoglio composto da due strumenti:

1. hanno comprato dagli obbligazionisti una *bankruptcy security* con valore corrente pari ad  $A$ ;
2. sono corti su una *tax claim* con valore corrente pari a  $G_U = \beta A$ .

La loro posizione ha un valore corrente pari a:

$$U_0 = (1 - \beta)A \quad 3.15$$

L'autorità fiscale ha il diritto a riscuotere le tasse nei confronti:

1. degli azionisti per un valore pari a  $G_S = \beta (V_0 - Z + P)$ ;
2. degli obbligazionisti per un valore pari a  $G_B = \beta (Z - P - A)$ ;
3. della parti terze per un valore pari a  $G_U = \beta A$ .

La posizione complessiva ha un valore corrente pari a:

$$G_0 = \beta V_0 \quad 3.16$$

La somma dei valori correnti dei vari *stakeholders*,  $S_0$ ,  $B_0$ ,  $U_0$ ,  $G_0$ , deve essere pari a  $V_0$  pertanto:

$$S_0 + B_0 + U_0 + G_0 = (1 - \beta) (V_0 - Z + P) + (1 - \beta)(Z - P - A) + (1 - \beta) \quad 3.17$$

$$S_0 + B_0 + U_0 + G_0 = V_0$$

Si nota che la struttura finanziaria definita da Barone (2011) è diversa rispetto a quella mostrata da Leland (1994). In questo modello, infatti, *l'equity* dipende dalla tassazione come mostra l'equazione 3.13.

### La dinamica del valore delle attività aziendali

Il moto del valore delle attività aziendali è descritto attraverso un processo stocastico diffusivo che presenta la seguente equazione differenziale:

$$dV = (\mu_V - q_V) V dt + \sigma_V V dz \quad 3.18$$

dove

$\mu_V$  è il tasso di rendimento istantaneo atteso per la società;

$q_V$  è il *payout rate*

$\sigma_V$  è la volatilità delle attività aziendali;

$dz$  è un processo di Wiener standard.

Come mostrato da Merton, il prezzo  $f$  dei derivati che non pagano cedole deve soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$0.5 \cdot \frac{d^2 f}{dV^2} \cdot \sigma^2 V^2 + (r - q_V)V \cdot \frac{df}{dV} - rf = 0 \quad 3.19$$

Ipotizzando che  $V$  segua un processo stocastico diffusivo ben noto quale il moto geometrico browniano, si può trovare il prezzo degli strumenti posseduti dai vari *stakeholders*.

### I contratti

Il valore corrente della *bankruptcy security* è pari a:

$$A = \alpha V_b p_b \quad 3.20$$

dove

$\alpha$  rappresenta il rapporto tra i costi derivanti dal fallimento ed il valore di mercato delle attività prima che avvenga il default;

$V_b$  rappresenta il cosiddetto *default point* ossia quel valore delle attività aziendali che induce gli azionisti ad esercitare la loro *option to default*; esso è scelto dagli azionisti in modo da massimizzare il valore dell'*equity*:

$$V_b = Z \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}; \quad 3.21$$

$p_b$  rappresenta il valore di una *first touch digital option* perpetua che paga 1 € quando  $V=V_b$ :

$$p_b = \left( \frac{V_0}{V_b} \right)^{\gamma_2}; \quad 3.22$$

$\gamma_2$  rappresenta l'elasticità di una *first touch digital option* perpetua rispetto a  $V$ :

$$\gamma_2 = \frac{-(r - q_V - 0.5 \sigma_V^2) - \sqrt{(r - q_V - 0.5 \sigma_V^2)^2 + 2 \sigma_V^2 r}}{\sigma_V^2}; \quad 3.23$$

### Capitolo 3 - Modelli per il rischio di credito

$Z$  rappresenta il valore facciale di una obbligazione perpetua che paga una cedola pari a  $C$ ; il suo valore è pari a:

$$Z = \frac{C}{r}; \quad 3.24$$

L'*option to default* ha un valore corrente pari a:

$$P = (Z - V_b) \cdot p_b \quad 3.25$$

Sostituendo l'equazione 3.22 nella 3.10 abbiamo che:

$$S_0 = (1 - \beta) \left[ V_0 - Z + (Z - V_b) \left( \frac{V}{V_b} \right)^{\gamma_2} \right] \quad 3.26$$

Il modello che stiamo descrivendo assume che la volatilità delle attività,  $\sigma_V$ , sia costante. Tale ipotesi implica che la società non può modificare il suo *business risk* tuttavia è possibile il pagamento di interessi, dividendi e tasse. Il *payout rate* è così definito:

$$\begin{aligned} q_V V &= \text{interessi lordi} + \text{dividendi lordi} = \\ &= \text{interessi (al netto delle tasse)} + \text{dividendi (al netto delle tasse)} + \text{tasse} = \\ &= \frac{q_B B + q_S S}{1 - \beta} \end{aligned}$$

dove  $q_B$  rappresenta il tasso di rendimento dell'obbligazione al lordo delle tasse

$$q_B = r \frac{(1 - \beta)Z}{B} \quad 3.27$$

e  $q_S$  rappresenta il *dividend yield* al lordo delle tasse.

Il *payout rate* fa sì che per ogni unità di tempo (un anno) le attività diminuiscano di un ammontare pari a  $q_V V$ . Questo flusso di denaro serve per pagare gli interessi sul debito ed i dividendi. Qualora tale *cash flow* non sia sufficiente a pagare gli interessi sul debito, gli azionisti devono apportare capitale (è come se ricevessero un dividendo negativo). È bene notare che l'apporto di capitale aggiuntivo non induce gli azionisti a dichiarare bancarotta perché i futuri flussi di cassa possono essere tali da rendere ottimale il prosieguo delle attività aziendali.

**Default Point, Leverage e volatilità dell'equity**

Come è stato accennato in precedenza, gli azionisti devono determinare il valore ottimale del *default point*,  $V_b$ . Nel modello che stiamo descrivendo si assume che non sia possibile la rinegoziazione contrattuale del debito. Quest'ipotesi non è limitativa perché la rinegoziazione è, in realtà, sub-ottimali come ha mostrato Ingersoll in *Theory of Financial Decision Making* (pag.419)<sup>26</sup>. Segue che, se la società dichiara default, gli obbligazionisti ricevono tutte le attività aziendali e gli azionisti nulla. Gli azionisti scelgono  $V_b$  in modo da massimizzare il valore dell'*equity*. Nell'equazione 3.26, massimizzando  $S_0$  rispetto a  $V_b$  otteniamo:

$$V_b = Z \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \tag{3.28}$$

Il *Leverage*,  $L$ , è definito come il rapporto tra il valore delle attività aziendali al netto delle tasse ed il valore dell'*equity*:

$$L = \frac{(1 - \beta) V}{S} \tag{3.29}$$

Se si sostituisce l'equazione 3.16 nella 3.29 si avrebbe:

$$L = \frac{(1 - \beta) V}{V - Z + P} \tag{3.30}$$

Sostituendo l'equazione 3.25 nella 3.30 si ottiene:

$$L = \frac{(1 - \beta) V}{V - Z + (Z - V_b) \left(\frac{V_0}{V_b}\right)^{\gamma_2}} \tag{3.31}$$

---

<sup>26</sup> Ingersoll pone una domanda: "perché gli obbligazionisti non rinegoziano il debito nella speranza che in futuro la società li ripaghi per intero?". La risposta segue immediatamente: "Ebbene, date le condizioni attuali, gli obbligazionisti possono entrare in possesso di tutte le attività. Perché dovrebbero accontentarsi solo di una parte? Se la società in futuro avrà successo, gli obbligazionisti potranno godere di tutti i suoi profitti. L'unico caso in cui sarebbe conveniente la rinegoziazione da parte degli obbligazionisti si avrebbe se gli azionisti ricapitalizzassero la società. Dovrebbero però ricapitalizzarla con un ammontare di capitale che non solo copra la parte di patrimonio netto negativo ma anche con una parte aggiuntiva che costituirà la loro quota nella società rifinanziata. Ma gli azionisti non faranno mai un'azione del genere perché quest'opzione costerebbe loro più che quanto riceverebbero in caso di default".

Dalla 3.31 si nota subito che:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} L = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{V \rightarrow V_b} L = \infty$$

Ricordando il Lemma di Ito abbiamo che:

$$S \sigma_S = \Delta_S V \sigma_V \tag{3.32}$$

dove  $\Delta_S$  rappresenta il delta dell'*equity*,  $S$ , e  $\Delta_P$  rappresenta il delta della *option to default*,  $P$ . Ricordando le equazioni 3.13 e 3.25, derivandole rispetto a  $V$  si ottengono, rispettivamente,  $\Delta_S$  e  $\Delta_P$ :

$$\Delta_S = \frac{\partial S}{\partial V} = (1 - \beta) (1 + \Delta_P) \tag{3.33}$$

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial V} = \gamma_2 \frac{P}{V} \tag{3.34}$$

Sostituendo le equazioni 3.29, 3.33 e 3.34 nell'equazione 3.32 otteniamo che:

$$\sigma_S = \left(1 + \gamma_2 \frac{P}{V}\right) L \sigma_V \tag{3.35}$$

L'equazione 3.35 mostra che la volatilità dell'*equity* in questo modello è stocastica. Essa è infatti funzione di  $V$  che segue un moto geometrico browniano per ipotesi. Come mostrato per il *Leverage*, anche per la volatilità dell'*equity* possiamo analizzare i seguenti due limiti:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \sigma_S = \sigma_V \quad \text{e} \quad \lim_{V \rightarrow V_b} \sigma_S = \infty$$

### La struttura del debito

Il modello che stiamo descrivendo assume che il debito sia perpetuo. È quest'assunzione troppo forte? Leland<sup>27</sup> giustifica la scelta di ipotizzare un debito con vita infinita come segue: "In realtà, dal punto di vista teorico, già Modigliani e Miller (1958) e Merton (1974) hanno fatto quest'ipotesi nei rispettivi modelli. Inoltre, dal punto di vista pratico, la Bank of England ha emesso, occasionalmente, titoli consolidati (*Consols*) che pagano un tasso d'interesse fisso ma non hanno una scadenza e non ripagheranno mai il valore facciale.

---

<sup>27</sup> Leland, *Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure*, 1994, pag. 415.



Ancora, le azioni privilegiate pagano solitamente un dividendo prefissato e non hanno scadenza”. Nello stesso articolo Leland mostra che per un titolo obbligazionario a 30 anni con tasso fisso del 15% il rimborso del valore facciale rappresenta soltanto l’1.5% del valore del debito. Per un titolo obbligazionario con la medesima scadenza e tasso fisso del 10% il rimborso del valore facciale rappresenta il 5.7% del valore del debito. Inoltre si ricorda che alcune aziende hanno emesso titoli con scadenza a 50 anni ed addirittura la Disney ha emesso un titolo con scadenza a cento anni.

L’assunzione, alla luce di quanto mostrato, non è avulsa dalla realtà e, per di più, risulta particolarmente conveniente in sede di analisi empirica. Se utilizzassimo un modello come quello di Moody’s KMV mostrato nei paragrafi precedenti dovremmo ipotizzare un valore per la scadenza del debito mentre non è necessario farlo per modelli con debito perpetuo.

### La struttura a termine delle probabilità di default e dei Credit Default Swaps

Il modello permette la stima della probabilità di default, dei credit default swaps e delle opzioni scritte sull’equity.

Per le probabilità di default, si definisca  $Q(T)$  la probabilità di default tra il tempo 0 ed il tempo  $T$ , essa è pari alla probabilità che  $V$  raggiunga  $V_b$  prima di  $T$  (oppure in  $T$ ).

Rappresenta pertanto la *first passage time distribution function*:

$$Q(T) = N(-z_1) + \left(\frac{V_0}{V_b}\right)^{2(1-\lambda)} N(-z_2) \quad 3.36$$

dove 
$$z_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_b}\right) + (r - q_V - 0.5 \sigma_V^2) T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$z_2 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_b}\right) - (r - q_V - 0.5 \sigma_V^2) T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$\lambda = 1 + \frac{r - q_V - 0.5 \sigma_V^2}{\sigma_V^2}$$

L’equazione 3.36 fornisce la struttura a termine delle probabilità di default cumulate non condizionate e permette il calcolo della struttura a termine delle probabilità di default condizionate (*hazard rates*/intensità di default).

Per i Credit Default Swaps, si consideri un CDS a  $n$  anni i cui pagamenti sono dovuti alle date  $t_i$  con  $(1 \leq i \leq m \times n)$ , dove  $m$  rappresenta il numero di pagamenti l'anno. Si definisca una *annuity*,  $A_1$  che paga  $1/m$  ad ogni scadenza intermedia fino al tempo  $T$  oppure fino a che non avviene il default, al tempo  $\tau$  con  $\tau \leq T$ . Il valore di  $A_1$  è il seguente:

$$A_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m \times n} e^{-y_i t_i} [1 - Q(t_i)] \quad 3.37$$

dove  $y_i$  è il tasso d'interesse privo di rischio per la scadenza  $t_i$  e  $Q(t_i)$  rappresenta la probabilità di default non condizionata.

Si assume che, in caso di default al tempo  $\tau$ , il compratore di protezione riceve immediatamente un pagamento pari ad  $1-R$ , con  $R$  che rappresenta il *recovery rate* che è una variabile endogena del modello calcolata come segue:

$$R = \frac{(1 - \alpha)V_b}{Z} \quad 3.38$$

Sostituendo la 3.28 nella 3.38 si può ottenere una formula per il payoff del compratore di protezione,  $1 - R$ :

$$1 - R = \frac{1 - \alpha \gamma_2}{1 - \gamma_2} \quad 3.39$$

Tale payoff è ricevuto al tempo  $\tau$ . Il suo valore corrente è:

$$(1 - R) p_b(T) \quad 3.40$$

dove  $p_b(T)$  è il valore di una *first touch digital option* con scadenza pari a  $T$  che paga 1 € nel momento in cui la società dichiara default (per ipotesi il tempo  $\tau$ ).

La formula per il pricing di tale opzione con barriera  $V_b \leq V_0$  è stata ottenuta da Rubinstein e Reiner (1991)<sup>28</sup>:

$$p_b(T) = \left(\frac{V_b}{V_0}\right)^{\alpha+b} N(-z) + \left(\frac{V_b}{V_0}\right)^{\alpha-b} N(-z + 2b\sigma_V\sqrt{T}) \quad 3.41$$

con

---

<sup>28</sup> Rubinstein, M., & Reiner, E. (1991, October). "Unscrambling the Binary Code. *Risk*, 4(9), p. 75-83.

$$z = \frac{\ln\left(\frac{V_b}{V_0}\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + b \sigma_V \sqrt{T}$$

$$a = \frac{r - q_V - 0.5 \sigma_V^2}{\sigma_V^2}$$

$$b = \frac{\sqrt{(r - q_V - 0.5 \sigma_V^2)^2 + 2 \sigma_V^2 r}}{\sigma_V^2}$$

Sappiamo che, solitamente, i *credit default swaps* richiedono al compratore di protezione il pagamento del *CDS spread* maturato fino al tempo  $\tau$  a partire dall'ultima data di pagamento.

Ipotizzando che il default avvenga a metà tra due date di pagamento successive<sup>29</sup>, il valore corrente del payoff di un *CDS*,  $A_2$ , diventa:

$$A_2 = \left[ (1 - R) - 0.5 \frac{s}{m} \right] p_b(T) \quad 3.42$$

con  $s$  che rappresenta il *CDS spread* annuale. In equilibrio, si deve avere che il valore corrente dei pagamenti,  $sA_1$ , sia pari al valore corrente del payoff del *CDS*:

$$s A_1 = A_2 \quad 3.43$$

Sostituendo le equazioni 3.37, 3.41 e 3.42 nella 3.43 ed esplicitando per  $s$  abbiamo che:

$$s = \frac{(1 - R) p_b(T)}{\frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} p_b(T) + \sum_{i=1}^{m \times n} e^{-y_i t_i} [1 - Q(t_i)] \right\}} \quad 3.44$$

Per le opzioni, come mostrato da Barone (2011)<sup>30</sup>, si può ricavare il valore di una call europea con strike  $K$  e maturity pari a  $T$  scritta su  $S$  nel seguente modo

$$c = e^{-rT} E(S_T - K | V_T > V_T^* \cap V_T > V_b) \times Prob(V_T > V_T^* \cap V_T > V_b)$$

<sup>29</sup> Tale ipotesi è stata suggerita da Duffie e Singleton. Si veda Duffie, D. & Singleton, K. J., 2003. *Credit Risk*. Princeton University Press, pag.183-184.

<sup>30</sup> Barone, G., 2011. Equity Options, Credit Default Swaps and Leverage: A simple stochastic Volatility Model for Equity and Credit Derivatives. *Working Paper*, May. Disponibile al seguente indirizzo web: <http://ssrn.com/author=1004723>

### Capitolo 3 - Modelli per il rischio di credito

$$c = (1 - \beta) (V_{doc} + P_{uop} - Z R_{doc})$$

dove

$V_{doc}$  rappresenta il prezzo di una call *down and out asset or nothing* con prezzo d'esercizio pari a  $V_T^*$  e barriera pari a  $V_b$ ; il suo payoff è pari a  $V_T$  al tempo  $T$  se  $V_T > V_T^*$  e  $V_t > V_b$  per ogni  $0 < t \leq T$ :

$$V_{doc} = V_0 e^{-qvT} \left[ N(x) - \left( \frac{V_b}{V_0} \right)^{2\lambda} N(y) \right]$$

$P_{uop}$  rappresenta il prezzo di una put *up and out asset or nothing* con prezzo d'esercizio pari a  $P_T^*$  e barriera pari a  $P_b$ ; il suo payoff è pari a  $P_T$  al tempo  $T$  se  $P_T > P_T^*$  e  $P_t < P_b$ :

$$P_{uop} = P_0 \left[ N(-x_p) - \left( \frac{P_b}{P_0} \right)^{2\lambda_p} N(-y_p) \right]$$

$R_{doc}$  rappresenta il prezzo di una call *down and out cash or nothing* con prezzo d'esercizio pari a  $V_T^*$  e barriera pari a  $V_b$ ; il suo payoff è pari ad 1 € al tempo  $T$  se  $V_T > V_T^*$  e  $V_t > V_b$  per ogni  $0 < t \leq T$ :

$$R_{doc} = e^{-rt} \left[ N(x - \sigma_V \sqrt{T}) - \left( \frac{V_b}{V_0} \right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma_V \sqrt{T}) \right]$$

$V_T^*$  rappresenta quel valore delle attività aziendali che fa terminare la call *at the money*;

$$V_T^* = V_0 e^{(r - q_V - 0.5 \sigma_V^2)T + \varepsilon^* \sigma_V \sqrt{T}}$$

$P_T^*$  rappresenta il valore della *first touch digital option* descritta dall'equazione 3.38 quando  $V_T = V_T^*$ :

$$P_T^* = P_0 e^{(r - 0.5 \sigma_P^2)T - \varepsilon^* \sigma_P \sqrt{T}}$$

$\varepsilon^*$  è uno shock normale standardizzato che fa terminare *at the money* la call;  $N(\cdot)$  è la funzione di distribuzione normale standard e  $x, x_p, y, y_p, \lambda, \lambda_p$  e  $\sigma_p$  sono definite come segue:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_T^*}\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T}$$

$$x_P = \frac{\ln\left(\frac{P_0}{P_T^*}\right)}{\sigma_P \sqrt{T}} + \lambda_P \sigma_P \sqrt{T}$$

$$y = \frac{\ln\left(\frac{V_b^2}{V_0 V_T^*}\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T}$$

$$y_P = \frac{\ln\left(\frac{V_b^2}{V_0 V_T^*}\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T}$$

$$\lambda = 1 + \frac{r - q_V - 0.5 \sigma_V^2}{\sigma_V^2}$$

$$\lambda_P = 1 + \frac{r - 0.5 \sigma_P^2}{\sigma_P^2}$$

$$\sigma_P = -\gamma_2 \sigma_V$$

Lo stesso approccio seguito per la valutazione dell'opzione call può essere utilizzato per la valutazione di un'opzione put. In questo lavoro, nella parte empirica abbiamo utilizzato soltanto i dati di opzioni call pertanto rimandiamo a Barone (2011) qualsiasi altro approfondimento.

### Utilizzo del modello per l'analisi empirica

Il modello può essere utilizzato in vari modi:

1. per stimare il valore delle opzioni dati  $V_0, q_V, \sigma_V, Z$  oppure dati  $S_0, q_S, \sigma_S, L$ ;
2. per stimare i valori  $V_0, q_V, \sigma_V, Z$  date le quotazioni delle opzioni e dei *CDS spread*.

Per risolvere il problema al punto 2 è necessario risolvere un sistema di quattro equazioni costruito in modo da azzerare la differenza tra valori di mercato e valori teorici (stimati dal modello) dell'*equity*, della volatilità, del *dividend yield* e del *Leverage*. Il sistema è, pertanto, così costruito:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \beta) \left[ V_0 - Z + (Z - V_b) \left( \frac{V_0}{V_b} \right)^{\gamma_2} \right] - S_0 = 0 \\ \frac{\Delta_S V_0 \sigma_V}{S_0} - \sigma_S = 0 \\ \left( q_V \frac{V}{S} - r \frac{Z}{S} \right) - q_S = 0 \\ \frac{(1 - \beta) V_0}{S_0} - L = 0 \end{array} \right.$$

Non è possibile ottenere una soluzione analitica al sistema che pertanto va risolto numericamente.

### **Analisi empirica**

In questa sezione descriveremo i risultati ottenuti applicando empiricamente il modello descritto nel paragrafo precedente. L'analisi è stata effettuata su 17 banche appartenenti a 6 diversi Paesi (Italia, Francia, Germania, Svizzera, Spagna e USA). Utilizzando i dati relativi alle quotazioni dei *CDS spread*, delle opzioni call e delle azioni utilizzeremo il modello *à la Leland* per stimare le seguenti variabili:

- le probabilità di default
- il *Leverage*
- il *Recovery Rate*
- la *Distance to default (DD)*

Inoltre, compareremo i nostri risultati con quelli ottenuti, utilizzando un modello in forma ridotta (*reduced form*), dal *Risk Management Institute (University of Singapore)* e pubblicati sul loro sito web nell'ambito del progetto *Credit Research Initiative*.

### **I dati**

Abbiamo deciso di testare il modello su 17 banche per le quali abbiamo raccolto i dati dei *CDS spread* a 1, 3, 5, 7 e 10 anni e le quotazioni azionarie in data 12 Aprile 2012. Si veda la Tabella 7. Per ogni titolo abbiamo inoltre raccolto i dati relativi alle quotazioni di tre opzioni call (fa eccezione il "Banco Bilbao-Vizcaya" per il quale abbiamo i dati di sole due opzioni). Per tutti i titoli sono state prese in considerazione le opzioni con la scadenza più vicina alla data di osservazione che è risultata essere il 18 Maggio 2012 per tutti i titoli dal momento che esse risultano essere anche le più liquide. Si veda la Tabella 8.

Abbiamo raccolto anche alcuni dati di bilancio relativi alle attività totali ed al patrimonio risultanti dagli ultimi dati di bilancio disponibili così come il numero di azioni in circolazione. Il valore del debito nel modello *à la Leland* ( $Z$ ) è stato posto pari alla differenza tra le attività ed il patrimonio netto. Il dato più aggiornato riguardo le attività della banca è stato ottenuto utilizzando la formula "BS\_TOT\_ASSET" del software

Bloomberg. Per le banche, questa funzione permette di ottenere, in base ai dati di bilancio più aggiornati, le attività calcolate come la somma delle seguenti voci di bilancio: Liquidità, Disponibilità Bancarie, *Purchase and resell Agreement*, investimenti a breve (*Investments for Trade and Sale*), prestiti (*Net loans*), investimenti da portare a scadenza (*Investments held to maturity*), attivo fisso, altre attività, accettazioni bancarie (*Customers' Acceptances and Liabilities*)<sup>31</sup>. Il dato più aggiornato riguardante il patrimonio netto è stato ottenuto utilizzando la formula “TOTAL\_EQUITY” che fornisce i dati relativi al patrimonio netto come risultano dai dati di bilancio più recenti. Riportiamo i dati di bilancio nella Tabella 9. La capitalizzazione di mercato è stata ottenuta moltiplicando il numero delle azioni per il loro valore di mercato.

**Tabella 7.** CDS spread e quotazioni azionarie in data 12 Aprile 2012. Fonte: Bloomberg

Gruppo Bancario	Spread (in bps)					Prezzo azioni
	CDS 1 anno	CDS 3 anni	CDS 5 anni	CDS 7 anni	CDS 10 anni	
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	297	373	417	424	433	5.39
Banco Santander (SPA)	302	365	407	416	426	5.02
Bank of America (USA)	187	238	262	280	288	9.17
BNP-Paribas (FRA)	147	195	230	240	248	32.08
Citigroup (USA)	143	224	246	262	271	34.63
Commerzbank (GER)	152	201	237	253	262	1.72
Crédit Agricole (FRA)	191	236	280	284	291	4.12
Credit Suisse (CH)	97	137	165	177	187	24.53
Deutsche Bank (GER)	88	132	170	186	194	35.02
Intesa San Paolo (ITA)	298	349	384	396	404	1.22
JP Morgan	42	78	107	121	133	44.84
Mediobanca	282	311	342	351	357	3.97
Monte Paschi di Siena (ITA)	410	452	479	484	490	0.28
Societe Generale	214	272	305	316	324	18.90
UBS (CH)	112	155	180	194	202	11.80
Unicredit (ITA)	324	370	396	407	414	3.23
Wells Fargo (USA)	33	64	94	107	117	34.02

<sup>31</sup> Testo originale: “This is the sum of Cash & bank balances, Fed funds sold & resale agreements, Investments for Trade and Sale, Net loans, Investments held to maturity, Net fixed assets, Other assets, Customers' Acceptances and Liabilities”.

Fonte: Bloomberg.

**Tabella 8.** Quotazioni delle opzioni in data 12 Aprile 2012. Fonte: Bloomberg

Gruppo Bancario	Scadenza	Opzione 1		Opzione 2		Opzione 3	
		Strike	Prezzo	Strike	Prezzo	Strike	Prezzo
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	05/18/12	5.280	0.380	5.520	0.250		
Banco Santander (SPA)	05/18/12	4.890	0.370	5.130	0.230	5.360	0.140
Bank of America (USA)	05/18/12	8.000	1.320	9.000	0.610	10.000	0.220
BNP-Paribas (FRA)	05/18/12	31.000	2.530	32.000	1.930	33.000	1.410
Citigroup (USA)	05/18/12	34.000	1.910	35.000	1.400	36.000	0.960
Commerzbank (GER)	05/18/12	1.700	0.130	1.750	0.100	1.800	0.080
Crédit Agricole (FRA)	05/18/12	4.100	0.290	4.200	0.250	4.300	0.210
Credit Suisse (CH)	05/18/12	23.000	2.000	24.000	1.320	25.000	0.820
Deutsche Bank (GER)	05/18/12	34.000	2.500	35.000	1.900	36.000	1.380
Intesa San Paolo (ITA)	05/18/12	1.200	0.093	1.250	0.067	1.300	0.046
JP Morgan (USA)	05/18/12	44.000	2.080	45.000	1.490	46.000	1.040
Mediobanca (ITA)	05/18/12	3.900	0.269	4.000	0.217	4.200	0.132
Monte Paschi di Siena (ITA)	05/18/12	0.250	0.044	0.300	0.017	0.350	0.005
Societe Generale (FRA)	05/18/12	18.000	1.960	19.000	1.390	19.500	1.140
UBS (CH)	05/18/12	11.500	0.650	12.000	0.390	12.500	0.200
Unicredit (ITA)	05/18/12	3.100	0.307	3.200	0.250	3.300	0.199
Wells Fargo (USA)	05/18/12	34.000	1.090	35.000	0.650	36.000	0.370

**Tabella 9.** Dati di bilancio aggiornati all'ultimo rendiconto disponibile (in milioni). Fonte: Bloomberg.

Gruppo bancario	Azioni	Capitalizzazione	Attività	PN	Debito
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	5168.77	27856.04	600477.00	41361.00	559116.00
Banco Santander (SPA)	9455.06	47471.94	1283349.00	84155.00	1199194.00
Bank of America (USA)	10732.39	98416.00	1636300.00	174391.69	1461908.31
BNP-Paribas (FRA)	1207.75	38738.45	1965283.00	85626.00	1879657.00
Citigroup (USA)	2928.66	101404.93	1458500.00	137806.03	1320693.97
Commerzbank (GER)	5594.11	9599.49	661763.00	24803.00	636960.00
Crédit Agricole (FRA)	2498.02	10281.85	1723608.00	49292.00	1674316.00
Credit Suisse (CH)	1224.30	30032.08	830756.46	33947.35	796809.11
Deutsche Bank (GER)	929.50	32551.08	2103295.00	55805.00	2047490.00
Intesa San Paolo (ITA)	15501.28	18942.57	639221.00	47758.00	591463.00
JP Morgan	3817.36	171170.44	1740400.00	142310.23	1598089.77
Mediobanca	861.13	3418.68	76468.05	6303.79	70164.26
Monte Paschi di Siena (ITA)	11544.84	3272.96	240701.97	10981.74	229720.23
Societe Generale	776.08	14667.91	1181372.00	51112.00	1130260.00
UBS (CH)	3832.12	45219.04	1166500.00	47553.95	1118946.05
Unicredit (ITA)	5787.03	18680.53	926769.00	54798.00	871971.00
Wells Fargo (USA)	5273.24	179395.65	1000400.00	110147.76	890252.24



Abbiamo deciso di non convertire le valute diverse dall'Euro pertanto tutti i dati mostrati in questa sezione sono espressi nella valuta domestica per la banca analizzata (dollari per gli USA, franchi svizzeri per le banche svizzere ed Euro per tutte le Europee).

### I risultati

Abbiamo deciso di calibrare i parametri del modello in base alle quotazioni dei *credit default swaps*, delle quotazioni azionarie e di quelle opzionarie osservate in data 12 Aprile 2012.

Abbiamo dovuto ipotizzare un valore per  $\alpha$  (rapporto tra i costi derivanti dal fallimento ed il valore di mercato delle attività prima che avvenga il default) e  $\beta$  (che rappresenta l'aliquota di tassazione). In particolare abbiamo posto  $\alpha$  e  $\beta$  pari, rispettivamente, a 5% e 35%<sup>32</sup>.

Sono stati reperiti i tassi d'interesse privi di rischio che, seguendo quanto suggerito da Damodaran<sup>33</sup>, sono pari, per una determinata scadenza, al tasso di rendimento minimo del titolo di stato emesso nella medesima valuta. In particolare, per la zona Euro sono stati scelti i *Bund* tedeschi, per gli USA i *Treasury bond* e per la Svizzera i titoli di debito svizzero.

Infine, per ogni azienda abbiamo ancorato il livello del debito a quello risultante dall'ultimo bilancio. Il valore del debito ( $Z$ ) è stato pertanto posto pari al Debito Totale diviso per il numero di azioni in circolazione.

Dopo aver eseguito queste operazioni preliminari, abbiamo stimato i seguenti parametri:

- il valore delle attività aziendali ( $V$ );
- il *payout rate* ( $q_V$ );
- la volatilità delle attività aziendali ( $\sigma_V$ ).

Nella calibrazione del modello abbiamo fatto sì che ci fosse il *perfect fit* sia per i *CDS* che per l'*equity*. Per ogni banca abbiamo costruito un foglio Excel che mostra i valori così come presentati nella Tabella 10. Per le tabelle con i risultati di tutte le altre banche si veda

---

<sup>32</sup> Tali valori sono uguali a quelli scelti da Barone (2011).

<sup>33</sup> Damodaran, Aswath (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the value of any asset*, Wiley Finance.

l' Appendice 3. La Loss Function è stata calcolata come somma delle differenze logaritmiche tra i valori reali e quelli teorici (al quadrato). Hanno contribuito alla Loss Function le differenze logaritmiche del *CDS spread* a 5 anni, delle quotazioni azionarie e di quelle opzionarie. La Tabella 10 mostra i risultati ottenuti per il titolo Intesa San Paolo. Il modello si è adattato perfettamente ai dati mostrando una Loss Function con valore prossimo allo zero.

**Tabella 10.** Calibrazione del modello per il titolo Intesa San Paolo.

<b>Intesa San Paolo (ITA)</b>										
<i>CDS</i>										
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>		
5	0.70%	20.09%	79.91%	4.49%	384	384	1.00	0.00		
<b>Equity</b>		<b>Leverage</b>		<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>	
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>
1.22	1.22	10.00	0.00	4.42	3.54	31.72	2.11%	4.08	4.25%	8.82%
<i>Opzioni</i>										
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>			
0.10	1.20	0.09	0.09	1.00	0.00	34.63%	8.26			
0.10	1.25	0.07	0.07	1.00	0.00	32.95%	8.39			
0.10	1.30	0.05	0.05	1.00	0.00	32.12%	8.51			
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>		
8.32	38.16	5.179%	20.627%	0.698%	0.00			2.5673		

Il Leverage risulta esser pari a 4.42 ed il Recovery Rate pari a 8.82%. Tali valori sono in linea con quanto mostrato da Barone e Barone (2012)<sup>34</sup> i cui Leverage e Recovery Rate sono pari, rispettivamente, a 4.90 e 10.61%. Stesso discorso vale per le stime del titolo Mediobanca per il quale le nostre stime del Leverage e del Recovery Rate sono pari a 2.63 e 5.18% mentre quelle calcolate da Barone e Barone (2012) sono, rispettivamente, 2.19 e 5.07%. Differenze notevoli si sono avute invece per i titoli Unicredit e Banca Monte Paschi

<sup>34</sup> Barone, Emilio e Barone, Gaia, "Principali Banche Italiane: Probabilità d'Insolvenza", Working paper, gennaio 2012 (WP4)

Siena. Per il titolo Unicredit tale differenza può essere giustificata dall'aumento di capitale a pagamento varato dall'assemblea in data 15 Dicembre 2011 che ha fatto diminuire notevolmente il Leverage.

Avendo a disposizione i dati anche per i CDS a 3, 7 e 10 anni abbiamo calibrato il modello anche per tali scadenze ed abbiamo riportato nella Tabella 11 le probabilità di default stimate e le *Distance to Default*.

**Tabella 11.** Probabilità di default e *Distance to Default*.

Gruppo Bancario	Probability of Default				Distance to Default			
	3	5	7	10	3	5	7	10
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	11.06%	20.96%	32.21%	49.65%	5.114	3.277	2.629	2.362
Banco Santander	10.84%	20.62%	32.32%	50.63%	5.620	3.363	2.737	2.486
Bank of America (USA)	7.16%	13.91%	23.81%	39.41%	5.264	3.184	2.519	2.204
BNP-Paribas (FRA)	5.86%	13.67%	25.74%	43.61%	4.206	2.532	2.189	2.042
Citigroup (USA)	6.74%	12.86%	21.35%	36.36%	6.300	4.180	3.332	2.859
Commerzbank (GER)	6.09%	16.40%	30.39%	48.52%	3.186	2.040	1.841	1.768
Crédit Agricole (FRA)	7.45%	21.59%	38.53%	59.33%	2.589	2.030	1.915	1.926
Credit Suisse (CH)	4.12%	8.22%	13.06%	22.46%	6.487	5.145	3.421	2.752
Deutsche Bank (GER)	3.99%	10.91%	22.72%	40.74%	4.214	2.660	2.333	2.176
Intesa San Paolo (ITA)	10.37%	20.09%	32.96%	50.91%	2.558	2.567	2.156	2.008
JP Morgan (USA)	2.36%	5.66%	10.18%	20.00%	6.850	5.238	4.118	3.383
Mediobanca (ITA)	9.26%	17.51%	28.07%	44.71%	5.517	3.227	2.560	2.278
Monte Paschi di Siena (ITA)	13.41%	27.73%	43.63%	61.86%	2.339	1.781	1.649	1.651
Societe Generale (FRA)	8.23%	20.87%	35.95%	54.34%	2.785	1.859	1.707	1.673
UBS (CH)	4.66%	8.97%	14.09%	23.23%	6.876	5.958	3.948	3.118
Unicredit (ITA)	10.97%	21.97%	36.46%	54.79%	3.547	2.134	1.884	1.812
Wells Fargo (USA)	1.94%	4.90%	8.48%	15.74%	6.850	6.958	5.423	4.249

Dopo aver calcolato tali valori abbiamo deciso di confrontarli con quelli ottenuti da un prestigioso istituto di ricerca nel campo del *risk management*, *Risk Management Institute (RMI)* fondato presso la *University of Singapore* nel 2006 con l'appoggio dell'autorità monetaria di Singapore<sup>35</sup>. L'RMI ha avviato un progetto con l'intento di migliorare l'ambito di ricerca inerente il rischio di credito. Nel Marzo del 2009, è stata avviata la *Credit Research Initiative (CRI)*, guidata dal professor Jin-Chuan Duan con lo scopo di

<sup>35</sup> Monetary Authority of Singapore (MAS)

analizzare il rischio di credito di più di 50,000 società quotate in Asia, Nord America ed Europa utilizzando una metodologia basata su un modello in forma ridotta sviluppato dallo stesso istituto e reso pubblico. Sul sito web ufficiale<sup>36</sup> è possibile scaricare non solo le probabilità di default associate ad ogni società ma anche le probabilità di default aggregate per le diverse economie e per i diversi settori.

Le 30 economie analizzate sono: Australia, Belgio, Canada, Cina, Corea del Sud, Danimarca, Filippine, Finlandia, Francia, Germania, Giappone, Grecia, Hong Kong, India, Indonesia, Islanda, Italia, Malesia, Norvegia, Olanda, Portogallo, Regno Unito, Singapore, Spagna, Svizzera, Stati Uniti d’America, Taiwan e Thailandia.

L’iniziativa è senza scopo di lucro ed è stata pensata, come è riportato sul sito del CRI, *“come una risposta costruttiva alla crisi finanziaria iniziata nel 2008. Il CRI opera con la consapevolezza che la ricerca riguardante il rischio di credito sia un “bene pubblico” ed ha come obiettivo lo sviluppo del modello per il calcolo della probabilità di default e lo sviluppo di un database che funzioni come una sorta di “wikipedia”.*

È interessante notare come sia stato posto l’accento sulla caratteristica di “bene pubblico” affidata alla ricerca in tema di rischio di credito. Negli ultimi anni la credibilità delle agenzie di rating è diminuita fortemente ed il loro operato è stato esaminato a fondo sia dagli investitori che dai *regulators* e *policy maker*. Molti hanno criticato le metodologie utilizzate per valutare il rischio di credito dal momento che esse sono non completamente trasparenti e, soprattutto, incapaci di valutare il rischio connesso con gli strumenti derivati<sup>37</sup>. A ciò si aggiunge la delicata questione che riguarda i conflitti d’interesse cui possono essere soggette le agenzie di rating.

Gli operatori dei mercati finanziari hanno bisogno di valutazioni sul rischio di credito delle società che siano trasparenti e “indipendenti”<sup>38</sup>. Per tali motivi, possiamo pensare al rischio di credito come un “bene pubblico” che dovrebbe tutelato e curato così come ci si occupa di curare strade, ponti, ospedali e scuole. Al giorno d’oggi non è così perché le

---

<sup>36</sup> <http://www.rmi.nus.edu.sg/cri/>

<sup>37</sup> Per esempio, tutte e tre le maggiori agenzie (Standard&Poor’s, Moody’s e Fitch) valutavano il debito di Lehman come investment grade fino al giorno del fallimento (15 Settembre 2008).

<sup>38</sup> Per indipendenti facciamo riferimento al fatto che l’agenzia non debba avere conflitti d’interesse con la società che sta valutando.

agenzie di rating sono pagate dalle stesse società che emettono il debito e ciò crea un naturale conflitto d'interessi.

L'*RMI* fornisce soltanto le probabilità d'insolvenza fino a 2 anni pertanto nella Tabella 12 abbiamo confrontato solo quelle ad 1 anno per entrambe i modelli. La differenza principale consiste nel fatto che le probabilità di default calcolate con il modello *à la Leland* tendono ad essere maggiori rispetto a quelle calcolate dal *RMI*.

**Tabella 12.** Probabilità d'insolvenza calcolate dal *Risk Management Institute* della *University of Singapore*.

<b>Gruppo Bancario</b>	<b>6 mesi</b>	<b>1 anno</b>	<b>2 anni</b>
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	0.0616%	0.1122%	0.1990%
Banco Santander Central Hispano (SPA)	0.0700%	0.1295%	0.2278%
Bank of America (USA)	0.4014%	1.2994%	3.2189%
BNP-Paribas (FRA)	0.1479%	0.2781%	0.4802%
Citigroup (USA)	0.2093%	0.7184%	2.0027%
Commerzbank (GER)	0.1455%	0.2884%	0.5903%
Crédit Agricole (FRA)	0.2086%	0.3773%	0.6590%
Credit Suisse (CH)	0.1269%	0.3894%	0.9767%
Deutsche Bank (GER)	0.0953%	0.1913%	0.3879%
Intesa San Paolo (ITA)	0.2621%	0.4501%	0.6910%
JP Morgan (USA)	0.1616%	0.5923%	1.7190%
Mediobanca (ITA)	0.1634%	0.2783%	0.4388%
Monte dei Paschi di Siena (ITA)	0.6092%	1.0005%	1.4755%
Societe Generale (FRA)	0.1994%	0.3553%	0.6064%
UBS (CH)	0.1622%	0.4202%	0.9189%
Unicredit (ITA)	0.3640%	0.6423%	1.0381%
Wells Fargo (USA)	0.0322%	0.1367%	0.5262%

Questa conseguenza dipende sicuramente dal fatto che le probabilità nel modello *à la Leland* siano probabilità neutrali verso il rischio (*risk neutral probability*) mentre quelle del *RMI* siano ottenute con un modello in forma ridotta (*reduced form model*). La modalità seguita dal *RMI* consiste nel calcolare la *Distance to Default* con un modello strutturale molto simile a quello utilizzato da *KMV* ed in seguito calcolare le probabilità reali (*actual/natural probabilities*) utilizzando un modello in forma ridotta. Non viene specificato il valore utilizzato come *Recovery Rate* ed immaginiamo che esso venga posto pari al 40%. Tale metodologia è discutibile perché il *Recovery Rate* così come il *Leverage* sono variabili endogene ed un'analisi che voglia essere precisa e puntuale ne dovrebbe tener conto.

Inoltre, il modello *à la Leland*, essendo un modello strutturale, può essere aggiornato quotidianamente mentre i dati pubblicati dal *RMI* sono aggiornati, in media, mensilmente. Nella Tabella 13 abbiamo ordinato le banche in base alla probabilità di default così come ottenuta dal modello *à la Leland* e l’abbiamo confrontata con l’ordinamento che ottenuto in base al modello utilizzato dal *RMI*. Le differenze principali riguardano le banche spagnole. Il modello *à la Leland* suggerisce che esse, insieme con le italiane, siano le più “rischiose” mentre il modello del *Risk Management Institute* suggerisce che le iberiche siano addirittura tra le più “virtuose”.

**Tabella 13.** Ordinamento cardinale delle 17 Banche e confronto con i risultati del *Risk Management Institute*.

	Modello <i>à la Leland</i> (PD a 3 anni)	<i>RMI</i> (PD a 2 anni)
Wells Fargo (USA)	1 (1.94%)	6 (0.526%)
JP Morgan	2 (2.36%)	15 (1.719%)
Deutsche Bank (GER)	3 (3.99%)	3 (0.388%)
Credit Suisse (CH)	4 (4.12%)	12 (0.977%)
UBS (CH)	5 (4.66%)	11 (0.919%)
BNP-Paribas (FRA)	6 (5.86%)	5 (0.48%)
Commerzbank (GER)	7 (6.09%)	7 (0.59%)
Citigroup (USA)	8 (6.74%)	16 (2.003%)
Bank of America (USA)	9 (7.16%)	17 (3.219%)
Crédit Agricole (FRA)	10 (7.45%)	9 (0.659%)
Societe Generale	11 (8.23%)	8 (0.606%)
Mediobanca	12 (9.26%)	4 (0.439%)
Intesa San Paolo (ITA)	13 (10.37%)	10 (0.691%)
Banco Santander	14 (10.84%)	2 (0.228%)
Unicredit (ITA)	15 (10.97%)	13 (1.038%)
Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)	16 (11.06%)	1 (0.199%)
Monte dei Paschi di Siena (ITA)	17 (13.41%)	14 (1.476%)

## Appendice 3

In questa appendice sono state riportate le tabelle contenenti le informazioni inerenti la calibrazione del modello *à la Leland* per ognuna delle 17 banche analizzate che abbiamo di seguito elencato ordine alfabetico. Il valore massimo della Loss Function (calcolata come somma dei quadrati delle differenze logaritmiche tra i valori reali e quelli teorici) risulta essere pari a 0.04 con un valore mediano pari a 0.00 ed una media pari a 0.01.

---

### Banco Bilbao-Vizcaya (SPA)

T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.70%	20.96%	79.04%	4.70%	417	417	1.00	0.00			
Equity			Leverage		Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate	
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
5.39	5.39	10.00	0.00	2.41	5.01	96.46	1.39%	7.46	6.58%	4.40%	
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	5.28	0.38	0.36	1.00	0.00	34.63%	19.79				
0.10	5.52	0.25	0.26	1.00	0.00	32.95%	20.27				
					0.00						
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
20.01	108.17	10.801%	28.580%	0.698%	0.00			3.2773			

---

**Banco Santander Central Hispano (SPA)**

<i>CDS</i>										
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error		
5	0.70%	20.62%	79.38%	4.62%	407	407	1.00	0.00		
Equity			Leverage		Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L				R		
5.02	5.02	10.00	0.00	2.86	6.64	112.48	1.34%	9.13	6.31%	4.97%
<i>Option</i>										
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value			
0.10	4.89	0.37	0.33	1.00	0.01	34.63%	21.80			
0.10	5.13	0.23	0.23	1.00	0.00	32.95%	22.31			
0.10	5.36	0.14	0.15	1.00	0.01	32.12%	22.80			
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD		
22.08	126.83	10.234%	24.288%	0.698%	0.02			3.3629		

**Bank of America (USA)**

<i>CDS</i>										
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error		
5	0.89%	13.91%	86.09%	3.00%	262	262	1.00	0.00		
Equity			Leverage		Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L				R		
9.17	9.17	10.00	0.00	2.64	10.54	113.05	2.10%	14.75	5.35%	7.35%
<i>Option</i>										
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value			
0.10	8.00	1.32	1.23	1.00	0.01	34.63%	34.83			
0.10	9.00	0.61	0.59	1.00	0.00	32.95%	36.92			
0.10	10.00	0.22	0.23	1.00	0.00	32.12%	38.97			
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD		
37.27	136.21	8.128%	25.028%	0.891%	0.01			3.1843		



<b>BNP-Paribas (FRA)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.70%	13.67%	86.33%	2.94%	230	230	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>		<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>	
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
32.08	32.08	10.00	0.00	9.69	293.15	1127.70	2.59%	270.11	2.62%	17.89%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	31.00	2.53	2.42	1.00	0.00	34.63%	474.30				
0.10	32.00	1.93	1.90	1.00	0.00	32.95%	477.72				
0.10	33.00	1.41	1.47	1.00	0.00	32.12%	481.11				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
477.98	1556.33	2.940%	11.164%	0.698%	0.00			2.5321			

<b>Citigroup (USA)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.89%	12.86%	87.14%	2.75%	246	246	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>		<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>	
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
34.63	34.63	10.00	0.00	2.09	23.32	392.64	1.38%	37.21	7.02%	4.91%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	34.00	1.91	1.80	1.00	0.00	34.63%	110.39				
0.10	35.00	1.40	1.37	1.00	0.00	32.95%	112.29				
0.10	36.00	0.96	1.02	1.00	0.00	32.12%	114.19				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
111.58	450.95	13.833%	25.396%	0.891%	0.01			4.1801			

**Commerzbank (GER)**

<i>CDS</i>										
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error		
5	0.70%	16.40%	83.60%	3.58%	237	237	1.00	0.00		
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate	
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R
1.72	1.72	10.00	0.00	18.84	36.73	66.76	3.85%	29.58	1.75%	30.64%
<i>Option</i>										
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value			
0.10	1.70	0.13	0.12	1.00	0.00	34.63%	49.67			
0.10	1.75	0.10	0.10	1.00	0.00	32.95%	49.88			
0.10	1.80	0.08	0.08	1.00	0.00	32.12%	50.09			
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD		
49.74	113.86	1.683%	8.084%	0.698%	0.00			2.0402		

**Crédit Agricole (FRA)**

<i>CDS</i>										
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error		
5	0.70%	21.59%	78.41%	4.87%	280	280	1.00	0.00		
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate	
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R
4.12	4.12	10.00	0.00	51.30	276.06	351.72	3.22%	199.04	1.53%	39.13%
<i>Option</i>										
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value			
0.10	4.10	0.29	0.29	1.00	0.00	34.63%	324.77			
0.10	4.20	0.25	0.25	1.00	0.00	32.95%	325.40			
0.10	4.30	0.21	0.21	1.00	0.00	32.12%	326.03			
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD		
324.87	670.26	1.515%	4.602%	0.698%	0.00			2.0303		

<b>Credit Suisse (CH)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.15%	8.22%	91.78%	1.72%	165	165	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>	<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>		
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
24.53	24.53	10.00	0.00	1.32	3.28	638.69	0.18%	7.79	8.03%	0.48%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	23.00	2.00	1.81	1.00	0.01	34.63%	47.36				
0.10	24.00	1.32	1.29	1.00	0.00	32.95%	49.01				
0.10	25.00	0.82	0.88	1.00	0.01	32.12%	50.65				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
49.88	650.83	22.706%	36.338%	0.148%	0.02			5.1447			

<b>Deutsche Bank (GER)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.70%	10.91%	89.09%	2.31%	170	170	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>	<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>		
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
35.02	35.02	10.00	0.00	14.48	537.48	1476.79	2.58%	456.41	2.19%	23.18%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	34.00	2.50	2.38	1.00	0.00	34.63%	775.82				
0.10	35.00	1.90	1.87	1.00	0.00	32.95%	779.80				
0.10	36.00	1.38	1.44	1.00	0.00	32.12%	783.74				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
779.88	2202.79	2.440%	7.990%	0.698%	0.00			2.6602			

**Intesa San Paolo (ITA)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.70%	20.09%	79.91%	4.49%	384	384	1.00	0.00			
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate		
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
1.22	1.22	10.00	0.00	4.42	3.54	31.72	2.11%	4.08	4.25%	8.82%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	1.20	0.09	0.09	1.00	0.00	34.63%	8.26				
0.10	1.25	0.07	0.07	1.00	0.00	32.95%	8.39				
0.10	1.30	0.05	0.05	1.00	0.00	32.12%	8.51				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
8.32	38.16	5.179%	20.627%	0.698%	0.00			2.5673			

**JP Morgan (USA)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.89%	5.66%	94.34%	1.17%	107	107	1.00	0.00			
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate		
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
44.84	44.84	10.00	0.00	1.77	19.04	365.78	1.13%	33.79	7.18%	4.32%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	44.00	2.08	1.90	1.00	0.01	34.63%	120.33				
0.10	45.00	1.49	1.47	1.00	0.00	32.95%	122.13				
0.10	46.00	1.04	1.12	1.00	0.01	32.12%	123.92				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
121.84	418.64	16.636%	23.779%	0.891%	0.01			5.2377			

**Mediobanca (ITA)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.70%	17.51%	82.49%	3.85%	342	342	1.00	0.00			
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate		
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
3.97	3.97	10.00	0.00	2.63	4.45	71.53	1.50%	6.33	5.84%	5.18%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	3.90	0.27	0.26	1.00	0.00	34.63%	15.91				
0.10	4.00	0.22	0.21	1.00	0.00	32.95%	16.12				
0.10	4.20	0.13	0.14	1.00	0.00	32.12%	16.53				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
16.06	81.48	9.209%	26.046%	0.698%	0.01			3.2266			

**Monte dei Paschi di Siena (ITA)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.70%	27.73%	72.27%	6.50%	479	479	1.00	0.00			
Equity			Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate		
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
0.28	0.28	10.00	0.00	15.12	4.57	13.74	3.54%	3.87	2.33%	21.82%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	0.25	0.04	0.04	1.00	0.00	34.63%	6.45				
0.10	0.30	0.02	0.02	1.00	0.00	32.95%	6.66				
0.10	0.35	0.01	0.00	1.00	0.00	32.12%	6.85				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
6.59	19.90	2.124%	11.875%	0.698%	0.00			1.7809			

**Societe Generale (FRA)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.70%	20.87%	79.13%	4.68%	305	305	1.00	0.00			
Equity			Leverage		Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate	
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
18.90	18.90	10.00	0.00	21.86	481.79	849.81	4.04%	380.61	1.74%	31.43%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	18.00	1.96	1.91	1.00	0.00	34.63%	631.52				
0.10	19.00	1.39	1.38	1.00	0.00	32.95%	636.10				
0.10	19.50	1.14	1.16	1.00	0.00	32.12%	638.35				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
635.64	1456.37	1.612%	8.168%	0.698%	0.00			1.8589			

**UBS (CH)**

<i>CDS</i>											
T	Zero Rate	Def Prob	Surv Prob	Av. Default Intensity	Actual Spread (bps)	Th. Spread (bps)	Weight	Sq error			
5	0.15%	8.97%	91.03%	1.88%	180	180	1.00	0.00			
Equity			Leverage		Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Rec Rate	
Actual	Th.	Weight	Sq. Er	L						R	
11.80	11.80	10.00	0.00	1.26	1.22	287.21	0.15%	3.07	9.15%	0.40%	
<i>Option</i>											
T	Strike	Quote	Th. Value	Weight	Squared error	Implied volatility	Critical Value				
0.10	11.50	0.65	0.56	1.00	0.02	34.63%	22.44				
0.10	12.00	0.39	0.37	1.00	0.00	32.95%	23.26				
0.10	12.50	0.20	0.23	1.00	0.02	32.12%	24.07				
V	Z	q <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	r	Loss Function			DD			
22.93	291.99	29.135%	35.228%	0.148%	0.04			5.9577			

<b>Unicredit (ITA)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.70%	21.97%	78.03%	4.96%	396	396	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>	<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>		
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
3.23	3.23	10.00	0.00	8.42	24.32	113.85	2.87%	23.22	2.94%	15.34%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	3.10	0.31	0.30	1.00	0.00	34.63%	41.38				
0.10	3.20	0.25	0.25	1.00	0.00	32.95%	41.70				
0.10	3.30	0.20	0.20	1.00	0.00	32.12%	42.02				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
41.79	150.68	2.998%	14.921%	0.698%	0.00			2.1338			

<b>Wells Fargo (USA)</b>											
<i>CDS</i>											
<b>T</b>	<b>Zero Rate</b>	<b>Def Prob</b>	<b>Surv Prob</b>	<b>Av. Default Intensity</b>	<b>Actual Spread (bps)</b>	<b>Th. Spread (bps)</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq error</b>			
5	0.89%	4.90%	95.10%	1.01%	94	94	1.00	0.00			
<b>Equity</b>			<b>Leverage</b>	<b>Bankruptcy Trigger</b>	<b>Option to Default</b>	<b>Option to Default Vol.</b>	<b>Bond</b>	<b>Bond Yield</b>	<b>Rec Rate</b>		
<b>Actual</b>	<b>Th.</b>	<b>Weight</b>	<b>Sq. Er</b>	<b>L</b>						<b>R</b>	
34.02	34.02	10.00	0.00	1.31	4.53	152.43	0.77%	10.52	9.29%	2.55%	
<i>Option</i>											
<b>T</b>	<b>Strike</b>	<b>Quote</b>	<b>Th. Value</b>	<b>Weight</b>	<b>Squared error</b>	<b>Implied volatility</b>	<b>Critical Value</b>				
0.10	34.00	1.09	0.95	1.00	0.02	34.63%	68.70				
0.10	35.00	0.65	0.64	1.00	0.00	32.95%	70.34				
0.10	36.00	0.37	0.41	1.00	0.01	32.12%	71.98				
<b>V</b>	<b>Z</b>	<b>q<sub>v</sub></b>	<b>σ<sub>v</sub></b>	<b>r</b>	<b>Loss Function</b>			<b>DD</b>			
68.74	168.82	29.238%	27.836%	0.891%	0.03			6.9578			

## Conclusione

Nel nostro lavoro abbiamo analizzato il software “Rotman Interactive Trader” (RIT) che è stato sviluppato dalla University of Toronto per consentire la simulazione di diverse situazioni che possiamo osservare sui mercati: dalla speculazione all’hedging attraverso l’utilizzo di opzioni al trading di commodities e così via. Tale software può anche essere utilizzato con scopi didattici utilizzando un approccio definito *experiential learning* o anche *deriving by doing*.

Abbiamo inoltre analizzato il problema del *market making*. Sui mercati è infatti presente il *bid-ask spread* che rappresenta il costo da sostenere affinché la transazione avvenga immediatamente (*cost of immediacy*). Esso è quel costo che giustifica la differenza tra il prezzo pagato nella transazione ed il valore reale del bene (*fundamental value*). Abbiamo fornito un modello per la determinazione di tale *cost of immediacy* e, di conseguenza, dei prezzi *bid* e *ask*. In particolare, utilizzando la teoria delle opzioni, il modello suggerisce che le quotazioni *bid* ed *ask* dipendano, oltre che dal prezzo del sottostante, anche dalla volatilità del titolo e dalla domanda ed offerta del titolo misurate, rispettivamente, come numero di titoli acquistati o venduti in un certo intervallo temporale.

Abbiamo mostrato un algoritmo costruito in Visual Basic for Application che svolga l’attività di *market making* basandosi sul modello descritto. Tale algoritmo si caratterizza per la capacità di rilevare autonomamente situazioni di illiquidità sul mercato ed aggiustare, di conseguenza, i prezzi *bid* ed *ask*. Esso è un’evoluzione dell’algoritmo che abbiamo costruito per la nona edizione della “Rotman International Trading Competition” tenutasi a Febbraio presso la Rotman School of Management e potrà essere una base di partenza sul quale implementare nuove strategie qualora la “LUISS Guido Carli” decida di partecipare alle future edizioni di tale competizione.

Infine, dal momento che la valutazione del rischio di credito suscita, da sempre, un grande interesse da parte sia delle banche che delle altre istituzioni finanziarie, abbiamo condotto un’analisi sui “modelli strutturali” per il rischio di credito. Essi sono interessanti perché permettono sia la stima delle probabilità di default sia il *pricing* del debito e dell’*equity* in



## Conclusione

un unico modello basato su dati di mercato (prezzo dei titoli azionari, opzioni, etc.). In particolare, abbiamo analizzato quei modelli che utilizzano la teoria delle opzioni per la stima del rischio di credito.

Abbiamo analizzato dapprima il modello di Merton. Esso assume che una società abbia un certo ammontare di debito sotto forma di zero-coupon bond con scadenza al tempo  $T$ . La società fallisce se il valore delle sue attività è minore del valore nozionale del debito al tempo  $T$ . L'*equity* può esser visto come un'opzione call europea scritta sulle attività della società e prezzo d'esercizio pari al valore facciale del debito. Il modello può essere utilizzato per stimare o le probabilità neutrali verso il rischio che una società fallisca o il *credit spread* sul debito. Per poter applicare tale modello è necessario conoscere il valore corrente delle attività, la volatilità delle attività, l'ammontare del debito e la sua scadenza.

Basandoci su tale modello, abbiamo sviluppato un nuovo *case* per il Rotman Interactive Trader che stimola gli studenti all'interpretazione di informazioni concernenti il valore delle attività, del debito, della volatilità delle attività e della *maturity* del debito. Le informazioni sono scelte in modo casuale da un database che abbiamo costruito con l'ausilio del Financial and Research Trading Lab della University of Toronto.

Infine abbiamo condotto un'analisi empirica utilizzando un modello *à la Leland*. Tale modello ipotizza che il debito sia perpetuo dunque non dobbiamo fare alcuna ipotesi circa la sua scadenza (al contrario di quanto fatto da KMV). Il modello è stato testato utilizzando i dati relativi a 17 banche ed i risultati sono stati confrontati con quelli pubblicati dal *Risk Management Institute* della University of Singapore. In particolare si è messo in evidenza che, ordinando le società in base alle probabilità di default stimate in base al modello *à la Leland*, le banche italiane e spagnole si sono attestate in fondo alla classifica (*probability of default* maggiori rispetto alle banche francesi, tedesche, svizzere ed americane). Utilizzando i dati del *Risk Management Institute*, invece, la classifica vedrebbe le banche spagnole ai primi due posti.

## Riferimenti Bibliografici

- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1980). Dealership market: Market-making with inventory. *Journal of Financial Economics*, 8, p. 31-53.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1983). Price Smoothing and Inventory. *Review of Economic Studies*, 50, p. 87-98.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1991). Liquidity, Maturity and the Yield on U.S. Treasury Securities. *Journal of Finance*, 46, p. 1411-1425.
- Avellaneda, M., Reed, J., & Stoikov, S. (2011, June 29). Forecasting Prices from Level-I Quotes in the Presence of Hidden Liquidity. *Algorithmic Finance*, 1(1).
- Bagehot, W. (1971). The only game in town. *Financial Analysts Journal*, 27(2), p. 12-22.
- Barone, E., & Barone, G. (2012, January). Principali Banche Italiane: Probabilità d'Insolvenza. *Working Paper*.
- Barone, G. (2010, November). European Compound Options Written on Perpetual American Options. *Working Paper*.
- Barone, G. (2011, June 9). An Equity-Based Credit Risk Model. *Working Paper*.
- Barone, G. (2011, May). Equity Options, Credit Default Swaps and Leverage: A simple stochastic Volatility Model for Equity and Credit Derivatives. *Working Paper*.
- Black, F., & Cox, J. (1976). Valuing Corporate securities: some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, 31, p. 351-357.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-659.
- Chacko, G. C., Jurek, J. W., & Stafford, E. (2008). The price of immediacy. *Journal of Finance*, 3, p. 1253-1289.
- Copeland, T. E., & Galai, D. (1983, December). Information effects on the bid-ask spread. *Journal of Finance*, 38(5), p. 1457-1469.

- Coval, J. D., Gadzik, J., & Stafford, E. (2007, June). Deriving by Doing: A New Approach to Teaching Finance (Harvard Business School). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=996229> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.996229>.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1979, January). Duration and the Measurement of Basis risk. *Journal of Business*, 51(2), p. 51-61.
- Demsetz, H. (1968). The cost of transacting 33-. *Quarterly Journal of Economics*(82), p. 33-53.
- Duffie, D., & Singleton, K. J. (2003). *Credit Risk*. Princeton University Press.
- Duffie, D., Gârleanu, N., & Pedersen, L. H. (2005). Over-the-counter Markets. *Econometrica*, 73, p. 1815-1847.
- Glosten, L. R., & Milgrom, P. R. (1985, Marzo). Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed trader. *Journal of Financial Economics*, 14(1), p. 71-100.
- Goldstein, R. S., Ju, N., & Leland, H. E. (2001). An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure. *Journal of Business*, 74(4).
- Ho, T., & Stoll, H. R. (1981). Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. *Journal of Financial Economics*, 9(1), p. 47-73.
- Hull, J. C. (2011). *Options Futures and Other Derivatives* (VIII ed.). Pearson.
- Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield.
- Jones, E. P., Mason, S., & Rosenfeld, E. (1984). Contingent claims analysis of corporate capital structure: an empirical investigation. *Journal of Finance*, 39, p. 611-625.
- Leland, H. E. (1994, September). Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure. *Journal of Finance*, 49(4), p. 1213-1252.
- Leland, H. E. (2006). Princeton Lectures. *Lecture 1 - Pros and Cons of Structural Models - An Introduction, Lecture 2 - A new Structural Model*.
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. 28, p. 449-470.
- Modigliani, F., & Miller, M. H. (1958, June). The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *American Economic Review*, 48(3), p. 267-297.
- Rubinstein, M., & Reiner, E. (1991, October). "Unscrambling the Binary Code. *Risk*, 4(9), p. 75-83.

## Riferimenti Bibliografici

Stoll, H. R. (1992). Principles of Trading Market Structure. *Journal of Financial Services Research*(6), p. 75-107.

Warner, J. B. (1977, May). Bankruptcy Cost: Some Evidence. *Journal of Finance*, 32(2), p. 337-347.